This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

KD
44579
HN 5B92 0

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR DE TRAVAUX PUBLICS

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

I

HARVARD ENGINEERING SCHOOL

Digitized by Google

KD44579
Transferred to Engineering Library

H 30.46
39
121

Harvard College Library

TA
405
14
v1

FROM THE FUND OF

CHARLES MINOT

Class of 1828

DEPOSITED IN THE LIBRARY

OF THE

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF

OLOGY

Digitized by Google

ary

Digitized by Google

Digitized by Google

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

Digitized by Google

BIBLIOTHÈQUE

DU

CONDUCTEUR DE TRAVAUX PUBLICS

VOLUMES PARUS

Mathématiques	8	50
Mécanique, Hydraulique, Thermodynamique	9	»
Physique et Chimie	8	50
Résistance des matériaux, I	15	»
Topographie { Instruments	12	»
Topographie { Méthodes	15	»
Maçonnerie	10	»
Bois et Métaux	8	»
Tracé et Terrassements	15	»
Droit civil	8	»
Droit administratif général	9	»
Droit commercial et industriel	10	»
Procédure civile et Droit pénal	8	»
Exécution des travaux publics	12	»
Organisation des services des travaux publics	8	»
Comptabilité des travaux publics	12	»
Rôle économique et social des voies de communication	10	»
Hygiène	7	50
Routes et Chemins vicinaux	12	»
Voie publique	12	»
Distribution d'eau	15	»
Egouts, Assainissement	18	»
Plantations, Jardins, Promenades	11	»
Eclairage	12	»
Construction et Voie	12	50
Locomotives et Matériel roulant	12	»
Exploitation technique des chemins de fer	16	»
Tramways et Automobiles	12	»
Contrôle des chemins de fer	12	»
Géologie et Minéralogie appliquées	12	»
Exploitation des mines	9	»
Chaudière à vapeur	12	»
Machines à vapeur	15	»
Machines hydrauliques	10	»
Législation et Contrôle des mines	12	»
Législation et Contrôle des appareils à vapeur	8	»
Architecture	15	»
Charpente et Couverture	10	»
Menuiserie, Serrurerie, Plomberie, Peinture, Vitrerie	10	»
Fumisterie, Chauffage et Ventilation	10	»
Devis et Evaluations	15	»
Agriculture	9	»
Hydraulique agricole I	12	»
— II	15	»
— III	15	»
Génie rural	10	»
Electricité { Théorie	12	»
Electricité { Applications	12	»
Photographie, Reproduction des dessins	9	»
Génie	12	»

Digitized by Google

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR DE TRAVAUX PUBLICS

RÉSISTANCE
DES
MATÉRIAUX
APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

MÉTHODES PRATIQUES
PAR LE CALCUL ET LA STATIQUE GRAPHIQUE

TOME PREMIER

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE
POUTRES DROITES ET CHARPENTES MÉTALLIQUES
SUR DEUX APPUIS
PASSERELLES ET PONTS MÉTALLIQUES. — RÉGLEMENTATION

PAR

ERNEST ARAGON
INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES
INGÉNIEUR D'ÉTUDES DE PONTS ET CHARPENTES MÉTALLIQUES

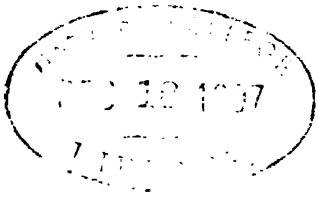
PARIS
Vve CH. DUNOD, ÉDITEUR
49, Quai des Grands-Augustins, 49

1904

Digitized by Google

405
14
11

KDI



Trinot und

36
12

Digitized by Google

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR DE TRAVAUX PUBLICS

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES

DE MESSIEURS LES MINISTRES DES TRAVAUX PUBLICS DE L'AGRICULTURE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DU COMMERCE ET DE L'INDUSTRIE DE L'INTÉRIEUR, DES COLONIES DE LA JUSTICE

Comité de patronage

BARTHOU Ancien Ministre des Travaux publics et de l'Intérieur, Membre de la Chambre des députés.

BECHMANN Directeur des eaux et de l'assainissement de Paris, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

BOREUX Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Directeur de la voie publique et de l'éclairage de Paris.

BOSRAMIER Conducteur principal des Ponts et Chaussees en retraite.

BOUQUET Directeur du personnel et de l'enseignement technique au Ministère du Commerce et de l'Industrie.

BOURRAT Conducteur des Ponts et Chaussées, Membre de la Chambre des députés.

BOUVARD Directeur administratif des services d'architecture, des promenades et plantations de la ville de Paris.

COLSON Conseiller d'Etat, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

COMTE (J.) Ancien directeur des Bâtiments civils et des Palais nationaux.

DEBAUVE Inspecteur de l'Ecole des Ponts et Chaussées, auteur du *Manuel de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

DEFRANCE Directeur des affaires départementales à la Préfecture de la Seine.

DELECROIX Avocat, Docteur en droit, Directeur de la *Revue de la Législation des Mines.*

Le **Directeur** de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées.

Le **Directeur** de l'Ecole nationale supérieure des Mines.

DONIOL Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, Membre du Conseil de la Légion d'honneur.

BOUSQUET (du) Ingénieur en chef du matériel et de la traction à la Cie des Chemins de fer du Nord.

EYROLLES Directeur de l'Ecole spéciale de Travaux publics.

FLAMANT Inspecteur général des Ponts et Chaussees.

GAUTHIER (de l'Aude) Sénateur.

GERVAIS Membre de la Chambre des députés.

Digitized by Google

GRILLOT Président honoraire de la Société des Conducteurs, Contrôleurs et Commis des Ponts et Chaussées et des Mines.

GUILLAIN Ancien Ministre des Colonies, Membre de la Chambre des députés.

GUYOT-DESSAIGNE Ancien Ministre de la Justice et des Travaux publics, Membre de la Chambre des députés.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE Membre de l'Institut, Inspecteur général des Mines en retraite.

HENRY (E.) Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Président du Conseil de la Vicinalité au Ministère de l'Intérieur.

HUET Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, ancien Directeur administratif des Travaux de Paris.

LAUSSEDAT (le Colonel) Membre de l'Institut, Directeur honoraire du Conservatoire national des Arts et Métiers.

LE BERQUIER Avocat à la Cour d'appel de Paris.

LE ROUX Ancien Directeur des Affaires départementales à la Préfecture de la Seine.

LOUIS MARTIN Avocat, Professeur libre de droit, Membre de la Chambre des députés.

MAGNIN Ancien Ministre de l'Agriculture, du Commerce et des Finances, Sénateur inamovible.

MARTINIE Contrôleur général de l'Administration de l'Armée, Ancien Président de la Société de Topographie de France.

PHILIPPE Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Directeur honoraire de l'Hydraulique agricole au Ministère de l'Agriculture.

PILLET Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

PIOT Sénateur, ancien Entrepreneur de Travaux publics.

Le **Président** de l'Association philotechnique.

Le **Président** de l'Association polytechnique.

Le **Président** de la Société des Anciens Elèves des Ecoles nationales d'Arts et Métiers.

Le **Président** de la Société des Conducteurs, Contrôleurs et Commis des Ponts et Chaussées et des Mines.

Le **Président** de la Société des Ingénieurs civils de France.

Le **Président** de la Société des Ingénieurs coloniaux.

Le **Président** de la Société de Topographie de France.

QUENNEC Directeur de l'Octroi à la Préfecture de la Seine.

RÉSAL Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées.

ROUCHÉ Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers.

SANGUET Président de la Société de Topographie parcellaire de France.

TISSERAND Conseiller-maître à la Cour des Comptes.

Digitized by Google

Comité de rédaction

SIÈGE : 46, QUAI DE L'HÔTEL-DE-VILLE

Bureau

PRÉSIDENT :

JOLIBOIS Conducteur des Ponts et Chaussées, Agent voyer cantonal (Service ordinaire et vicinal de la Seine), Président de la Société des Conducteurs, Contrôleurs et Commis des Ponts et Chaussées et des Mines, Membre du Comité de la Société des Ingénieurs coloniaux, des Sociétés des Ingénieurs civils de France, des anciens élèves des Ecoles d'Arts et Métiers, de Topographie de France, etc., Professeur à l'Association philotechnique.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL :

BONNAL Ingénieur civil, Secrétaire de la Direction des Tramways à vapeur du département de l'Aude, Membre de la Société des Ingénieurs coloniaux, Professeur à l'Association philotechnique.

VICE-PRÉSIDENTS :

DACREMONT Sous-inspecteur de l'Assainissement, Service municipal.

DARDART Conducteur principal des Ponts et Chaussées (Service ordinaire et vicinal de la Seine).

FALCOU Chef de bureau à la Préfecture de la Seine, Chef du cabinet du Directeur administratif des services d'architecture, des promenades et plantations.

VIDAL Inspecteur particulier de l'Exploitation commerciale des Chemins de fer P.-L.-M.

SECRÉTAIRES :

BONDU Commissaire de surveillance administrative des chemins de fer (P.-L.-M.), professeur à l'Association philomatique.

CANAL Contrôleur-Comptable des Chemins de fer (Orléans).

DEJUST Ingénieur municipal (Service des Eaux), Ingénieur des Arts et Manufactures, Répétiteur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures.

DIÉBOLD Sous-inspecteur de l'Assainissement, Service municipal.

Digitized by Google

Membres du Comité :

AUCAMUS	Ingénieur des Arts et Manufactures, chef d'atelier aux chemins de fer du Nord.
DARIÈS	Ingénieur Municipal (Service des Eaux), Licencié ès Sciences, Professeur à l'Association philotechnique et à l'Ecole spéciale de Travaux publics.
COLAS	Sous-ingénieur aux Chemins de fer de l'Etat.
DECRESSAIN	Contrôleur principal des Mines (Service des appareils à vapeur), Professeur à l'Ecole d'Horlogerie.
GRIMAUD	Ingénieur chef du service des Travaux publics de la Martinique.
HALLOUIN	Inspecteur principal de l'Exploitation commerciale des Chemins de fer de l'Etat.
LANAVE	Conducteur principal des Ponts et Chaussées, chef de section à la Cie du Chemin de fer métropolitain.
LÉVY-SALVADOR	Ingénieur du Service technique de l'Hydraulique agricole, au Ministère de l'Agriculture.
MALETTE (G.)	Conducteur principal des Ponts et Chaussées, Agent voyer cantonal (Service ordinaire et vicinal de la Seine).
PRADÈS	Sous-chef de bureau au Ministère de l'Agriculture, Membre du Conseil d'administration de l'Association philotechnique.
PRÉVOT	Conducteur principal faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et Chaussées (Service du nivellement général de la France).
REBOUL	Contrôleur principal des Mines (Service des appareils à vapeur).
ROUSSEAU (Ph.)	Secrétaire général de la Société des Ingénieurs coloniaux.
ROUX	Conducteur principal faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et Chaussées (Service ordinaire du Puy-de-Dôme).
SIMONET	Conducteur des Ponts et Chaussées, Service municipal (Métropolitain).
SAINT-PAUL	Conducteur municipal, Secrétaire adjoint de la Société de Topographie de France, Professeur à l'Association polytechnique.
WÉRY	Ingénieur sanitaire.

Digitized by Google

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

MÉTHODES PRATIQUES
PAR LE CALCUL ET LA STATIQUE GRAPHIQUE

PREMIÈRE PARTIE

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX

---

§ 1. — PRINCIPES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1. Définitions. — La résistance des matériaux a pour but la détermination des efforts moléculaires et des déformations qui se produisent dans les corps solides soumis à l'action des forces extérieures.

La déformation se décompose en une *déformation élastique* qui disparaît lorsqu'on supprime les forces, et en une *déformation permanente* qui subsiste malgré la suppression de ces forces.

La déformation élastique seule est étudiée dans la résistance des matériaux. Elle est proportionnelle à la charge que supporte le corps et, à sa limite, elle s'appelle *limite d'élasticité*.

Digitized by Google

La charge qui correspond à cette limite d'élasticité se nomme *charge limite d'élasticité.*

Lorsqu'on dépasse la limite d'élasticité, on arrive à la déformation permanente, et l'état moléculaire de la pièce se modifie. Enfin, si l'on fait croître les forces extérieures, on obtient la rupture de la pièce.

La charge qui produit cette rupture s'appelle *charge à la rupture.*

Le *coefficient d'élasticité,* désigné par la lettre E, est la tension sous laquelle une pièce prismatique, soumise à une charge dans le sens de sa longueur, s'allongerait d'une quantité égale à sa longueur primitive.

La *charge pratique* est celle qui correspond à la charge limite d'élasticité affectée d'un coefficient de sécurité déterminé par l'expérience.

La valeur des différentes constantes pour les matériaux usuels sera donnée ultérieurement.

2. Conditions d'application. — Pour que les formules employées dans la résistance des matériaux soient applicables, il faut :

1° Que les corps solides soient considérés comme engendrés par une *section transversale* fermée, variable ou non, se déplaçant normalement à une ligne continue, située dans un plan, qui serait la trajectoire du centre de gravité de la section. Cette ligne s'appelle *l'axe longitudinal ;*

2° Que la variation de la *section transversale* ait lieu d'une manière insensible, de telle sorte que deux sections très voisines soient peu différentes l'une de l'autre ;

3° Que le rayon de courbure de l'axe longitudinal soit toujours très grand comparé à la dimension de la section transversale correspondant à ce rayon.

3. Termes employés. — Toute ligne matérielle parallèle à l'axe longitudinal s'appelle une *fibre,* et l'axe longitudinal lui-même prend le nom de *fibre moyenne.*

Enfin, quoique le solide compris entre deux sections très voisines ne soit pas géométriquement un prisme, on a appelé ce solide une *pièce prismatique.*

Digitized by Google

Les efforts moléculaires sont également appelés *forces élastiques ;* elles font équilibre aux forces extérieures.

§ 2. — ACTION DES FORCES EXTÉRIEURES QUELCONQUES SUR UNE PIÈCE PRISMATIQUE

4. Recherche des efforts développés. — Soit (*fig.* 1) une pièce prismatique à axe longitudinal GG', soumise à l'action de forces extérieures quelconques et supposée en équilibre.

On considère cette pièce coupée par deux sections transversales SS_1 et $S'S'_1$ infiniment voisines et normales à l'axe.

Soit R la résultante de toutes les forces extérieures situées à gauche de la section SS_1, qui est équilibrée par les *efforts moléculaires* développés entre les deux sections.

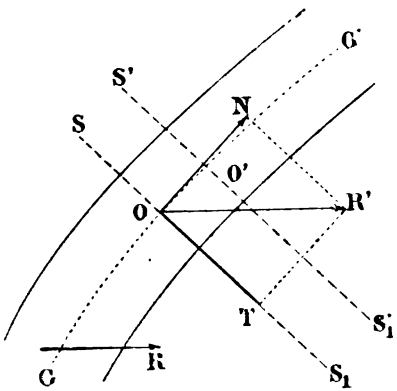


Fig. 1.

Pour fixer les idées, on suppose que cette résultante se trouve dans un plan parallèle au plan de la figure.

On peut transporter la résultante R parallèlement à elle-même au centre de gravité O, en R', pourvu que l'on adjoigne à ce mouvement deux couples : l'un situé dans un plan passant par l'axe longitudinal (dans le cas présent, le plan de la figure), et l'autre normalement à ce plan[1].

On effectue cette translation.

5. Effort normal. — Effort tranchant. — La nouvelle résultante R' peut être décomposée en deux autres forces, savoir : l'une N, perpendiculaire à la section SS_1, qui est

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 58.

Digitized by Google

appelée l'*effort normal ;* l'autre T, située dans le plan de cette section, et qui est l'*effort tranchant.*

6. **Moment fléchissant.** — Le couple qui agit dans le plan de la figure a son axe dans la section transversale SS_1 et tend à faire fléchir la pièce dans le sens longitudinal. Ce couple est appelé *couple de flexion ;* et son moment[1], *moment fléchissant.*

7. **Moment de torsion.** — Le couple qui est situé dans le plan de la section transversale a son axe dirigé suivant l'axe de la pièce et est normal en O au plan SS_1 ; il tend à faire tourner la section autour de cet axe. Ce couple est appelé *couple de torsion ;* et son moment, *moment de torsion.*

8. Remarque I. — Dans les applications qui sont faites dans la suite, la section transversale mobile possède un axe de symétrie normal à l'axe longitudinal ; et l'on dit, si la section mobile varie tout en conservant sa symétrie, que la pièce est à *section variable ;* dans le cas contraire, elle est à *section constante.*

En outre, si la résultante des forces extérieures à la section considérée se trouve dans le plan de symétrie, ce qui est le cas habituel, l'effort normal devient tangent à la fibre moyenne ; il prend alors le nom de *tension* ou *compression de la fibre moyenne*, et l'effort tranchant devient normal à cette fibre moyenne. Le *couple de torsion* s'annule, et il ne reste que le *moment fléchissant.*

La remarque I s'applique aux arcs.

9. Remarque II. — Les applications les plus fréquentes sont celles relatives aux poutres droites, dont la fibre moyenne est une ligne droite et qui sont soumises à des forces normales à cette fibre moyenne. Pour ces pièces, l'*effort normal* disparaît, et il ne reste que l'*effort tranchant* et le *moment fléchissant.*

10. **Interprétation des efforts dans le cas de la flexion plane.** — Lorsque les forces extérieures se trouvent dans le plan de symétrie, on dit que la *flexion* est *plane.* Par abré-

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.). p. 56 à 62.

Digitized by Google

viation, la résultante R s'appelle la *force extérieure* ou, plus simplement, la *force extérieure*.

Le couple de flexion s'appelle aussi *couple de transmission*, et le moment de ce couple en un point donné, qui est le *moment fléchissant*, a pour valeur le produit de la *force extérieure* par sa distance au point considéré.

L'*effort tranchant* est la projection de la force extérieure sur la normale à la fibre moyenne en ce point, et l'*effort normal* est la projection de cette même force extérieure sur la tangente à la fibre moyenne.

En conséquence, comme la *force extérieure* est la somme de toutes les forces agissant à gauche de la section considérée, y compris les réactions des appuis, s'il y en a :

Le *moment fléchissant* au centre de gravité de cette section est égal à la somme des moments de toutes les forces situées à gauche de la section.

L'*effort tranchant* a pour valeur la somme des projections sur la normale à la fibre moyenne de toutes ces forces.

L'*effort normal* a également pour valeur la somme des projections sur la tangente à la fibre moyenne de ces mêmes forces.

§ 3. — MOMENTS D'INERTIE. — RAYON DE GYRATION ELLIPSE D'INERTIE

11. Moments d'inertie. — On appelle *moment d'inertie* I d'une surface plane par rapport à une droite située dans son plan, la somme des produits des divers éléments infiniment petits, composant cette surface, par le carré de la distance de chaque élément à la droite[1].

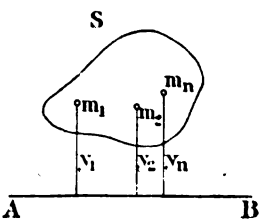


Fig. 2.

Ainsi soient : S, une surface fermée de section (*fig.* 2); AB, une droite ; m_1, m_2, ..., m_n, une série d'éléments de la surface; y_1, y_2, ..., y_n, les distances

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 131.

Digitized by Google

des centres de gravité de ces éléments à la droite AB. Le moment d'inertie de la surface S par rapport à la droite AB est :

$$I_{AB} = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \dots m_n y_n^2$$

ou

$$I_{AB} = \Sigma m y^2 = \Omega y^2.$$

12. Déplacement des axes parallèlement à eux-mêmes. — Soient (*fig.* 3) une surface S de section Ω qui a pour centre de gravité G ; x_g et y_g, les coordonnées de ce centre de gravité par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy ; I_y et I_x, les moments d'inertie par rapport à ces axes.

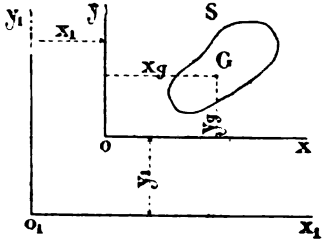


Fig. 3.

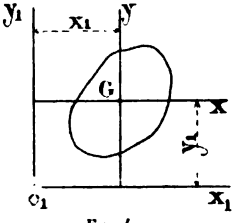


Fig. 4.

Les moments d'inertie par rapport à deux axes o_1y_1 et o_1x_1 parallèles aux premiers, deviennent, si x_1 et y_1 sont les nouvelles coordonnées de l'origine o :

$$Iy_1 = \Omega\,(x_g + x_1)^2 = \Omega x_g^2 + \Omega x_1^2 + 2x_1 x_g \Omega,$$

d'où

(1) $$Iy_1 = Iy + \Omega x_1^2 + 2x_1 x_g \Omega;$$

(2) $$Ix_1 = Ix + \Omega y_1^2 + 2y_1 y_g \Omega.$$

Si le centre de gravité G se confond avec l'origine o (*fig.* 4), x_g et y_g s'annulent, et il reste :

(3) $$Iy_1 = Iy + \Omega x_1^2;$$

(4) $$Ix_1 = Ix + \Omega y_1^2.$$

Ces dernières formules sont d'une application constante.

13. Axes principaux. — Les axes principaux d'une surface sont ceux qui donnent les moments d'inertie *maximum* et

Digitized by Google

minimum ; on les désigne par :

$$I_{max} \quad \text{et} \quad I_{min}.$$

Ces deux axes sont perpendiculaires l'un à l'autre.

14. Moment d'inertie polaire. — Le moment d'*inertie polaire* d'une section plane est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation perpendiculaire à son plan.

Il est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes quelconques se trouvant dans le plan de la section et se coupant à angle droit sur l'axe de rotation.

L'axe de rotation est généralement l'axe longitudinal de la pièce, et les deux axes, les axes principaux.

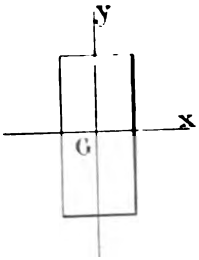


Fig. 5.

Pour un rectangle (*fig.* 5), on aurait :

$$I_{polaire} = Ix + Iy.$$

15. Rayon de gyration. — Le moment d'inertie s'exprime aussi par la formule :

$$I = \Omega r^2,$$

Ω étant la surface de la section, et r le *rayon de gyration*.

On a donc : $r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$ et, suivant que I est maximum ou minimum, r l'est aussi.

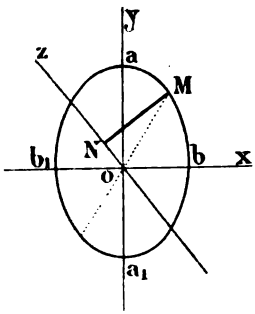


Fig. 6.

16. Ellipse d'inertie. — Si, à partir de l'origine o de deux axes rectangulaires y et x (*fig.* 6), on porte :

$$oa = oa_1 = r \text{ maximum},$$
$$ob = ob_1 = r \text{ minimum},$$

et que l'on construise avec les axes aa_1 et bb_1 une ellipse, cette courbe reçoit le nom d'*ellipse d'inertie*.

Digitized by Google

Si le point o se confond avec le centre de gravité de la section, cette ellipse prend le nom d'*ellipse centrale d'inertie*.

Enfin, connaissant l'*ellipse d'inertie*, on peut déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque z passant par o en multipliant la surface Ω de la section par le carré de la distance MN de l'axe oz au point M, qui est situé à l'extrémité du diamètre conjugué à cet axe.

§ 4. — RECHERCHE DE QUELQUES MOMENTS D'INERTIE

17. Rectangle plein. — Les côtés du rectangle sont b et h et les axes de symétrie xx et yy (*fig.* 7).

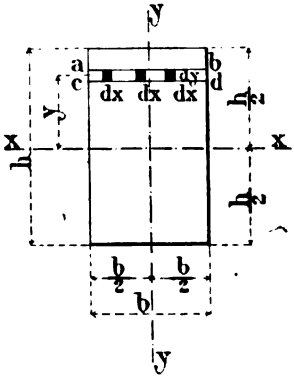


Fig. 7.

Moment d'inertie par rapport à l'axe xx. — Soient dans une tranche *abcd*, parallèle à l'axe xx, une série d'éléments infiniment petits $dx\,dy$, et y la distance du centre de gravité de ces éléments à l'axe xx.

La somme des moments d'inertie de tous ces éléments est :

$$dI = dx\,dy\,y^2 = b\,y^2\,dy.$$

Le moment d'inertie total, en supposant une infinité de tranches parallèles, a pour valeur :

$$Ix = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} by^2 dy = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy$$
$$= \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}\,[1].$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe yy. — Ce moment

[1] Voir *Mathématiques* (B. C. T. P.), p. 87.

Digitized by Google

d'inertie est :

$$Iy = \frac{hb^3}{12}.$$

18. Rectangle évidé. — Soit le rectangle évidé *fig.* 8. En appliquant les formules du n° 17, et en remarquant que le moment d'inertie est égal à la différence des deux moments d'inertie de la partie pleine et de la partie évidée, on a :

$$Ix = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12};$$

$$Iy = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12} = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12}.$$

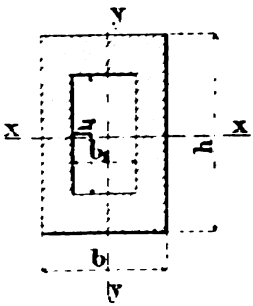


Fig. 8.

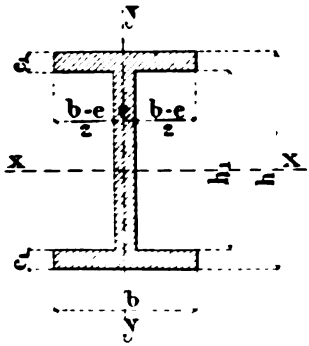


Fig. 9.

19. Pièce en forme de double T. — Soit la section *fig.* 9. En appliquant la formule du rectangle évidé, on a :

$$Ix = \frac{bh^3 - (b - e)h_1^3}{12};$$

$$Iy = \frac{hb^3 - (b^3 - e^3)h_1}{12};$$

ou bien encore en simplifiant :

$$Ix = \frac{1}{12}(bh^3 - h_1^3) + eh_1^3;$$

$$Iy = \frac{1}{12}(2e_1b^3 + h_1e^3).$$

Digitized by Google

20. Rectangle par rapport à l'une des bases. — Soit par rapport à la base AB (*fig.* 10).

Pour une bande dy, on a :

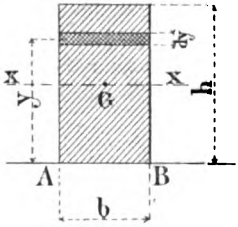


Fig. 10.

$$I_{AB} = by^2dy.$$

Pour tout le rectangle :

$$I_{AB} = \int_0^h by^2dy = b\int_0^h y^2dy$$
$$= \frac{b}{3}(h)^3 = \frac{bh^3}{3}.$$

On aurait obtenu le même résultat en se servant de la formule (4) du n° 12 :

$$I_{AB} = Ix + \Omega\frac{h^2}{4}$$
$$= \frac{bh^3}{12} + bh\frac{h^2}{4}$$
$$= \frac{bh^3}{3}.$$

21. Rectangle par rapport à une droite quelconque parallèle à l'une des bases. — Le moment d'inertie du rectangle ABDC (*fig.* 11), par rapport à MN, est égal à la différence du moment d'inertie du rectangle total ABFE et du moment d'inertie du rectangle CDFE; on peut donc écrire immédiatement d'après le n° 20 :

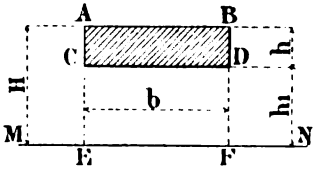


Fig. 11.

$$I_{MN} = \frac{1}{3}bH^3 - \frac{1}{3}bh_1^3$$
$$= \frac{1}{3}b(H^3 - h_1^3).$$

Digitized by Google

22. Triangle par rapport à l'une de ses bases. — Soit le triangle ABC (*fig.* 12) pour lequel on veut chercher le moment d'inertie par rapport à la base AB.

Soient une tranche *abcd* parallèle à la base AB et de hauteur *dy*; et *y* la distance du centre de gravité de cette tranche à AB.

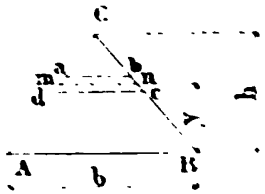


Fig. 12

La surface *abcd* est un trapèze; elle a pour valeur $\omega = mn \times dy$; mais, comme $mn = \frac{b\,h - y}{h}$ et $\omega = \frac{b\,h - y}{h}\,dy$, le moment d'inertie de cette tranche est :

$$I_{AB} = \frac{b\,h - y\,dy}{h}\,y^2.$$

Le moment d'inertie total sera alors :

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \int_0^h \frac{b\,h - y}{h}\,y^2 dy \\ &= b\int_0^h \left(y^2 dy - \frac{y^3 dy}{h}\right) \\ &= b\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4h}\right) \\ &= \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

23. Section composée possédant deux axes de symétrie. - Soit la section (*fig.* 13); le moment d'inertie, par rapport à l'axe GG_1 passant par le centre de gravité, a pour valeur, en appliquant la formule du n° 19 :

$$I_{GG_1} = \frac{1}{12}\left[b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3) + b_2(h_2^3 - h_3^3) + b_3 h^3\right].$$

Digitized by Google

24. Section ne possédant qu'un axe de symétrie. — Soit la section (*fig.* 14), qui ne possède que l'axe vertical comme axe de symétrie. Si l'on veut déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de gravité, on cherchera d'abord ce point, par les méthodes qui sont données page 82, soit graphiquement, soit par le calcul.

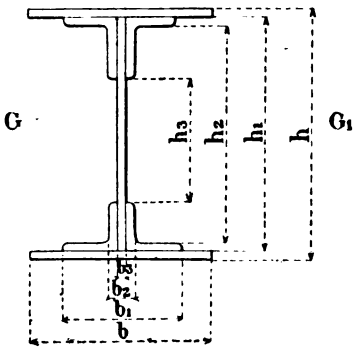


Fig. 13.

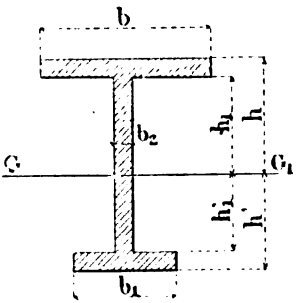


Fig. 14.

Cet axe tracé, les distances des différents points de la section à ce même axe sont connues et le moment d'inertie a pour valeur, en appliquant la formule du n° 20 :

$$I_{GG_1} = \frac{1}{3}\left[b(h^3 - h_1^3) + b_1(h'^3 - h'^3_1) + b_2(h_1^3 + h'^3_1)\right].$$

Application du n° 24. — Les dimensions de la section sont :

$$b = 0{,}20 \qquad h = 0{,}10 \qquad h_1 = 0{,}085$$
$$b_1 = 0{,}10 \qquad h' = 0{,}175 \qquad h'_1 = 0{,}165$$
$$b_2 = 0{,}01$$

Le moment d'inertie a pour valeur :

$$I_{GG_1} = \frac{1}{3}\left[0{,}20\left(\overline{0{,}10}^3 - \overline{0{,}085}^3\right) + 0{,}10\left(\overline{0{,}175}^3 - \overline{0{,}165}^3\right) + 0{,}01\left(\overline{0{,}085}^3 + \overline{0{,}165}^3\right)\right]$$
$$= 0{,}000\ 071\ 654.$$

Digitized by Google

§ 5. — DÉTERMINATION DES SECTIONS A DONNER AUX PIÈCES PRISMATIQUES SOUMISES A L'ACTION DES FORCES EXTÉRIEURES

On a déterminé (§ 2) les différents efforts qui agissent dans une pièce soumise à l'action de forces extérieures. On trouvera ci-après le calcul de cette pièce soumise à un seul de ces efforts.

25. Pièces tendues. — Soit N l'effort d'extension appliqué au centre de gravité de la section considérée dont l'aire est Ω.

Cet effort est normal et se répartit uniformément dans toute la section.

La force élastique de la matière qui lui fait équilibre est par unité de surface : $\frac{N}{\Omega}$, et si R est la limite pratique adoptée pour le travail de cette matière à l'extension, on a la relation :

$$R \geq \frac{N}{\Omega}.$$

Cette formule permet, connaissant R, de déterminer la section Ω qu'il faut donner à la pièce; elle a pour valeur :

$$\Omega \geq \frac{N}{R}.$$

La pièce, soumise à l'effort d'extension, s'allonge, et l'allongement Δ par unité de longueur est à la section considérée :

$$\Delta = \frac{N}{E\Omega}.$$

E étant le *coefficient d'élasticité* de la matière à l'extension.

Pour une longueur l de la pièce, l'allongement total est de :

$$\Delta l = \frac{Nl}{E\Omega}.$$

Digitized by Google

Exemple. — Un boulon en fer soumis à un effort de tension de 6.000 kilogrammes doit avoir pour section, en prenant pour R : 6 kilogrammes par millimètre carré,

$$\Omega = \frac{6000^k}{6} = 1000 \text{ millimètres carrés},$$

c'est-à-dire un diamètre d'au moins $35^{mm},6$.

Si le boulon a 1 mètre de longueur, l'allongement total est, en prenant pour E = 20.000 par millimètre carré :

$$\Delta l = \frac{6000^k \times 1000^{mm}}{20000 \times 1000^{mm^2}} = 0^{mm},3.$$

26. Pièces comprimées de faible longueur. — Pour les pièces dont le rapport de la longueur à la plus petite dimension transversale ne dépasse pas 12, on peut appliquer la formule donnée pour l'extension, mais en prenant pour R la limite pratique adoptée pour le travail de la pièce à la compression.

On a donc encore :

$$R_c \geqq -\frac{N}{\Omega}.$$

On a mis le signe — pour distinguer la compression de la tension.

Au lieu d'avoir un allongement de la matière, il se produit un raccourcissement qui est, par unité de longueur :

$$\Delta = -\frac{N}{E\Omega},$$

et pour une longueur l :

$$\Delta l = -\frac{Nl}{E\Omega},$$

E étant le coefficient d'élasticité à la compression.

27. Pièces comprimées de grande longueur. — Lorsque le rapport de la longueur à la plus petite dimension transversale dépasse 12, la formule générale de la compression n'est

Digitized by Google

plus applicable, car la pièce se déformerait dans le sens longitudinal et se romprait par flexion.

Formule d'Euler. — Euler a trouvé que la charge de rupture des pièces soumises à un effort de compression est donnée par la formule :

$$P = m \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

dans laquelle :

P est la charge de rupture ;
E, le coefficient d'élasticité de la matière composant la pièce ;
I, le moment d'inertie minimum de la section transversale ;
L, la longueur libre de la pièce ;
π, le rapport de la circonférence au diamètre ;
m, un coefficient qui dépend du mode d'attache des extrémités de la pièce.

Le coefficient m a pour valeur :

$m = 1$, extrémités libres, mais conservées dans la direction de l'effort ;
$m = 4$, extrémités encastrées ;
$m = 2$, une extrémité encastrée, l'autre libre.

Dans les applications, la charge de rupture est remplacée par la charge qui agit sur la pièce et on peut alors déterminer le moment d'inertie minimum qu'il faut donner à la section ; si, au contraire, on se donne la section et par suite le moment d'inertie, on peut rechercher la charge maxima que peut porter la pièce.

Il y a lieu de remarquer que les formules précédentes sont indépendantes de l'aire de la section ; aussi sont-elles peu employées.

Formule de Rankine. — Cette formule, qui est très usitée, s'applique à une pièce de section quelconque. Elle est demi-empirique, et a pour expression :

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + a\frac{L^2}{I}\Omega\right).$$

Digitized by Google

Dans cette formule :

P est la charge qui agit sur la pièce ;
Ω, sa section transversale ;
L, la longueur libre ;
I, le moment d'inertie minimum ;
a, un coefficient ;
R, le travail admissible de la matière.

Si l'on remplace $\frac{P}{\Omega}$ par R′, qui est le travail par compression d'une pièce de faible longueur ou *compression simple*, la formule de Rankine peut se mettre sous la forme suivante :

$$R = R'\left[1 + a\frac{L^2}{I}\Omega\right].$$

dans laquelle $\left(1 + a\frac{L^2}{I}\Omega\right)$ est un coefficient qui dépend de la forme de la pièce, et R le travail total (compression simple et flexion par compression). Ce travail total doit être au plus égal à la limite pratique admise pour la matière considérée.

On prend généralement pour a et pour R les nombres suivants :

DÉSIGNATION DES MATÉRIAUX	a	R millimètres carrés
		kilogrammes
Fer	0,0001	7,50
Acier doux	0,0001	10,00
Fonte	0,0001	15,00
Bois	0,0008	0,70

Le règlement ministériel des Travaux publics du 29 août 1891 (Voir p. 595) prescrit comme valeurs de R :

6,5 kilogrammes par millimètre carré pour le fer et $8^{kg},5$ pour l'acier, pour les pièces alternativement tendues et comprimées; mais il est muet pour les pièces toujours

Digitized by Google

comprimées. Aussi emploie-t-on dans ce dernier cas la valeur-limite adoptée pour le métal (Voir p. 610).

Exemple. — *Une pièce en acier doux de 3 mètres de longueur, ayant les dimensions de la figure 15, est soumise à une compression de 1.200 kilogrammes. Vérifier si le travail total (compression et flexion par compression) ne dépasse pas la limite de 8 kilogrammes par millimètre carré.*

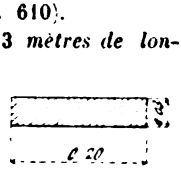


Fig. 15.

La section Ω est de : $200 \times 30 = 6.000$ millimètres carrés.

Le travail à la compression simple est de :

$$R'_{mm^2} = \frac{1.200}{6.000} = 0^{kg},2.$$

Le coefficient de la formule de Rankine donne, pour

$$I_{min} = \frac{1}{12} \times 0,2 \times \overline{0,03}^3 = 0,00000045,$$

$$1 + a\frac{L^2}{I}\Omega = 1 + 0,0001\,\frac{\overline{3}^2}{0,00000045}\,0^{m2},006 = 13.$$

Le travail total de la pièce est de :

$$R = 0^{kg},2 \times 13 = 2^{kg},6.$$

La section de la pièce est donc admissible, puisque son travail est inférieur à la limite prescrite de 8 kilogrammes par millimètre carré.

28. Flexion. — Il a été dit (n° 6) que la flexion d'une pièce prismatique est due à un couple situé dans un plan passant par l'axe longitudinal et ayant son axe dans une section perpendiculaire à cet axe longitudinal, et que le moment du couple au centre de gravité de la section considérée est le *moment fléchissant*.

On suppose que la pièce possède un plan de symétrie qui renferme alors le *couple de flexion*.

En désignant par I_x et I_y (*fig.* 16) les axes principaux de la section, ces deux axes étant perpendiculaires par définition,

Digitized by Google

l'axe du couple de flexion se confond avec I_x, et la section sollicitée par ce couple tourne autour de cet axe qui est l'*axe neutre*.

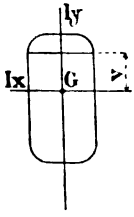


Fig. 16.

Le plan passant par I_y, ou plan de symétrie, s'appelle aussi *plan de flexion*.

Ce plan de flexion restant généralement invariable dans toute la longueur de la pièce, on le prend pour plan de projection (c'est le cas de la flexion plane); les axes neutres de toutes les sections se projettent donc suivant les différents points de l'axe longitudinal.

Formule fondamentale. — Si, dans une section donnée, v est la distance d'une fibre quelconque à l'axe neutre;

M, le moment fléchissant;

I, le moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe neutre;

Le travail R de cette fibre par unité de surface est donné par la formule :

$$R = \pm \frac{Mv}{I}.$$

On a mis le double signe parce que R peut être le travail à la tension ou à la compression, suivant que les fibres considérées sont tendues ou comprimées.

Soit SS (*fig.* 17) la trace sur le plan de flexion de la section primitive; après la flexion, elle deviendra S'S', par exemple.

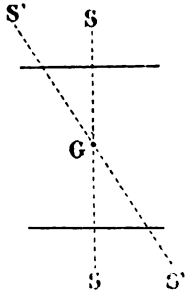


Fig. 17.

On voit donc que les fibres supérieures, c'est-à-dire celles situées au-dessus de l'axe neutre projeté en G, se sont raccourcies, tandis que les fibres inférieures se sont allongées.

Dans le cas présent, les fibres supérieures sont comprimées et les fibres inférieures tendues. Si le moment de flexion change de signe, le résultat est inverse.

D'autre part, la formule fondamentale peut être considérée

Digitized by Google

comme l'équation d'une ligne droite passant par le point G dans laquelle R et v sont les variables, M et I des constantes.

Si l'on convient :

1° De donner à v des valeurs positives lorsque les fibres sont situées au-dessus de l'axe neutre, et, inversement, des valeurs négatives lorsque ces fibres sont situées au-dessous ;

2° D'affecter au moment fléchissant une valeur positive lorsque le sens du couple est celui de la marche des aiguilles d'une montre et une valeur négative dans le cas contraire ;

La formule générale de flexion seule peut s'exprimer par la relation :

$$R = -\frac{Mv}{I}.$$

On a alors :

Pour M positif...	v positif...	compression.
	v négatif..	tension.
Pour M négatif..	v positif...	tension.
	v négatif..	compression.

La formule fait également ressortir que :

Pour l'axe neutre où $v = 0$, le travail est nul ;

Pour deux fibres également distantes de l'axe neutre, le travail est le même en valeur absolue ;

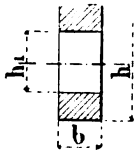
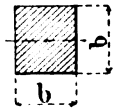
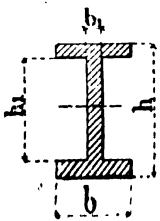
Enfin, pour les fibres extrêmes où v est maximum, le travail est maximum.

29. Moments de résistance. — La formule de flexion peut également être exprimée, en valeur absolue, par la suivante :

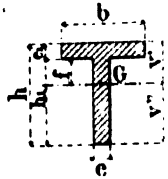
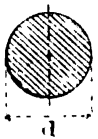
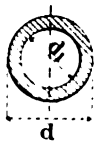
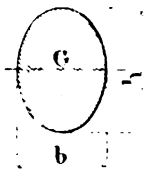
$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}.$$

Le rapport $\frac{I}{v}$ s'appelle le *moment de résistance* de la section par unité du travail R, qui est le travail admissible de la matière et dont la valeur est *la même* pour la compression et la tension.

Digitized by Google

SECTIONS	MOMENTS D'INERTIE I	VALEURS DE v	MOMENT DE RÉSISTANCE
Rectangle	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{6}$
Rectangle évidé 	$\frac{b}{12}(h^3 - h_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}$
Carré 	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b^3}{6}$
Double té 	$\frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1 h_1^3}{6h}$

Digitized by Google

Simple té 	$\frac{1}{3}\left[b\left(v'^3 - f^3\right) + e\left(f^3 + v''^3\right)\right]$	$v' = \frac{be_1^2 + h_1 e(h_1 + 2e_1)}{2(be_1 + h_1 e)}$ $v'' = h - v'$	$\frac{1}{v'}$ $\frac{1}{v''}$
Cercle 	$\frac{\pi}{64} d^4 = 0{,}0491 d^4$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} d^3$
Couronne 	$\frac{\pi}{64}\left(d^4 - d_1^4\right) = 0{,}0491\left(d^4 - d_1^4\right)$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$
Ellipse 	$\frac{\pi}{64} bh^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} bh^2$

Digitized by Google

Il résulte de cette formule que, pour un travail admissible R, le *moment résistant* a pour valeur $R \frac{I}{v}$, et est égal au moment fléchissant M.

Lorsque la section est symétrique par rapport à l'axe neutre, v est alors égal à la moitié de la hauteur h, soit $v = \frac{h}{2}$, et le moment de résistance devient : $\frac{I}{\frac{h}{2}}$.

Si la section n'est pas symétrique par rapport à l'axe neutre, soient v' et v'' les distances des fibres supérieure et inférieure à cet axe pour lesquelles $v' + v'' = h$, on a comme moments de résistance : $\frac{I}{v'}$ et $\frac{I}{v''}$.

Le tableau (pages 20 et 21) donne les valeurs du moment d'inertie et du moment de résistance pour les sections le plus usitées.

30. **Détermination de la section d'une pièce fléchie.** — Connaissant le moment fléchissant et le travail admissible de la matière, on peut déterminer le moment de résistance nécessaire.

On remarque que la recherche de la section comporte une infinité de solutions, puisque le facteur I contient au moins deux variables, et il y a, par suite, indétermination.

On fait cesser cette indétermination en ne laissant subsister qu'une des variables.

Dans la pratique, on a souvent affaire à la forme à double **T**, qui est la plus économique, mais qui comporte plusieurs variables (largeur, hauteur, épaisseurs de l'âme et des ailes).

Si le double **T** est un fer du commerce, les albums des forges donnent, en regard des profils, la valeur du moment de résistance, et il suffit, connaissant cette valeur pour la section à déterminer, de rechercher dans ces albums quel est le profil qui convient le mieux.

Au contraire, si le double **T** est en tôle et cornières, il faut procéder par tâtonnements.

Digitized by Google

Toutefois les recherches sont rendues faciles par l'emploi des tables[1] donnant les moments d'inertie.

Généralement, certaines dimensions de la pièce sont limitées par des considérations de construction, et il s'agit alors de déterminer quelle est la section dont *l'aire est minima et qui donne le moment de résistance nécessaire.*

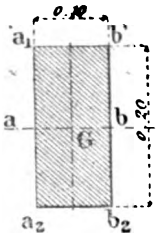


Fig. 18.

31. Exemples relatifs aux pièces fléchies. — Vérification de la section. — *Une pièce rectangulaire en bois de* 0m,10 *de largeur et* 0m,20 *de hauteur est soumise à un moment fléchissant maximum de* 330 *mètres-kilogrammes agissant dans le plan de symétrie vertical. Vérifier si les dimensions de cette pièce sont suffisantes, sachant que le travail admissible du bois est de* 60 *kilogrammes par centimètre carré (fig.* 18).

Cette section donne :

$$I = \frac{1}{12}\, 0{,}1 \times \overline{0{,}2}^3 = 0{,}000066.$$

Le travail maximum se produit dans les fibres extrêmes a_1b' et a_2b_2, pour lesquelles $v = 0{,}10$.

Le travail par mètre carré ressortit donc à :

$$R = \frac{330 \times 0{,}1}{0{,}000066} = 500.000 \text{ kilogrammes,}$$

soit : 50 kilogrammes par centimètre carré.

La section est donc suffisante.

Recherche de la section. — *Une pièce en fer, en forme de double* **T**, *est soumise à un moment fléchissant maximum de* 1.300 *mètres-kilogrammes. Déterminer la section la plus écono-*

[1] Une des meilleures publications de ce genre est celle qui a été faite à la Compagnie de l'Est, sous la direction de M. Valat, ingénieur principal.

Digitized by Google

mique en prenant comme travail admissible : $R = 6^{kg},5$ par millimètre carré.

Premier cas. — *La pièce est un fer du commerce.*

Le moment de résistance nécessaire est :

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R} = \frac{1.300}{6^{kg},5} = 200.$$

En cherchant dans les albums, on trouve le profil :

$$200 \times 70 \times 8 \text{ (\textit{fig.} 19)},$$

dont le moment de résistance est $\frac{I}{v} = 214$.

Le travail maximum de ce profil ressortit alors à :

$$R_{mm^2} = \frac{1}{10^6} \frac{M}{\frac{I}{v}} = \frac{1.300}{214} = 6^{kg},07.$$

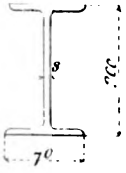


Fig. 19.

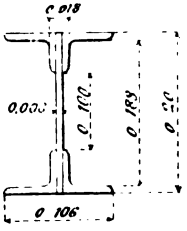


Fig. 20.

Deuxième cas. — *La pièce est en tôle et cornières et a* $0^m,200$ *de hauteur.*

Après quelques tâtonnements, on peut la composer d'une âme de 200 millimètres de hauteur, d'une épaisseur de 6 millimètres et de quatre cornières de $50 \times 50 \times 6$ (*fig.* 20).

En appliquant la méthode du n° 23, on a :

$$I = \frac{1}{12}\left[0,106(\overline{0,2}^3 - \overline{0,188}^3) + 0,018(\overline{0,188}^3 - \overline{0,1}^3) + 0,006 \times \overline{0,100}^3\right]$$
$$= 0,000\,020\,939$$

et

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000\,020\,939}{0,10} = 0,000\,209,$$

Digitized by Google

soit en prenant comme unité le millimètre carré :

$$\frac{I}{v} = 0{,}000209 \times 10^6 = 209.$$

La section est donc suffisante, puisque le moment de résistance nécessaire n'est que de 200.

Le travail maximum ressortit à :

$$R_{mm2} = \frac{1.300}{209} = 6^{kg},21.$$

Avec les tables des moments d'inertie, on a

I âme	200×6	=	0,000 004 000
I 4 corn.	$50 \times 50 \times 6$	=	0,000 016 939
	I total	=	0,000 020 939

c est-à-dire la même valeur que celle trouvée par le calcul.

32. Déformation des pièces fléchies. — Le problème qu'on se pose dans la déformation est de rechercher quelle est la nouvelle courbe que prend la fibre moyenne ou *ligne élastique* après cette déformation.

Ce problème est, en général, d'une grande complication, surtout lorsque la pièce n'est pas rigoureusement prismatique. Il faut, en effet, tenir compte du rayon de courbure initial.

Soient ρ_0 ce rayon de courbure en un point donné, et ρ le nouveau rayon, en ce même point, après la déformation ; on a comme relation entre ces deux rayons :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI}.$$

Lorsque la ligne élastique est primitivement droite, cette formule devient :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

Si l'on prend comme axe des x la ligne élastique elle-même avant sa déformation, comme axe des y une perpendiculaire à cette ligne et comme origine son extrémité de gauche, par

Digitized by Google

exemple, la formule ci-dessus peut être mise sous la forme :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

M étant une fonction de x.

En intégrant une première fois, on a (C = constante) :

$$EI \frac{dy}{dx} = \int (M) + C,$$

$\frac{dy}{dx}$ est la tangente de l'angle que fait la tangente à la ligne élastique déformée au point considéré avec l'axe des x ou la ligne élastique primitive[1].

En intégrant une deuxième fois, on obtient l'équation de la ligne élastique déformée :

$$EIy = \int \left(\int M + C \right) + C'.$$

Connaissant cette équation, on peut déterminer les valeurs de y qui représentent les flèches prises par la pièce.

Remarque. — Dans le cas particulier où $\frac{M}{I}$ est constant dans toute l'étendue de la pièce, ρ devient également constant, et la ligne élastique affecte la forme d'un arc de cercle dont le rayon a pour valeur :

$$\rho = \frac{EI}{M}.$$

33. Effort tranchant. — Ainsi qu'il a été dit, l'effort tranchant agit dans le plan de la section ; mais cet effort ne se répartit pas uniformément dans toute cette section comme l'effort normal.

Le travail par unité de surface est nul sur les fibres extrêmes, et il prend généralement sa plus grande valeur à l'axe neutre.

M. Collignon a établi une formule qui donne approximativement le travail par unité de surface. Elle est interprétée ci-après :

[1] V[illegible]), p. 170.

Digitized by Google

Soit une section transversale de surface Ω pour laquelle on veut chercher le travail dû à l'effort tranchant sur une parallèle $mn = z_1$ à l'axe neutre $AA' = z_0$, située à la distance y' de cet axe (*fig.* 21).

Si I est le moment d'inertie de la surface totale par rapport à AA', et T l'effort tranchant agissant dans la section, le travail sur la parallèle *mn* est donné par la formule :

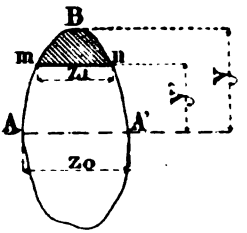


Fig. 21.

$$R = \frac{T}{I} \times \frac{1}{z_1} \overset{y}{\underset{y'}{m}}.$$

dans laquelle $\overset{y}{\underset{y'}{m}}$ représente le *moment statique* par rapport à l'axe neutre de la portion de surface comprise entre les deux ordonnées y et y', soit la portion hachurée.

Cette formule indique que, pour $y' = y$, c'est-à-dire pour la fibre extrême B, le travail est nul puisque le *moment statique* est égal à zéro.

En général, le travail maximum a lieu pour : $y' = 0$ et $z_1 = z_0$; la formule devient alors :

$$R_{max} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{z_0} \overset{y}{\underset{0}{m}}.$$

$\overset{y}{\underset{0}{m}}$ étant le moment statique, par rapport à l'axe neutre, de toute la partie située au-dessus ou au-dessous de cet axe.

C'est la formule dont on se sert généralement; mais, lorsque la section possède une partie étranglée, il y a lieu de rechercher le maximum par la formule générale, qui est la suivante :

$$R = \frac{T}{I} \times \frac{1}{z_1} \int_{y'}^{y} y dy z,$$

y étant la plus grande valeur que puisse prendre y', et z la largeur de la section considérée comme variable.

Dans le numéro suivant, quelques exemples sont donnés pour l'application de ces formules.

Digitized by Google

34. Cas d'un rectangle plein (*fig.* 22). — Le travail dans la parallèle mn est :

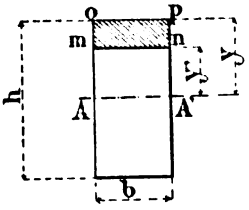


Fig. 22.

$$R_{mn} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{b} \overset{y}{\underset{y'}{m}};$$

$\overset{y}{\underset{y'}{m}}$, qui est le moment statique, par rapport à AA', de la partie $mnpo$, a pour valeur :

$$\overset{y}{\underset{y'}{m}} = b(y - y')\left(\frac{y + y'}{2}\right) = \frac{b}{2}(y^2 - y'^2).$$

Le moment d'inertie de toute la section par rapport à AA' est :

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} bh^3.$$

Le travail R devient alors :

$$R_{mn} = \frac{T}{\frac{bh^3}{12}} \times \frac{1}{b} \times \frac{b}{2}(y^2 - y'^2) = \frac{6T(y^2 - y'^2)}{bh^3}.$$

Or :

$$y = \frac{h}{2}. \qquad \text{d'où} \qquad R_{mn} = \frac{6T\left(\frac{h^2}{4} - y'^2\right)}{bh^3}.$$

Le travail dans la section est maximum pour $y' = 0$; il a pour valeur :

$$R_{AA'} = \frac{6T\frac{h^2}{4}}{bh^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T}{\Omega}.$$

35. Cas d'une pièce en forme de double T (*fig.* 23). — Le travail dans une parallèle mn est :

$$R_{mn} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{b} \overset{\frac{h}{2}}{\underset{y'}{m}};$$

Digitized by Google

$\overset{\frac{h}{2}}{\underset{y'}{m}}$, qui est le moment statique, par rapport à l'axe neutre, de la partie hachurée, a pour valeur :

$$\overset{\frac{h}{2}}{\underset{y'}{m}} = b'\left(\frac{h'}{2} - y'\right) \times \left(\frac{\frac{h'}{2} + y'}{2}\right) + b\left(\frac{h}{2} - \frac{h'}{2}\right) \times \left(\frac{\frac{h}{2} + \frac{h'}{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{b'(h'^2 - 4y'^2) + b(h^2 - h'^2)}{8};$$

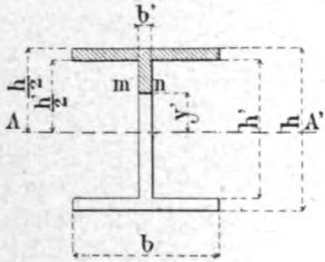


Fig. 23.

d'autre part, le moment d'inertie de toute la section par rapport à AA' est :

$$I_{AA'} = \frac{1}{12}\left[b(h^3 - h'^3) + b'h'^3\right].$$

En substituant, on obtient :

$$R_{mn} = \frac{T}{\frac{1}{12}\left[b(h^3 - h'^3) + b'h'^3\right]} \times \frac{1}{b'}\left[\frac{b'(h'^2 - 4y'^2) + b(h^2 - h'^2)}{8}\right].$$

Le maximum se produit encore pour $y' = 0$, et la valeur du travail devient après simplification :

$$R_{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{b'}\left(\frac{b'h'^2 + bh^2 - bh'^2}{bh^3 - bh'^3 + b'h'^3}\right).$$

En général, l'épaisseur b' de l'âme est relativement faible

Digitized by Google

par rapport à la hauteur de la pièce et à sa largeur b; dans ces conditions, les moments d'inertie et statique de cette âme peuvent être négligés, et la formule qui donne le travail maximum devient :

$$R_{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{b'}\frac{h^2 - h'^2}{h^3 - h'^3}.$$

En remplaçant $\frac{h^2 - h'^2}{h^3 - h'^3}$ par l'expression très approchée :

$$\frac{h^2 - hh'}{h(h^2 - hh')},$$

la valeur du travail maximum qui en résulte est :

$$R_{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{b'} \times \frac{1}{h}.$$

Cette formule exprime que le travail est le même que celui produit dans un rectangle plein ayant comme dimensions b' et h, c'est-à-dire correspondant à l'âme seulement de la section du double **T**.

36. Remarque. — L'effort tranchant s'appelle également *cisaillement transversal* et, d'après les considérations qui précèdent, le travail dû à cet effort est supérieur à celui qui résulterait de l'effort tranchant uniformément réparti soit sur toute la surface, soit sur l'âme seulement dans le cas de la forme en double **T**.

Le coefficient qu'il faudrait lui affecter varie suivant les sections considérées.

Dans la pratique, on admet que le travail limite au cisaillement transversal est égal aux $\frac{4}{5}$ de celui à l'extension.

On peut donc écrire, si R_c est le travail limite au cisaillement et R_e celui à l'extension :

$$R_c = \frac{T}{\Omega} = \frac{4}{5} R_e.$$

Digitized by Google

Cette formule montre que la section nécessaire se détermine par la relation usitée :

$$\Omega = \frac{5}{4}\frac{T}{R_e}.$$

37. Glissement longitudinal ou cisaillement longitudinal. — Dans toute pièce fléchie, les différentes couches de fibres ne sont pas sollicitées de la même manière, puisque les efforts dans ces fibres sont proportionnels à leurs distances à la couche neutre. Il y a donc tendance au glissement des unes par rapport aux autres.

Le glissement d'une couche n'est empêché que par une action contraire dans la couche voisine ; cette action moléculaire constitue la résistance au glissement.

On a démontré que l'effort de glissement longitudinal *ou cisaillement longitudinal* a la même valeur absolue que celui du cisaillement transversal.

Le travail par unité de surface peut donc s'exprimer par la formule déjà connue :

$$R_{c.l} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{z_1}\frac{y}{y'}m.$$

Ce travail est en général également maximum pour l'axe neutre et, si e est la largeur de la section sur cet axe, le travail maximum devient :

$$(a) \qquad R_{c.l} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{e}\frac{y}{0}m.$$

Tout ce qui a été dit pour l'effort tranchant s'applique au cisaillement longitudinal.

Lorsqu'il s'agit de calculer le travail des rivets qui attachent les différents éléments d'une pièce composée, cette formule doit se mettre sous une autre forme.

Si dx est la distance entre deux sections transversales de la pièce, e la largeur de la section, R le travail à la couche considérée, et S l'effort de glissement longitudinal dans la

Digitized by Google

même couche, on peut écrire :

$$R_{c.l} = \frac{S}{dx \cdot e}$$

et, en remplaçant $R_{c.l}$ par sa nouvelle valeur dans la formule (a) :

$$\frac{S}{dx \cdot e} = \frac{T}{I} \times \frac{1}{e} m'.$$

Dans cette expression, m' est le moment statique par rapport à l'axe neutre de la section située au-dessus de la couche considérée.

En simplifiant, on obtient la formule suivante, qui est très usitée et qui donne l'*effort du cisaillement longitudinal* sur une longueur dx. :

$$(b) \qquad S = \frac{T}{I} m' dx.$$

Les formules (a) et (b) permettent de calculer le travail de l'âme d'une poutre et le travail des rivets qui attachent les cornières, les semelles, etc., sur cette âme.

38. Torsion. — Le couple de torsion agit dans le plan de la section et tend à faire tourner cette section autour de l'axe longitudinal.

Si M_t est le moment du couple de torsion ;

I_p, le moment d'inertie polaire de la section ;

v, la distance à l'axe longitudinal d'un élément de cette section ;

R_t, le travail dû à la torsion ;

On a la formule :

$$R_t = \frac{M_t v}{I_p}.$$

Cette expression est analogue à celle de la flexion et, comme pour cet effort, le travail maximum se produit pour v maximum, c'est-à-dire dans l'élément le plus éloigné de l'axe longitudinal.

Digitized by Google

On prend, en général, comme limite de travail, les 4 5 de la plus petite des deux limites de traction et de compression.

39. Composition des différents efforts. — On a étudié séparément les efforts dus aux forces extérieures; mais on admet que, si plusieurs efforts agissent en même temps, le travail total est la résultante géométrique des travaux partiels dus à chaque effort considéré isolément, et qu'il en est de même de la déformation.

Les efforts, en effet, n'agissant pas tous dans le même plan, on peut les classer dans deux catégories différentes, savoir :

1° Ceux qui se trouvent dans un plan normal à la section considérée : *effort normal, moment fléchissant, effort de glissement longitudinal.*

2° Ceux qui agissent dans le plan de la section : *effort tranchant* ou *cisaillement transversal, moment de torsion.*

Si l'on a affaire à deux ou plusieurs efforts de catégories différentes, il faut déterminer le travail pour chacun d'eux et rechercher ensuite la résultante géométrique des différents travaux partiels, en tenant compte de la position des plans qui renferment les efforts.

Ainsi, si R_f est le travail à la flexion et R_t le travail à la torsion, on admet que le travail résultant a pour valeur : $R = \sqrt{R_f^2 + R_t^2}$.

Si, au contraire, les efforts sont de même catégorie, il suffit de faire leur somme algébrique en tenant compte de leur signe respectif (*positif pour les tensions et négatif pour les compressions*).

Ainsi, par exemple, $R_n = \frac{N}{\Omega}$ étant le travail dû à l'effort normal et $R_f = \frac{M}{\frac{I}{v}}$ le travail dû à la flexion, le travail résultant est :

$$R = \pm \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M}{\frac{I}{v}}.$$

Digitized by Google

Si N est une compression et $R_f = \frac{M}{\frac{I}{v}}$ une tension :

$$R = -\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{\frac{I}{v}}.$$

On voit donc qu'il suffit d'affecter à chaque travail le signe qui lui est propre.

L'effort tranchant ne donne lieu qu'à un travail minime par rapport à celui dû au moment fléchissant ; aussi le néglige-t-on dans les pièces prismatiques. Il ne sert qu'à vérifier la section de l'âme.

Dans les poutres à treillis, au contraire, l'effort tranchant est entièrement supporté par les barres de treillis, à l'exclusion des membrures.

40. *Valeur des constantes pour les matériaux usuels par millimètre carré de section.*

DÉSIGNATION	COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ E	CHARGE A LA LIMITE D'ÉLASTICITÉ		CHARGE A LA RUPTURE		CHARGES PRATIQUES	
		tension	compression	tension	compres.	tension	compression
		kilog.	kilog.	kilog.	kilog.	kilog.	kilog.
Fer laminé (sens longitudinal).....	20.000	16,5	16,5	36	29	6 à 8	6 à 8
Acier dur.....	22.000	40,0	40,0	65	79	8 à 12	8 à 12
Acier moyen....	id.	34,0	34,0	55	67	id.	id.
Acier doux.....	id.	28,0	28,0	45	55	id.	id.
Fonte.....	10.000	6,0	16,0	13	78	2 à 3	6 à 8
Pin (sens longitud.).	1.100	2,7	1,2	9	4,5	0,4 à 0,6	0,4 à 0,6
Sapin.....	1.200	id.	id.	8	4,0	id.	id.
Chêne.....	id.	id.	id.	10	5,0	id.	0,6 à 0,8

Digitized by Google

CHAPITRE II

CALCULS GRAPHIQUES

---

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

41. La statique graphique permet, par des moyens géométriques, de déterminer les conditions d'équilibre d'un système de forces.

A cet effet, une force quelconque est représentée par sa *ligne d'action* et par son *intensité*.

La ligne d'action est une droite indéfinie qui donne la position de la force sur le plan et, par suite, sa direction. Le sens de cette direction est indiqué par une flèche.

L'intensité de la force est représentée par une longueur à une échelle convenue; par exemple, 2 millimètres par tonne. Ce qui veut dire qu'une force de 20 tonnes est représentée par une longueur de $20 \times 2 = 40$ millimètres.

Avant d'aborder l'étude de l'équilibre des forces, il est nécessaire de traiter la question des *calculs graphiques*, qui s'appliquent aux cas où les éléments en jeu interviennent par leurs mesures seules, sans tenir compte de leur direction. Ces calculs graphiques ne sont, en somme, que de l'*arithmétique graphique*.

§ 2. — OPÉRATIONS SUR LES LIGNES

42. Addition. — Pour avoir la somme de plusieurs lignes, il suffit de les porter bout à bout sur une droite.

Digitized by Google

43. Soustraction. — Pour soustraire une ligne d'une autre, il suffit de porter la plus petite sur la plus grande et d'évaluer ainsi leur différence.

44. Multiplication de deux lignes. — Pour obtenir le produit de deux lignes de longueurs a et b, on porte, sur une droite indéfinie ox, une longueur oC égale à l'unité choisie et oA $= a$ (*fig.* 24).

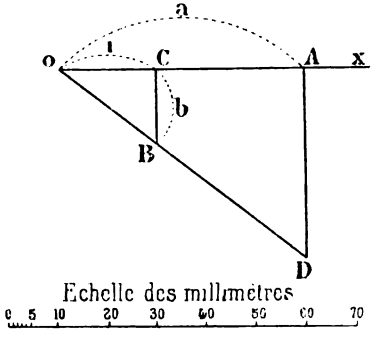


Fig. 24.

Puis, sur une perpendiculaire à ox élevée en C, on porte CB $= b$.

On joint oB qu'on prolonge ensuite jusqu'au point de rencontre D de la perpendiculaire élevée en A sur ox.

La droite AD représente le produit cherché, et sa valeur réelle est AD $\times$ unité. On a en effet, dans le triangle oAD :

$$\frac{AD}{CB} = \frac{oA}{oC} \text{ ou } \frac{AD}{b} = \frac{a}{1} \text{ ou } AD = b \times a.$$

45. Premier exemple. — On prend dans la figure 24 :

$a = 50$ millim., $b = 15$ millim., unité $= 20$ millim.

Le tracé donne : AD $= 37^{mm},5$.

Digitized by Google

Le produit a donc pour valeur :

$$AD \times \text{unité} = 37^{mm},5 \times 20 = 750 \text{ millimètres.}$$

46. Deuxième exemple. — On suppose, dans la figure 24, que les longueurs données sont des forces à l'échelle de 1 millimètre pour 5 tonnes.

Alors chaque millimètre de AD représente 5 tonnes, et, l'unité choisie ayant 20 millimètres, équivaut à une force de 20×5 T $= 100$ tonnes.

Le produit cherché a donc pour valeur :

$$AD^{mm} \times 5^{T} \times 100^{T} = 37^{mm},5 \times 5 \times 100^{T} = 18750 \text{ tonnes.}$$

On peut simplifier la détermination de la valeur du produit en recherchant directement son échelle de la manière suivante :

Les forces étant à l'échelle de 1 millimètre pour 5 tonnes et l'unité étant de 20 millimètres, soit $20 \times 5 = 100$ tonnes, le produit doit être lu à l'échelle de 1 millimètre pour $5^{T} \times 100^{T} = 500$ tonnes.

47. Multiplication de plusieurs lignes. — Pour obtenir le produit des lignes de longueurs a, b, c, d, e, on porte sur une droite indéfinie la longueur OA égale à l'unité choisie (*fig.* 25).

En A on élève une perpendiculaire à OA sur laquelle on porte à partir de A :

$$AB = b, \qquad AC = c, \qquad AD = d, \qquad \text{et} \qquad AE = e.$$

On joint le point O aux points B, D, C et E, et on prolonge les droites obtenues.

On prend $OB' = a$ et, en B', on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de OB prolongée en B_1.

On porte

$$OC' = B'B_1 = a \times b \text{ (n° 44)}$$

et en C' on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de OC en C_1.

Digitized by Google

On prend $OD' = C'C_1 = a \times b \times c$, et, en D', on élève une perpendiculaire jusqu'en D_1 à la rencontre de OD.

Finalement on porte :

$$OE' = D'D_1 = a \times b \times c \times d$$

et, en E', on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de OE en E_1.

La ligne $E'E_1 \times$ unité représente la valeur du produit des lignes données :

$$a \times b \times c \times d \times e.$$

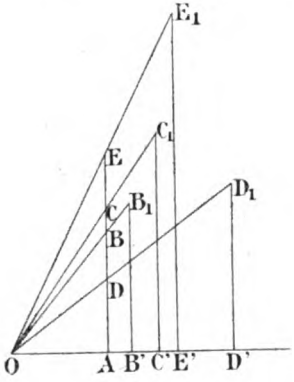


Fig. 25.

48. Division de deux lignes. — Pour trouver le quotient de deux lignes de longueur a et b, on porte sur une droite indéfinie Ox les longueurs OC = l'unité choisie et OB = b (*fig.* 26).

En B on élève une perpendiculaire à Ox sur laquelle on porte : BA = a, et on joint OA.

En C on élève également une perpendiculaire sur Ox jusqu'à la rencontre de OA en D.

La ligne $\frac{CD}{\text{unité}}$ représente la valeur du quotient cherché.

En effet $\frac{a}{DC} = \frac{b}{1}$ et $DC = \frac{a}{b}$.

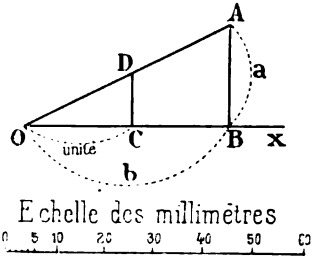


Fig. 26.

49. Exemple. — On suppose que les lignes représentent des forces à l'échelle de 1 millimètre pour 2 tonnes (*fig.* 26).

L'unité choisie ayant 20 millimètres a pour valeur

Digitized by Google

$20 \times 2 = 40$ tonnes, et l'échelle du quotient est de :

$$1 \text{ millimètre pour } \frac{2^T}{40} = \frac{1}{20} \text{ tonne.}$$

Dans l'exemple choisi, CD a pour longueur 10 millimètres; la valeur du quotient est alors de :

$$10 \times \frac{1}{20} \text{ tonne} = \frac{1}{2} \text{ tonne.}$$

En effet :

$$a = 20 \text{ millimètres, soit } 20 \times 2^T = 40 \text{ tonnes,}$$
$$b = 40 \text{ millimètres, soit } 40 \times 2^T = 80 \text{ tonnes.}$$

$$\text{Quotient} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \text{ tonne.}$$

50. Élévation aux puissances. — Pour déterminer les différentes puissances d'une ligne a, on porte sur une droite indéfinie ox la longueur oA = l'unité (*fig.* 27).

En A, on élève une perpendiculaire à ox et, du point o comme centre, on décrit une circonférence avec a comme rayon.

Cette circonférence coupe en A_1 la perpendiculaire élevée au point A.

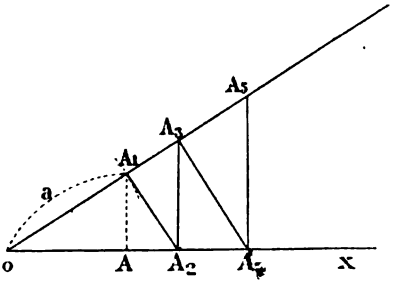


Fig. 27.

Du point A_1 on élève sur oA_1 une perpendiculaire A_1A_2 et, en A_2, une perpendiculaire A_2A_3 sur oA_2, et ainsi de suite.

On a immédiatement sur la figure les valeurs des puis-

Digitized by Google

sances de a, savoir : $oA_1 \times$ unité $= a$

$$oA_1^2 = oA_2 \times oA = oA_2 \times \text{unité} = a^2$$
$$oA_3 \times \text{unité} = a^3$$
$$oA_4 \times \text{unité} = a^4, \text{ etc.}$$

51. Extraction de la racine carrée. — Pour extraire la racine carrée d'une ligne a, on porte sur une droite la longueur OB $= a$ et OA $=$ l'unité (*fig.* 28).

Avec AB comme diamètre on décrit une demi-circonférence.

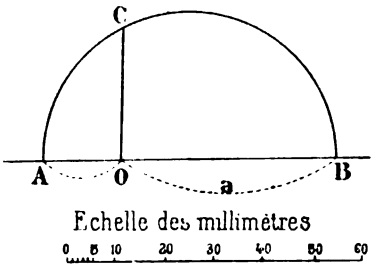


Fig. 28.

Au point O on élève une perpendiculaire sur AB qui rencontre la circonférence au point C.

$$OC^2 = OB \times AO.$$

La ligne OC divisée par la $\sqrt{\text{unité}}$ donne la valeur de la racine carrée de a.

52. Exemple. — On suppose que la ligne représente une force à l'échelle de 1 millimètre pour 1 tonne.

L'unité, ayant 16 millimètres, représente 16 tonnes, et l'échelle de la racine est de :

$$1 \text{ millimètre pour } \frac{1^T}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} \text{ tonne.}$$

Dans l'exemple choisi, OC a pour mesure $26^{mm},8$, cette ligne représente donc en tonnes : $26^T,8 \times \frac{1}{4} = 6^T,7$.

La ligne a mesure en effet 45 millimètres, soit 45 tonnes, dont la racine carrée est $6^T,7$.

53. Extraction d'une racine quelconque. — Pour résoudre ce problème, il est préférable de se servir de la table de logarithmes.

Digitized by Google

§ 3. — OPÉRATIONS SUR LES SURFACES

Pour effectuer sur les surfaces les opérations précédentes, il y a lieu de les remplacer par des lignes.

Ci-après les principaux cas qui peuvent se présenter.

54. Triangle. — Soit le triangle ABC (*fig.* 29).

On porte, sur une des bases, AD = 2 fois l'unité choisie et on joint le point D au sommet opposé B à cette base.

Par le point C on mène une parallèle à BD jusqu'à la rencontre E avec AB prolongée.

La hauteur EF du nouveau triangle AEC ainsi formé représente la surface du triangle donné ABC dont la valeur réelle est

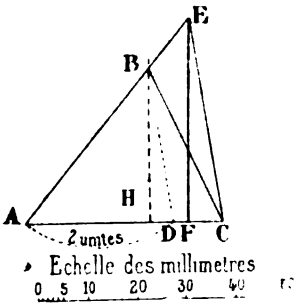


Fig. 29.

$$EF \times \text{unité}.$$

$$\text{En effet } ABC = \frac{AC \times BH}{2}$$

$$\frac{AC}{AD \text{ ou } 2 \text{ unités}} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BH},$$

d'où

$$EF \times 2 \text{ unités} = AC \times BH$$

$$EF \times \text{unité} = \frac{AC \times BH}{2}.$$

Dans la figure : 2 unités = 30 millimètres, soit pour l'unité 15 millimètres.

La hauteur EF mesure 40 millimètres.

La surface sera $40^{mm} \times 15^{mm} = 600$ millimètres carrés.

Digitized by Google

55. Il peut arriver que l'on ait des opérations à faire sur plusieurs triangles. Pour pouvoir les comparer, il est nécessaire de les réduire à une base commune choisie arbitrairement que l'on prend comme unité.

56. Parallélogramme. — Soit ABCD le parallélogramme donné (*fig.* 30).

On porte AE = l'unité, et en E on élève une perpendiculaire à AB jusqu'au point de rencontre F avec DC.

En B, on élève également une perpendiculaire sur AB, qui rencontre AF prolongée en G.

La longueur GB × unité représente l'aire du parallélogramme, puisque (n° 44)

$$GB = AB \times EF.$$

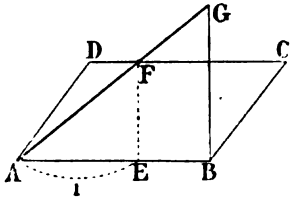


Fig. 30.

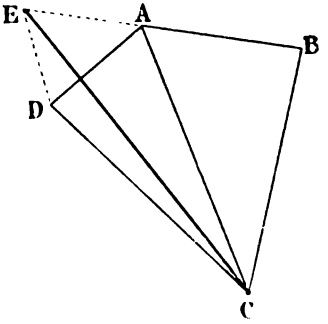


Fig. 31.

57. Quadrilatère quelconque. — Soit ABCD le quadrilatère donné (*fig.* 31).

On mène une diagonale AC, par exemple.

Par le point D on trace DE parallèle à AC jusqu'à la rencontre de AB prolongée, et on joint EC.

Le triangle ECB sera équivalent au quadrilatère donné (puisque ces deux surfaces se composent d'un triangle commun ABC et de l'un des triangles équivalents ACD ou ACE) et il n'y a plus qu'à appliquer à ce triangle la règle du n° 54.

Digitized by Google

58. Polygone quelconque. — Soit le polygone ABCDEF (*fig.* 32).

Il suffit, pour résoudre le problème, d'éliminer les différents côtés du quadrilatère, pour ne laisser qu'un triangle qui lui soit équivalent.

On joint AE, BE et CE et, par le point F, on mène une parallèle à AE jusqu'à la rencontre G de AB prolongée.

Par G on mène également une parallèle à EB jusqu'à la rencontre H de CB prolongée.

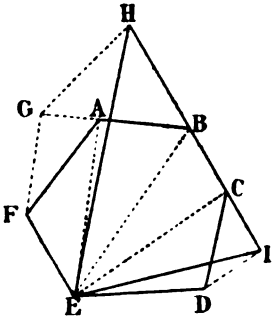


Fig. 32.

Enfin, par D on mène une parallèle à EC jusqu'à la rencontre I avec BC prolongée.

On trace EH et EI et le triangle EHI est équivalent au polygone donné.

Il ne reste donc plus qu'à appliquer la règle du n° 54.

Digitized by Google

CHAPITRE III

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES

---

§ 1. — RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES

59. Règle du parallélogramme des forces. — Deux forces appliquées en un même point d'un corps quelconque ont pour résultante la diagonale du parallélogramme qu'elles déterminent, et cette résultante passe par le point d'intersection des deux forces données.

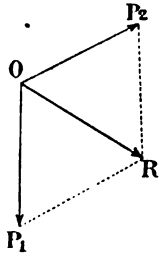


Fig. 33.

Ainsi les deux forces P_1 et P_2, appliquées au point O (*fig.* 33), ont pour résultante la force R obtenue en joignant le point O au point de rencontre des deux droites menées par les extrémités des forces, et respectivement parallèles à ces forces. Le sens de la résultante est celui qui va du point d'application au sommet opposé du parallélogramme[1].

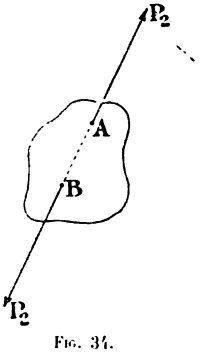


Fig. 34.

60. Équilibre de deux forces. — Pour que deux forces P_2 et P_2 appliquées en deux points différents A et B d'un corps quelconque soient en équilibre (*fig.* 34), il faut et il suffit que ces deux forces soient égales, de sens contraires et dirigées suivant la droite AB qui réunit les deux points d'application.

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 48.

Digitized by Google

Il résulte de cet énoncé qu'on peut porter le point d'application d'une force agissant sur un système invariable en un point quelconque de sa direction.

61. Action égale et contraire à la réaction. — Lorsque deux corps sont soumis à des forces quelconques et assujettis à demeurer en contact, chacun d'eux exerce sur l'autre une *action* et en éprouve une *réaction*[1].

Ces deux forces sont égales entre elles, dirigées suivant la même ligne d'action et de sens contraires.

On ne change pas l'état d'un de ces corps en supprimant l'autre, à condition que l'on adjoigne une force égale à celle qu'exerce le corps supprimé.

§ 2. — COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES EN UN MÊME POINT DANS UN PLAN

62. Composition des forces. — Soient les forces P_1, P_2, P_3 et P_4 (*fig.* 35).

Le problème peut être résolu au moyen du parallélogramme des forces en composant d'abord P_1 et P_2, pour obtenir R_1, ensuite en composant R_1 et P_3, pour avoir la résultante R_2, et ainsi de suite jusqu'à la dernière force.

On obtient finalement la force R_3, qui est la résultante cherchée.

Il est plus simple de procéder de la manière suivante :

On porte les forces en grandeur, direction et sens bout par bout, et la résultante est représentée en grandeur et en direction par la ligne qui joint les deux extrémités du polygone ainsi formé, qu'on nomme *le polygone des forces*.

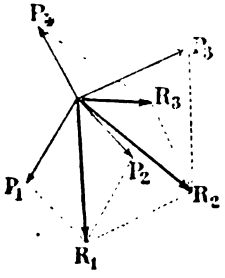


Fig. 35.

Le sens de la direction de la résultante est contraire à celui qui ferme le polygone.

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 48.

Digitized by Google

Ainsi, en reprenant l'exemple ci-dessus, on porte en grandeur, direction et sens (*fig.* 36) :

$$AB = P_1 ; \; BC = P_2 ; \; CD = P_3 \text{ et } DE = P_4.$$

En joignant les deux extrémités A et E du polygone des forces, on obtient la résultante R en grandeur et en direction.

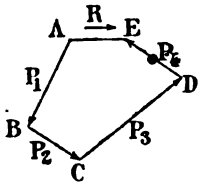


Fig. 36.

Le sens de cette résultante R est dirigé suivant la flèche de A vers E.

Remarque I. — L'ordre dans lequel on porte les forces est indifférent.

Ainsi on aurait pu porter d'abord P_1 et ensuite P_3, P_4 et P_2.

Remarque II. — Une force quelconque du polygone complet est la résultante de toutes les autres.

63. Décomposition des forces. — Une force R, donnée par sa ligne d'action, sa grandeur et le sens de sa direction, peut se décomposer en plusieurs autres appliquées au même point qu'elle.

Il suffit pour cela que le polygone des forces composantes soit fermé.

Ainsi R pourra être décomposée suivant les forces P_1, P_2, P_3 de directions quelconques qui appartiennent au polygone fermé ABCD dont R = AB est un des côtés (*fig.* 37).

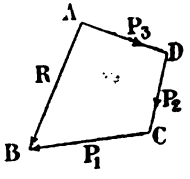


Fig. 37.

Le sens de toutes les forces est contraire à celui de R.

Remarque. — Pour résoudre le problème ci-dessus, on peut se donner :

1° Toutes les composantes, sauf une ;

2° Toutes les composantes en grandeur, direction et sens moins deux d'entre elles, mais ces dernières en direction seulement.

Ainsi, soit la résultante R à décomposer suivant quatre forces, dont deux, P_1 et P_2, sont connues, et deux autres, P_3 et P_4, dont les directions seules sont données *fig.* 38).

Digitized by Google

Le polygone des forces peut être constitué comme suit :

$$AB = R$$
$$BC = P_1$$
$$CD = P_2$$

De D on mène une parallèle à P_1 et de A une parallèle à P_3. Ces deux parallèles se rencontrent en E.

AE donne, en grandeur, direction et sens, la force P_3 et ED la force P_1.

L'ordre dans lequel on porte les forces étant indifférent, on aurait pu, par D, mener une parallèle à P_3 et par A une parallèle à P_1, et le résultat eût été le même.

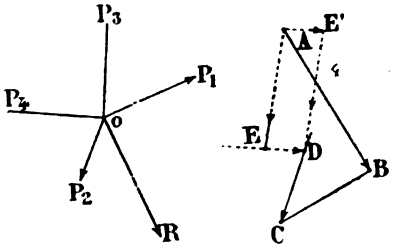


Fig. 38.

DE' eût donné P_3, et AE' la force P_1. On voit, sur la figure, que DE' = AE et AE' = ED.

64. Équilibre des forces appliquées en un même point dans un plan. — Pour que des forces appliquées en un même point soient en équilibre, il faut et il suffit que leur résultante soit nulle.

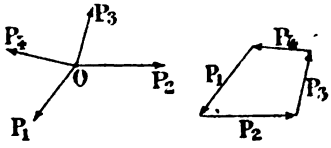


Fig. 39.

Cela revient à dire que le polygone des forces doit se fermer lorsqu'on le parcourt dans le même sens.

Ainsi les forces P_1, P_2, P_3, P_4 (*fig.* 39), donnent un polygone des forces fermé avec un sens constant ; ces forces sont donc en équilibre, la résultante étant nulle.

Remarque I. — Si des forces P_1, P_2, P_3 non en équilibre sont appliquées en un point O, on peut les équilibrer par une

Digitized by Google

force unique P appliquée en ce même point, mais égale et de sens contraire à leur résultante R.

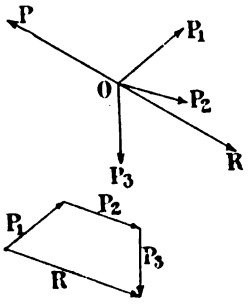


Fig. 40.

Le tracé (*fig.* 40) indique la marche à suivre pour résoudre le problème.

Remarque II. — Inversement, une force unique, P, agissant en un point donné, peut être équilibrée par plusieurs forces P_1, P_2 et P_3 appliquées en ce point (*fig.* 41).

A cet effet on trace un polygone des forces P, P_1, P_2, P_3 en partant de l'extrémité de la force donnée pour aboutir à son origine et on munit ces forces du sens de la force donnée.

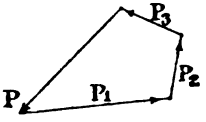


Fig. 41.

On peut se donner toutes les forces en grandeur, direction et sens moins deux dont la direction seule est donnée.

§ 3. — COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES

65. Composition de deux forces parallèles dirigées dans le même sens. — Résultante. — Soient deux forces parallèles P_1 et P_2 données par leur ligne d'action et leur grandeur (*fig.* 42).

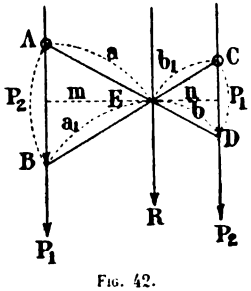


Fig. 42.

Pour les composer et obtenir leur résultante en position, il suffit de porter sur la ligne d'action de P_1 la longueur BA égale à la grandeur de P_2 et, réciproquement, sur la ligne d'action de P_2 la longueur DC égale à la grandeur de P_1.

On joint ensuite l'origine de chaque force à l'extrémité

Digitized by Google

de l'autre; on obtient ainsi les droites AD et CB, qui se coupent en un point E qui est le point de passage de la résultante.

Cette résultante a évidemment la direction des forces données, et sa grandeur est égale à leur somme.

Remarque I. — Lorsque les forces sont dirigées dans le même sens, le point de passage de la résultante se trouve toujours placé à l'intérieur des deux forces.

Cette résultante est plus rapprochée de la force la plus grande que de la plus petite.

Remarque II. — Si on désigne par a, a_1, b et b_1 les longueurs comprises entre le point de passage E de la résultante et les origines et extrémités des forces, on a toujours les relations :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}.$$

C'est-à-dire que le point E divise les longueurs AD et BC en deux segments inversement proportionnels aux forces données.

Si m et n étaient les distances du point de croisement E aux forces, on aurait également :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n}{m}.$$

66. Composition de deux forces parallèles dirigées en sens contraires. — Soient deux forces P_1 et P_2 données par leur ligne d'action et leur grandeur (*fig.* 43).

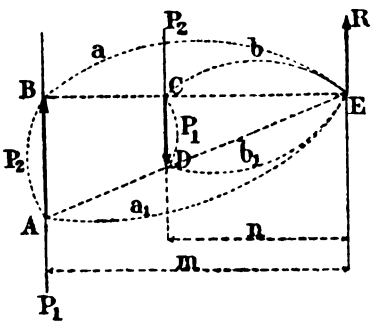


Fig. 43.

On applique le même procédé que celui du n° 65, c'est-à-dire qu'on porte sur la ligne d'action de P_1 la longueur AB égale à la grandeur de P_2 avec le sens

Digitized by Google

de cette force, et sur la ligne d'action de P_2 la longueur CD égale à la grandeur de P_1 avec le sens de cette force.

On joint ensuite l'origine de chaque force à l'extrémité de l'autre et on obtient ainsi le point de rencontre E, qui est le point de passage de la résultante R. Ce point de passage est toujours en dehors des forces données.

La résultante a la même direction que celle des forces, sa grandeur est égale à leur différence, et le sens de sa direction est celui de la plus grande des deux.

On a également, par suite de la similitude des triangles :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{n}{m}.$$

67. Composition de plusieurs forces parallèles. — Pour composer plusieurs forces parallèles, il suffit d'appliquer les problèmes des nos 65 et 66 à deux des forces, puis à leur résultante et à une troisième force, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

La résultante a pour grandeur la somme algébrique des forces données.

68. Décomposition d'une force en deux autres parallèles à cette force. — Ce problème comporte une infinité de solutions, puisqu'on peut toujours trouver deux forces qui satisfont à l'équation $\frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a}$.

Mais on peut se donner différentes conditions, et alors le problème ne comporte plus qu'une solution.

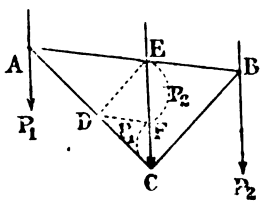


Fig. 44.

1° *Décomposer une force en deux autres qui lui soient parallèles et assujetties à passer par deux points situés de part et d'autre de la force donnée* (*fig.* 44).

Soient P la grandeur de la force et A et B les deux points donnés.

On tire la droite AB qui coupe la ligne d'action de la force en E.

On porte EC = P et on trace les droites AC et BC.

Digitized by Google

Ensuite par E on mène une parallèle ED à BC, et par D DF parallèle à AB.

Les distances EF et FC donnent les grandeurs des deux composantes :

FC représente la force P_1 qui passe par le point A, et EF la force P_2 qui passe par B.

La résultante étant placée entre les deux composantes, le sens de ces composantes sera le même que celui de la force donnée (n° 65).

2° *Décomposer une force en deux autres qui lui soient parallèles et assujetties à passer par deux points situés d'un même côté par rapport à la force donnée (fig. 45).*

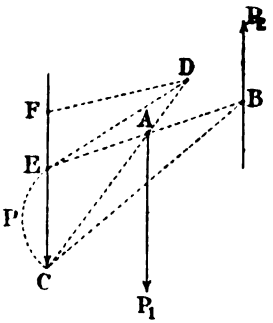


Fig. 45.

Le tracé du problème 1 est également applicable.

On joint les deux points A et B par une droite que l'on prolonge jusqu'en E, sur la ligne d'action de la force donnée P. On porte ensuite EC = P et on trace les droites AC et BC.

Par E, on mène une parallèle à BC jusqu'à la rencontre de AC prolongée en D, et par ce point on mène DF parallèle à AB.

Les distances CF et EF donnent les grandeurs des deux composantes :

D'après le n° 66, CF = P_1, qui passe par A, et ayant même sens que P, et EF = P_2, qui passe par B avec un sens contraire à P.

69. Équilibre des forces parallèles. — Pour équilibrer des forces parallèles, il suffit de rechercher leur résultante en position, grandeur et sens, et de remplacer cette résultante par une force égale et de sens contraire.

Inversement, une force unique peut être équilibrée par des forces parallèles à sa direction.

Digitized by Google

§ 4. — COMPOSITION DES FORCES QUELCONQUES

70. Composition et équilibre des forces situées d'une manière quelconque dans un plan. — Lorsque des forces sont situées d'une manière quelconque dans un plan, on peut toujours trouver leur résultante en grandeur, direction et sens, au moyen d'un *polygone des forces*, c'est-à-dire en les portant bout à bout, comme cela a été fait pour les forces appliquées en un même point (deuxième procédé du n° 62) ; mais, quant à la position de cette résultante, elle ne peut se déterminer que si les différentes forces se rencontrent les unes avec les autres dans les limites de l'épure. Car, dans ce cas, on peut toujours composer deux des forces en transportant leur point d'application à leur point de rencontre (n° 60), puis par le même procédé composer ensuite leur résultante avec une troisième force, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière. Mais la condition de rencontre des forces est nécessaire.

Si cela n'est pas, le problème ne peut pas être résolu par la méthode ordinaire.

L'*emploi des polygones funiculaires*, dont il sera question dans le chapitre suivant, permet de résoudre toutes les questions relatives à la composition et à l'équilibre des forces placées d'une manière quelconque dans un plan.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE

CHAPITRE IV

LE POLYGONE FUNICULAIRE ET SES APPLICATIONS

§ 1. — DÉFINITIONS

71. Cas général d'un groupe de forces placées d'une manière quelconque dans un plan. — Soient les quatre forces P_1, P_2, P_3, P_4, et 1, 2, 3, 4 le polygone des forces correspondant (*fig.* 46).

On choisit dans le plan de ces forces un point quelconque *o* que l'on joint à tous les sommets du polygone des forces, y compris les deux extrémités.

On fait les conventions suivantes :

Chaque sommet est désigné par les chiffres des deux côtés qui le déterminent, et le rayon qui aboutit à chaque sommet est désigné comme le sommet lui-même.

Ainsi on a : l'origine *a*, les sommets 1-2, 2-3, 3-4 et l'extrémité *b*, les rayons extrêmes *oa* et *ob* et les rayons 1-2, 2-3 et 3-4.

Ceci posé, d'un point quelconque A du plan, on mène A-I parallèle au rayon extrême *oa* jusqu'à la rencontre de P_1, de I on mène I-II parallèle au rayon 1-2 jusqu'à la rencontre de P_2, et ainsi de suite, II-III, III-IV et IV-B parallèles aux rayons correspondants.

Le nouveau contour A-I-II-III-IV-B ainsi obtenu s'appelle un *polygone funiculaire* des forces données[1].

Le point *o* s'appelle le *pôle*, et les rayons issus de ce pôle et aboutissant au sommet du polygone des forces sont les *rayons polaires*.

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 86.

Digitized by Google

La distance du pôle à un côté du polygone des forces est la *distance polaire* de la force représentée par le côté en question.

Ainsi *om* est la distance polaire de la force P_3.

Enfin les côtés A-I et IV-B s'appellent les *côtés extrêmes* du polygone funiculaire.

Remarque I. — Avec les notations adoptées, on voit qu'un côté quelconque du polygone funiculaire, compris entre deux

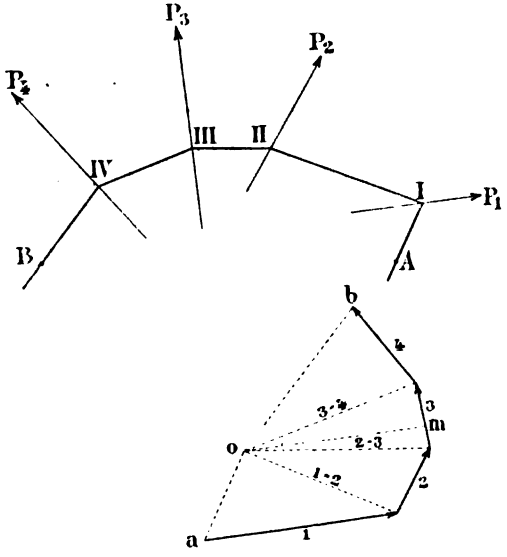


Fig. 46.

forces consécutives, est parallèle au *rayon polaire* qui aboutit au sommet déterminé par les deux forces dans le *polygone des forces*.

Ainsi le côté I-II compris entre les deux forces P_1, P_2 est parallèle au rayon polaire 1-2.

Remarque II. — Un système de forces données admet une infinité de polygones funiculaires, le pôle pouvant en effet être choisi arbitrairement.

Remarque III. — Pour que la construction indiquée ci-dessus soit possible, quel que soit le point de départ A, il

Digitized by Google

faut que le pôle ne se trouve sur la direction d'aucun des côtés du polygone des forces.

Généralement, il faut le choisir ainsi; mais, si ce pôle se trouve sur la direction d'un des côtés du polygone des forces, le point de départ doit être pris à l'intersection des deux lignes d'action parallèles : l'une au côté du polygone des forces dont la direction passe par le pôle, l'autre à celui qui précède ou qui suit ce côté.

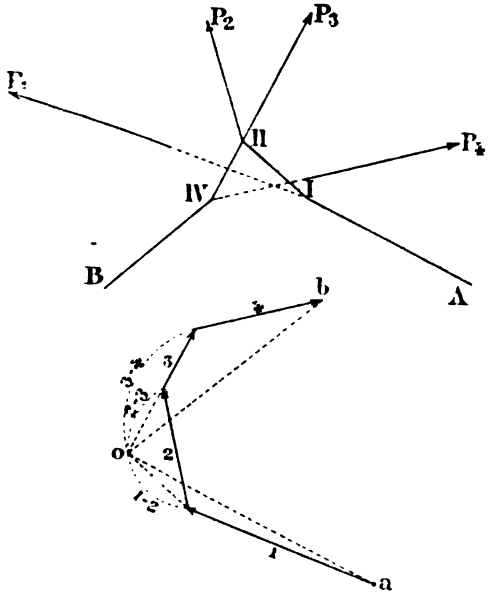


Fig. 47.

Ainsi, si l'on prend le pôle sur le prolongement du côté 3 du polygone des forces 1, 2, 3, 4 (*fig.* 47), les lignes d'action correspondantes étant P_1, P_2, P_3 et P_4, le point de départ doit être choisi à l'intersection de P_2-P_3 ou de P_3-P_4.

Dans le premier cas, il faut commencer par tracer les côtés II-I et I-A parallèles aux rayons 1-2 et *oa*. Ensuite on passe au côté II-III parallèle au rayon 2-3; mais on remarque que le côté du polygone funiculaire se réduit au point II.

Digitized by Google

Le côté suivant III-IV, parallèle au rayon 3-4, se confond avec la ligne d'action P_3, dont le côté correspondant 3 renferme le pôle. Le sommet IV se trouve à l'intersection de P_3 et de P_4.

Enfin on termine par le côté IV-B parallèle au rayon *ob*.

Dans le deuxième cas, on trace d'abord IV-B, puis IV-II, et ainsi de suite, comme précédemment.

Remarque IV. — Si, au lieu de considérer toutes les forces qui agissent, on n'en considère que quelques-unes seulement, pourvu qu'elles soient *consécutives*, soit par exemple P_2 et P_3 (*fig.* 46), le contour I-II-III-IV est un polygone funiculaire des deux forces données dont les côtés extrêmes sont I-II et III-IV, les rayons extrêmes 1-2 et 3-4 et, d'une manière générale, les propriétés appartenant aux deux côtés extrêmes des polygones funiculaires sont aussi applicables à deux côtés quelconques de ces polygones.

72. **Cas de forces parallèles.** — Lorsque les forces sont parallèles, le *polygone des forces* se réduit à une droite dont la direction est celle des forces.

On porte sur cette direction *ab* (*fig.* 48) les forces données P_1, P_2, P_3, dont les grandeurs sont 1-2-3, bout à bout avec leur sens.

On choisit ensuite un pôle *o* et on trace les rayons polaires *oa*, 1-2, 2-3 et *ob*.

Le tracé du polygone funiculaire se fait comme il a été dit au n° 71, en menant, d'un point A quelconque, A-I parallèle à *oa*, puis I-II parallèle à 1-2, ainsi de suite jusqu'à III-B parallèle au rayon *ob*.

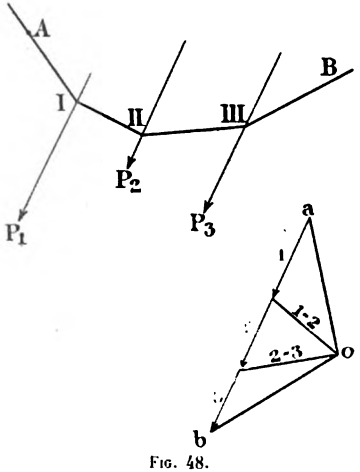


Fig. 48.

Digitized by Google

Les côtés A-I et III-B sont les *côtes extrêmes* du polygone funiculaire.

Remarque I. — Dans le cas de forces parallèles, le tracé n'est possible que si le pôle est choisi en dehors de la direction des côtés du polygone des forces *ab*.

Remarque II. — Si toutes les forces n'avaient pas le même sens, il faudrait en tenir compte dans la construction du polygone des forces.

Ainsi soient les forces P_1, P_2, P_3, P_4, de sens différents indiqués par les flèches *fig.* 49); on porte sur la droite *ax* :

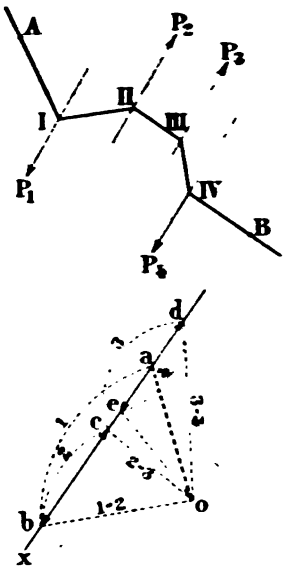


Fig. 49.

de *a* vers *x* : $ab = 1 = P_1$
ensuite de *b* vers *a* : $bc = 2 = P_2$
de *c* vers *a* : $cd = 3 = P_3$
et finalement de *d* vers *x* : $de = 4 = P_4$.

Si on choisit le pôle *o*, les rayons polaires sont :

Rayon extrême d'origine.....		*oa*
Rayon intermédiaire.....	*ob*	= 1.2
id.	*oc*	= 2.3
id.	*od*	= 3.4
Enfin rayon extrême d'extrémité.		*oe*

Le polygone funiculaire se trace d'après le même procédé que précédemment en menant d'un point A quelconque : A-I parallèle à *oa*, I-II parallèle à 1-2, ainsi de suite jusqu'à IV-B parallèle à *oe*.

Digitized by Google

Le tracé n'offre pas de difficulté ; mais il y a lieu d'apporter toute l'attention voulue dans la construction du polygone des forces et dans le numérotage des rayons polaires.

73. Propriétés des côtés du polygone funiculaire. — *Des forces quelconques situées dans un plan peuvent toujours être décomposées en deux forces ayant pour lignes d'action les côtés extrêmes de l'un quelconque des polygones funiculaires de ces forces, et pour grandeurs les deux rayons polaires extrêmes ; ces rayons donnent en même temps le sens de la direction.*

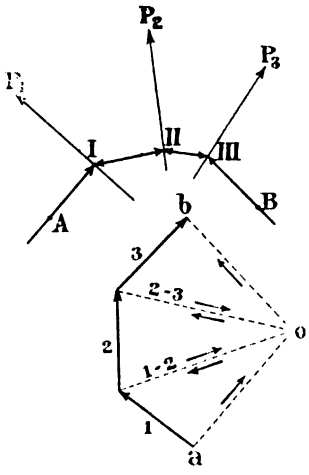


Fig. 50.

Si, après avoir tracé le polygone des forces 1-2-3 et le polygone funiculaire A-I-II-III-B de pôle *o* (*fig.* 50), on transporte les points d'application des forces données aux sommets du polygone funiculaire, on peut décomposer chacune de ces forces en deux autres dirigées suivant les côtés qui y aboutissent.

Le polygone des forces donne ces composantes ; ainsi, pour la force P_1, par exemple, le rayon *oa* est parallèle à A-I et le rayon 1-2 à I-II. Or on sait que *oa* et 1-2 sont, en grandeur et en direction, les composantes de 1 ou P_1, et le sens de leur direction est inverse de celui de la force, comme l'indiquent les flèches de la figure.

Pour la force P_2, les composantes sont données par les rayons 1-2 et 2-3 avec un sens contraire à celui de P_2, et ainsi de suite pour la force P_3.

Si l'on transporte les grandeurs de ces composantes avec leurs sens sur leurs lignes d'action, qui sont ici les côtés du polygone funiculaire, on remarque que, sur chaque côté intermédiaire de ce polygone funiculaire, il se trouve

Digitized by Google

deux forces égales et de signe contraire, qui se font équilibre et que l'on peut supprimer.

Ainsi, pour le côté I-II, on a les deux forces égales au rayon 1-2, mais avec un sens contraire; il en est de même pour le côté II-III parallèle au rayon 2-3.

Toutes les forces en équilibre étant supprimées, il ne reste plus finalement que celles situées sur les côtés extrêmes qui sont parallèles aux rayons polaires extrêmes, et ont pour grandeurs ces rayons.

Le sens des deux composantes est donné en allant de l'origine à l'extrémité du polygone des forces, en passant par le pôle *o*.

Remarque. — Ce qui a lieu pour des forces quelconques est aussi applicable aux forces parallèles.

La démonstration est la même que celle qui vient d'être faite.

§ 2. — RECHERCHE DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES

74. Résultante d'un groupe de forces placées d'une manière quelconque dans un plan. — Le polygone funiculaire permet de trouver la ligne d'action de la résultante d'un système de forces quelconques.

A cet effet, on construit le polygone des forces données, P_1, P_2, P_3; on prend un pôle quelconque *o* et on trace le polygone funiculaire correspondant A-I-II-III-B (*fig.* 51).

On prolonge les deux côtés extrêmes A-I et B-III de ce polygone funiculaire jusqu'à leur point de rencontre C, qui est un point de passage de la résultante cherchée.

La grandeur, la direction et le sens de cette résultante sont donnés dans le polygone des forces par la ligne *ab* (n° 70).

Il suffit donc, pour avoir la ligne d'action de la résultante cherchée, de mener par le point C une parallèle à *ab*.

Pour le démontrer, on remarque d'après le n° 73 : que A-I et B-III sont les lignes d'action des composantes du sys-

Digitized by Google

tème de forces données, et que, par suite, la ligne d'action de la résultante doit passer par leur point de rencontre C.

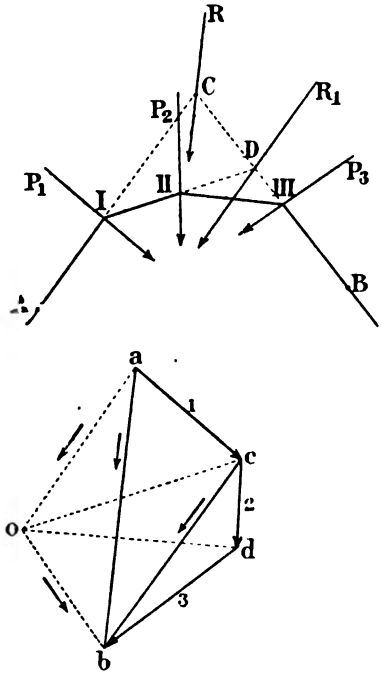


Fig. 51.

En outre, dans le polygone des forces, *ab* est aussi bien la résultante des forces données 1, 2, 3 que celle des deux forces *ao* et *ob*, dont les lignes d'action sont les côtés A-I et B-III.

Il résulte donc de ces considérations qu'en menant par le point C une parallèle à *ab*, cette droite a la direction de la résultante. Sa grandeur est *ab*, et son sens celui qui va de l'origine *a* à l'extrémité *b*.

Remarque. — Si l'on voulait obtenir la résultante R_1 de deux des forces consécutives P_2, P_3, il suffirait (Remarque IV

Digitized by Google

du n° 71) de chercher le point de rencontre D des côtés I-II et B-III et de mener par ce point une parallèle à la ligne *cb* qui joint l'origine à l'extrémité du polygone des deux forces 2, 3.

La grandeur de cette résultante est *cb*, et le sens va de *c* vers *b*.

75. Résultante d'un groupe de forces parallèles de même sens. — Le procédé est le même que celui du n° 74.

On construit le polygone des forces données P_1, P_2, P_3 en portant, sur une droite parallèle à la direction générale des forces, les forces bout à bout; on choisit un pôle quelconque *o*, et on trace le polygone funiculaire correspondant A-I-II-III-B (*fig.*52).

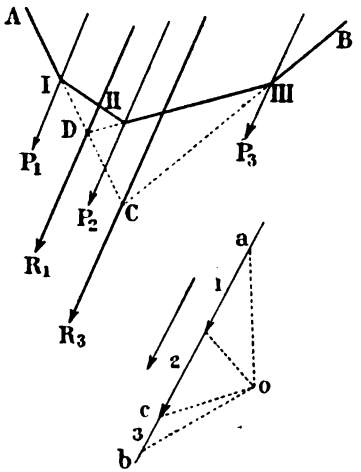


Fig. 52.

Le point de rencontre C des deux côtés extrêmes prolongés donne le point de passage de la résultante R, dont la ligne d'action est parallèle aux forces données.

La grandeur de cette résultante est égale à la somme algébrique *ab* de ces forces données et le sens est celui qui va de l'origine *a* à l'extrémité *b*.

Remarque. — Si l'on ne considérait que les deux forces P_1 et P_2, le point de passage de la résultante R_1 serait D, rencontre des deux côtés A-I et II-III, qui renferment les forces considérées. Sa direction serait parallèle à ces forces, sa grandeur égale à *ac*, et son sens de *a* vers *c*.

76. Résultante d'un groupe de forces parallèles de sens

Digitized by Google

différents. — Soient les forces P_1, P_2, P_3, ayant le sens indiqué par les flèches (*fig.* 53).

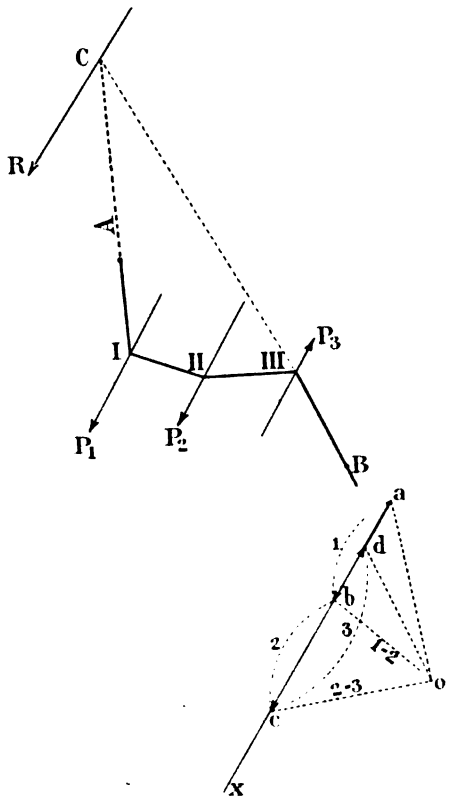


Fig. 53.

La remarque II du n° 72 permet de construire le polygone des forces et de tracer le polygone funiculaire de pôle o ; à cet effet, on porte sur ax parallèle à la direction des forces : $ab = 1 = P_1$, $bc = 2 = P_2$ et $cd = 3 = P_3$.

On choisit un pôle o et, après avoir tiré les rayons polaires, on trace le polygone funiculaire A-I-II-III-B.

Digitized by Google

La résultante R passe par le point de rencontre C des deux côtés extrêmes prolongés A-I et III-B; sa direction est parallèle à celle des forces; sa grandeur est représentée, dans le polygone des forces, par la longueur *ad* qui va de l'origine *a* à l'extrémité des forces *d* et le sens de *a* vers *d*.

§ 3. — CONDITIONS GRAPHIQUES D'ÉQUILIBRE DES FORCES

77. Forces appliquées en un même point. — On a vu (n° 64) que, lorsqu'un système de forces appliquées en un point donne un *polygone des forces fermé*, leur résultante est nulle et les forces se font équilibre.

78. Forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan. — Dans ce cas, pour que l'équilibre existe, il faut deux conditions, savoir :

1° Que le polygone des forces soit fermé;

2° Qu'un de leurs polygones funiculaires soit fermé, et alors tous les polygones funiculaires seront également fermés.

En effet, on peut, d'après le n° 73, réduire le système donné P_1, P_2, P_3 à deux forces ayant comme lignes d'action les côtés extrêmes du polygone funiculaire de pôle *o*.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces deux forces soient sur la même ligne d'action, qu'elles soient égales et de sens contraires.

Ces conditions ne peuvent être remplies que de la manière suivante (*fig.* 54) :

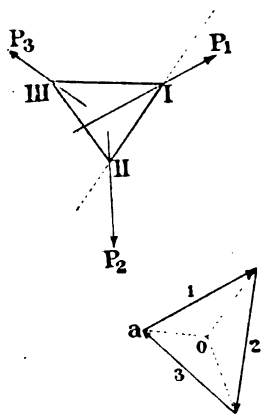


Fig. 54.

1° Le polygone funiculaire se ferme, et alors les côtés extrêmes se confondent en un seul : III-I;

2° Le polygone des forces se ferme, et, dans ce cas, les deux rayons polaires d'origine et d'extrémité se résument à un

Digitized by Google

seul : *oa*. Les deux forces sont alors égales et de sens contraire, puisque l'une d'elles a le sens de *a* vers *o*, et l'autre de *o* vers *a*.

79. Couples. — On appelle *couple* l'ensemble de deux forces F et — F parallèles, égales et de sens contraire (*fig.* 55).

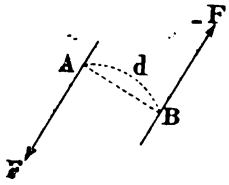


Fig. 55.

La distance AB = *d* entre les lignes d'action se nomme le bras de levier du couple.

Un couple n'admet pas de résultante ; mais il peut être remplacé par un autre couple qui lui est équivalent.

Deux couples sont équivalents lorsqu'ils ont même produit de la force par le bras de levier et même sens.

Deux couples se font équilibre lorsqu'ils ont même produit de la force par le bras de levier, et qu'ils sont de sens contraires.

80. Conditions graphiques pour que des forces situées dans un plan se réduisent à un couple. — *Pour que des forces situées dans un plan se réduisent à un couple, il faut et il suffit :*

1° *Que le polygone des forces se ferme ;*

2° *Que l'un des polygones funiculaires ne se ferme pas et alors aucun des polygones funiculaires ne se ferme.*

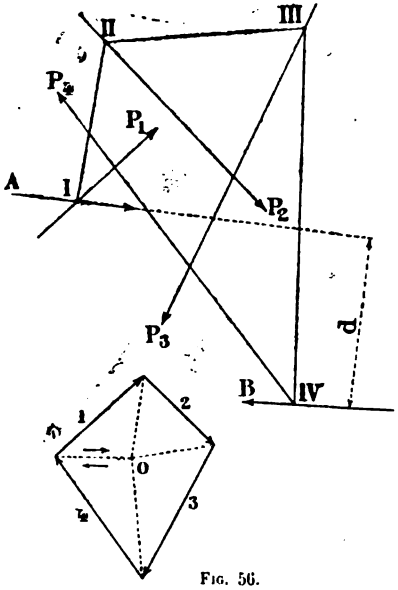


Fig. 56.

Digitized by Google

Soient les quatre forces P_1, P_2, P_3, P_4, qui ont un polygone des forces fermé, mais dont un polygone funiculaire de pôle *o* ne soit pas fermé (*fig.* 56).

On remarque tout de suite que, puisque le polygone des forces est fermé, les rayons polaires d'origine et d'extrémité se réduisent à un seul. Il s'ensuit que les côtés extrêmes du polygone funiculaire, qui sont parallèles à ces rayons, le sont entre eux.

En outre, d'après le n° 73, un système de forces peut toujours être décomposé en deux autres, ayant pour lignes d'action les côtés extrêmes du polygone funiculaire, pour grandeur les rayons correspondants, et, comme sens, celui qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des forces en passant par le pôle.

Les deux forces résultantes A-I et B-IV sont donc parallèles ; elles ont même grandeur que le rayon d'origine ; en outre, A-I aurait comme sens celui du sommet d'origine vers *o*, et B-IV celui de *o* vers le sommet d'origine, c'est-à-dire un sens contraire.

Ces trois conditions définissent bien un couple dont le bras de levier serait *d*.

§ 4. — PROBLÈMES USUELS SUR LA COMPOSITION LA DÉCOMPOSITION ET L'ÉQUILIBRE DES FORCES

81. *Décomposer une force donnée en deux autres de même direction qu'elle et dont les lignes d'action sont données.* — Soient R la force donnée par sa ligne d'action, sa grandeur et son sens, P_1 et P_2 les lignes d'action des composantes (*fig.* 57).

On trace un polygone funiculaire quelconque de la force R avec un pôle *o*.

Les côtés extrêmes de ce polygone funiculaire rencontrent les lignes d'action de P_1 et P_2 en A et B.

On tire la droite AB et, par le point *o*, on mène une parallèle à cette droite qui rencontre la force 1 en *c*.

Les deux segments *ac* et *cb* donnent la grandeur des forces P_1 et P_2, et le sens de leur direction est de *a* vers *b*.

Digitized by Google

En effet, les deux triangles AIE et *aco* étant semblables, on a :

$$\frac{AE}{oc} = \frac{EI}{ac},$$

ou bien

$$AE \times ac = oc \times EI.$$

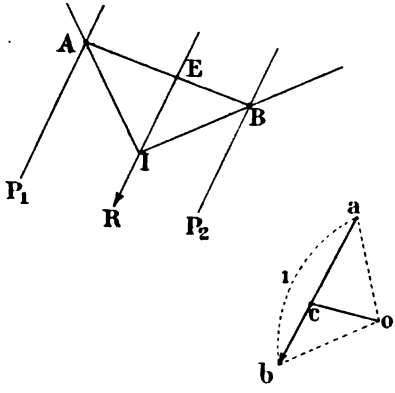


Fig. 57.

Il en est de même des deux triangles EIB et *ocb*, qui donnent :

$$\frac{EB}{oc} = \frac{EI}{cb},$$

ou bien

$$EB \times cb = oc \times EI.$$

Ces deux égalités possèdent un terme semblable, $oc \times EI$; on peut donc écrire :

$$AE \times ac = EB \times cb$$

ou bien encore :

$$\frac{ac}{cb} = \frac{EB}{AE}.$$

Or, d'après la remarque II du n° 65, cette relation montre

Digitized by Google

bien que :

$$ac = P_1$$

et

$$cb = P_2.$$

82. *Même problème, mais les lignes d'action données étant situées d'un même côté par rapport à la force* R. — La solution du problème se trouve par le même procédé.

On trace un polygone funiculaire de pôle o A_1-I-B (*fig.* 58).

On remarque que chaque ligne d'action est coupée deux fois par les côtés extrêmes; de ce fait, il se présente deux solutions, car, par le point o, on peut mener deux lignes parallèles l'une à AB et l'autre à A_1B_1, et obtenir ainsi les points c et c_1.

Dans le premier cas : la force P_1, dont la ligne d'action passe par A, a pour grandeur le segment ac avec un sens de a vers c, et la force P_2 a pour grandeur le segment cb avec un sens de c vers b.

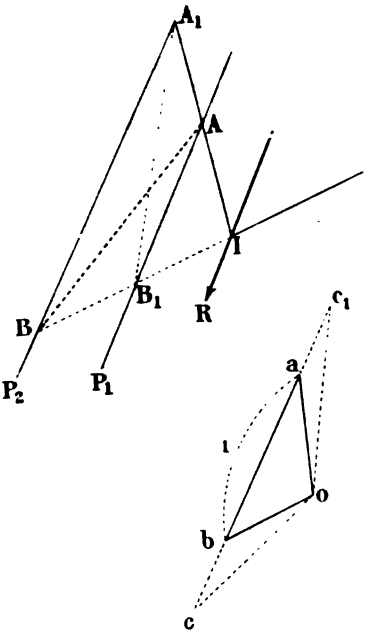


Fig. 58.

Tandis que, dans le deuxième cas, la force P_1 a pour grandeur le segment ac_1, avec un sens de a vers c_1, et la force P_2, le segment c_1b, avec un sens de c_1 vers b.

83. *Etant données des forces quelconques, les réduire à deux forces parallèles à leur résultante et passant par des points donnés.* — Soient les forces P_1, P_2, P_3, P_4 et les points A et B.

Digitized by Google

Puisque les forces cherchées doivent être parallèles à la résultante des forces, on est conduit à rechercher la direction de cette résultante, ce qui permettra de tracer, par les points donnés, les lignes d'action des deux forces que l'on veut déterminer.

La recherche de la résultante R se fait par la méthode du n° 74.

Cette résultante tracée, le problème revient donc à décomposer une force R en deux autres de même direction qu'elle et dont les lignes d'action sont données, objet des problèmes 81 ou 82 suivant que les points A et B sont de part et d'autre de la résultante ou d'un même côté.

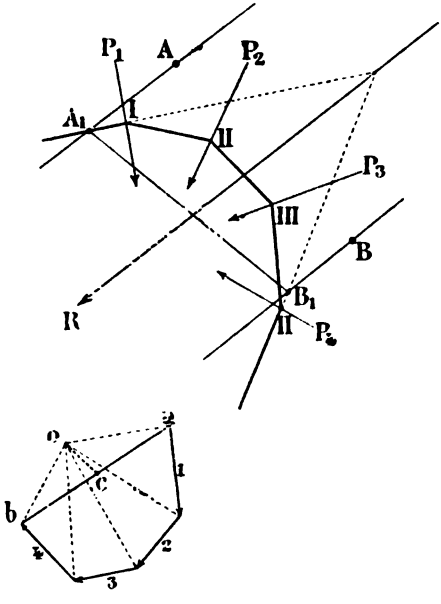


Fig. 59.

Dans le cas qui nous occupe, on appliquera le n° 81 ; on joint à cet effet les points de rencontre A_1 et B_1 des lignes d'action des forces cherchées avec les côtés extrêmes du

Digitized by Google

polygone funiculaire et, par le point *o*, on mène *oc* parallèle à A_1B_1 *fig.* 59.

Le segment *ac* donne la grandeur de la force passant par A avec un sens de *a* vers *c*, et le segment *cb* la grandeur de la force passant par B avec un sens de *c* vers *b*.

84. *Même problème avec des forces parallèles.* — Lorsqu'il s'agit de forces parallèles, il est inutile de déterminer la position de la résultante, puisque celle-ci est forcément parallèle aux forces données; sa direction est donc connue.

On applique ensuite le procédé du n° 83.

85. *Décomposer une force en deux autres de même direction qu'elle et dont l'une est donnée en grandeur, direction et sens.* — Soit R la ligne d'action de la force à décomposer, et soit P_1 la ligne d'action de la composante donnée.

On porte, dans un polygone des forces : *ab* la grandeur de R, et *ac* la grandeur de P_1 avec son sens.

Si les forces R et P_1 sont de même sens, on porte *ac* de *a* vers *c*, et *vice versa* dans le cas contraire.

La deuxième composante, dont on ne connaît pas la position, a toutefois pour grandeur *cb* et comme sens celui de *c* vers *b*.

On choisit un pôle *o* et, après avoir tiré les rayons polaires, on trace le polygone funiculaire de la force R seulement.

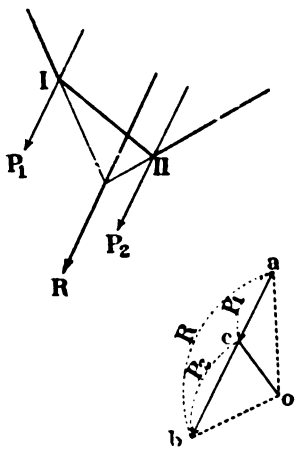


Fig. 60.

Un des côtés extrêmes rencontre la ligne d'action de P_1 au point I, et si, par ce point I, on mène une parallèle au rayon *oc*, on détermine le côté du funiculaire correspondant à la force *ac* ou P_1.

Ce côté du funiculaire rencontre le côté extrême en II,

Digitized by Google

qui est le point de passage de la composante cherchée P_2.

Ce problème n'est que la conséquence de celui n° 81.

86. Remarque. — Si, dans tous les problèmes précédents, au lieu de réduire ou de décomposer les forces, il fallait les équilibrer, la marche à suivre serait la même ; mais il faudrait changer le sens de la force donnée, ou de la résultante des forces données suivant le cas.

§ 5. — PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES FUNICULAIRES

87. Les côtés correspondants de deux polygones funiculaires d'un même système de forces se coupent sur une droite parallèle à la ligne qui joint les pôles. — Ainsi soient deux polygones funiculaires tracés avec les pôles *o* et *o'*, dont les deux premiers côtés A-I et A-I' se coupent au point A.

Tous les autres côtés correspondants ont leur point de rencontre sur la ligne AX parallèle à la droite *oo'*, qui joint les pôles.

La figure 61 montre cette propriété.

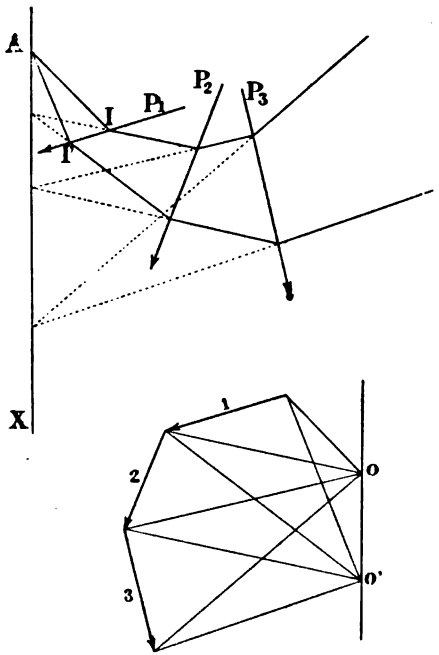


Fig. 61.

88. Tous les pôles des polygones funiculaires assujettis à

Digitized by Google

passer par deux points fixes se trouvent sur une droite parallèle à celle qui joint les points donnés. — En outre, la ligne des pôles divise, dans le polygone des forces, la résultante des forces comprises entre les points donnés en deux segments qui sont précisément les composantes parallèles de cette résultante, menées par les points donnés.

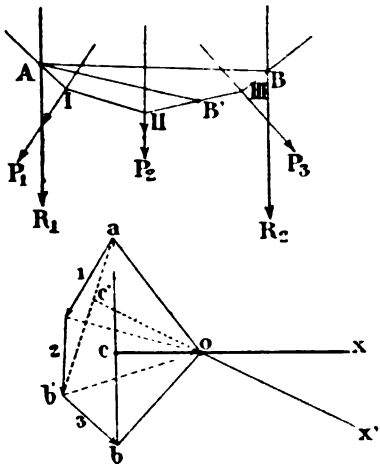


Fig. 62.

Soit le polygone funiculaire de pôle o des trois forces P_1, P_2, P_3, qui passe par les deux points A et B (*fig.* 62).

Tous les pôles des polygones funiculaires répondant à la question se trouvent donc sur la droite ox, parallèle à celle qui joint les deux points donnés, et, en outre, le point de rencontre c de cette droite ox avec la résultante ab des forces comprises entre ces points, divise cette résultante en deux segments qui sont les grandeurs des composantes R_1 et R_2 parallèles à ab.

Si les polygones devaient passer par A et B', il ne faudrait alors considérer que la résultante ab' des deux forces P_1 et P_2, et les pôles se trouveraient alors sur la droite $c'ox'$ parallèle à AB'.

89. Problème. — *Faire passer un polygone funiculaire par deux points, la distance polaire étant donnée.*

Soient les forces P_1, P_2, P_3 et les deux points A et B (*fig.* 63).

On construit d'abord un polygone funiculaire quelconque A'-B' de pôle o au moyen du polygone des forces 1, 2, 3.

D'après le n° 88, il suffit de rechercher, sur la résultante ab,

Digitized by Google

le point qui divise cette résultante en deux composantes qui lui sont parallèles, qui passent par les deux points donnés, et de mener par ce point une parallèle à la droite AB.

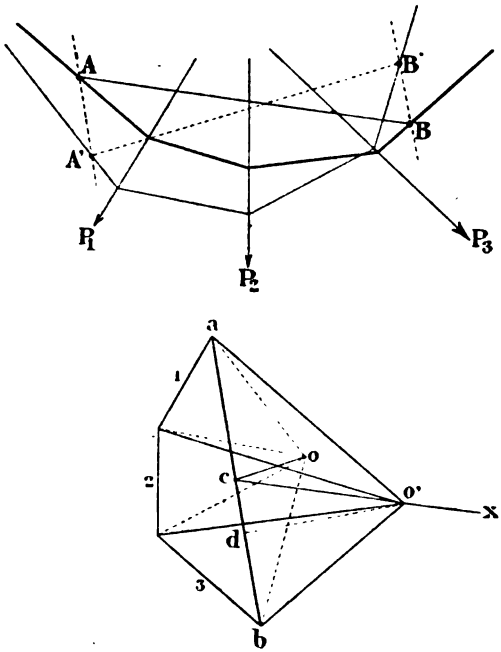


Fig. 63.

A cet effet (n° 83), on mène par A et B deux parallèles à *ab* qui coupent les côtés extrêmes en A' et B', et par le pôle *o* on trace *oc* parallèle à A'B'; le point *c* est celui cherché, et il suffit pour avoir la droite des pôles de tirer *cx* parallèle à AB (n° 88).

Toutefois la distance polaire étant donnée, un seul polygone funiculaire répond à la question et, pour le tracer, il y aura lieu de déterminer, sur la droite *cx*, un pôle *o'* tel que la perpendiculaire *o'd* abaissée de ce point sur *ab* soit égale à cette distance polaire.

Digitized by Google

Il suffit alors de tracer un nouveau polygone funiculaire de pôle o' et ayant comme point de départ le point A.

Ce polygone funiculaire doit passer par le point B.

90. Problème. — *Faire passer un polygone funiculaire par trois points donnés.*

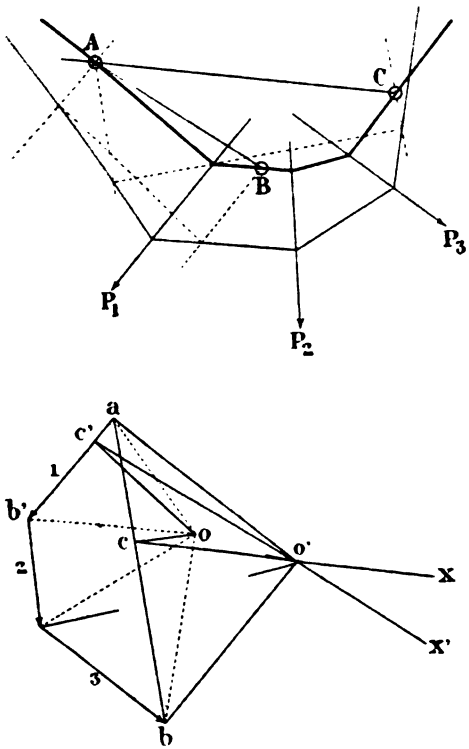


Fig. 64.

On suppose le même groupe de forces que celui de l'exemple précédent, et soient A, B et C les points donnés (*fig.* 64).

Digitized by Google

On trace d'abord un polygone funiculaire quelconque de pôle o.

Le polygone funiculaire cherché doit passer par A et C, son pôle se trouve sur cx parallèle à AC (n° 88). Puisqu'il doit passer également par A et B, il doit se trouver également sur $c'x'$ parallèle à AB.

L'intersection des deux droites cx et $c'x'$ détermine le pôle cherché o'.

Il n'y a donc qu'un polygone funiculaire qui réponde à la question, puisqu'il y a trois conditions imposées.

91. **Remarque.** — Si, au lieu d'opérer sur des forces quelconques, on se trouvait en présence de forces parallèles, la résolution des problèmes ci-dessus s'effectuerait de la même manière.

Digitized by Google

CHAPITRE V

MOMENTS STATIQUES DES FORCES

---

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

92. Définition. — Le moment statique d'une force P par rapport à un point M est le produit de cette force par sa distance m au point (*fig.* 65).

Ce moment M a donc pour valeur :

$$M = Pm.$$

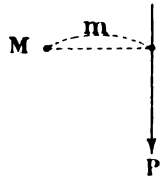


Fig. 65.

On convient que le moment est positif lorsque la force tend à faire tourner son bras de levier dans le sens des aiguilles d'une montre, et négatif dans le sens contraire. Ainsi, dans la figure 65, le moment est positif.

93. Calcul. — Le moment statique d'un système de forces, situées dans un plan, par rapport à un point est égal :

1° A la somme des moments de chacune des forces composant le système ;

2° Au moment de la résultante des forces considérées.

Connaissant les lignes d'action des forces, leur intensité et la position du point, on peut toujours évaluer le moment par le calcul.

Digitized by Google

§ 2. — DÉTERMINATION GRAPHIQUE

94. **Construction graphique du moment d'une force par rapport à un point.** — Soient P la force donnée par sa ligne d'action et son intensité, et M le point (*fig.* 66).

Avec la force P et un pôle quelconque *o*, on trace un polygone funiculaire, et, par le point donné M, on mène une parallèle à la force P.

Cette droite détermine entre les deux côtés du polygone funiculaire un segment EF qui, multiplié par la distance polaire *d*, donne le moment cherché; on aura donc :

$$M = EF \times d.$$

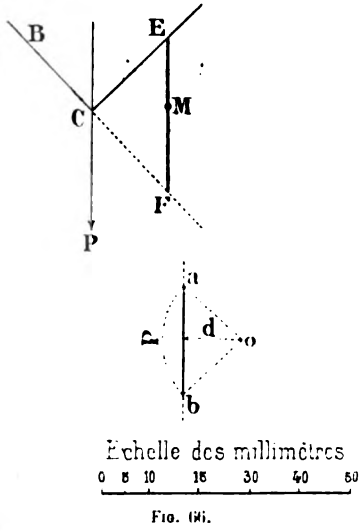


Fig. 66.

95. **Choix des échelles dans l'évaluation du moment.** — Pour obtenir la valeur réelle du moment cherché, il est nécessaire de tenir compte des échelles des forces et des longueurs.

On suppose par exemple que la force P a été portée à l'échelle de K millimètres par tonne, et les longueurs à l'échelle de *n* millimètres par mètre.

On commence par évaluer en mètres la distance polaire, soit *l* mètres.

L'échelle des moments est alors représentée par K millimètres pour $l \times 1^{T} = l$ tonnes-mètres, ou bien encore par 1 millimètre pour $\frac{l}{K}$ tonnes-mètres.

Digitized by Google

Ce qui veut dire que chaque millimètre de EF représente $\frac{l}{K}$ tonnes-mètres et la longueur totale EF millimètres aura pour valeur un moment égal à :

$$M = EF^{mm} \times \frac{l}{K} \text{ tonnes-mètres.}$$

Dans l'exemple du n° 94, les échelles sont les suivantes :

Longueurs.....	5 millimètres par mètre
Forces.....	2 millimètres par tonne

La distance polaire, qui a 12 millimètres, représente donc une longueur de :

$$\frac{12}{5} = 2^{m},4.$$

L'échelle des moments est donc de :

$$1 \text{ millimètre pour } \frac{2^{m},4}{2} \times 1 \text{ tonne-mètre} = 1^{Tm},2.$$

La longueur de EF étant de 30 millimètres, le moment a pour valeur :

$$M = 30 \times 1^{Tm},2 = 36 \text{ tonnes-mètres.}$$

96. Tracé graphique du moment par rapport à un point d'un groupe de forces quelconques situées dans un plan. — Soient P_1, P_2, P_3, P_4, les forces, et M, le point (*fig.* 67).

On construit un polygone des forces et, avec un pôle *o* quelconque, on trace un polygone funiculaire, qui permet de déterminer les côtés extrêmes ainsi que la résultante.

Il suffit d'appliquer ensuite à cette résultante, dont la grandeur est *ab* dans le polygone des forces, le procédé du n° 94, c'est-à-dire de mener, par le point M, une parallèle à cette résultante qui détermine entre les côtés extrêmes du polygone funiculaire un segment EF; celui-ci, multiplié par la distance polaire *d*, donne la valeur du moment cherché.

Digitized by Google

Remarque. — Le même polygone funiculaire permet de déterminer également le moment de certaines des forces *consécutives* du système.

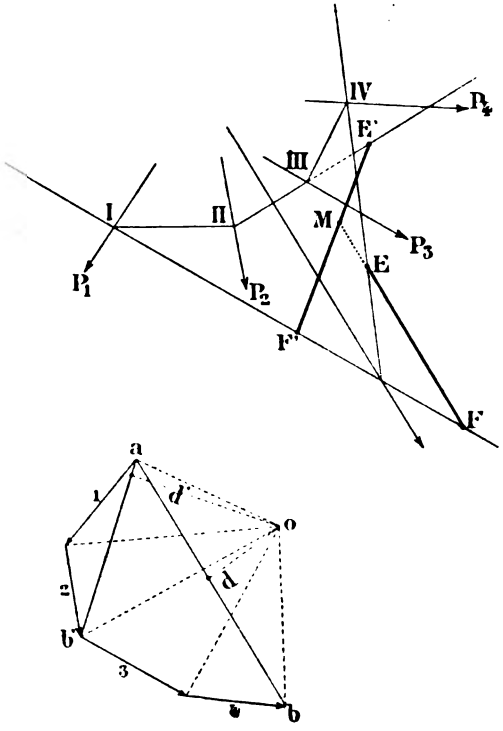


Fig. 67.

A cet effet, il suffit d'opérer sur la résultante de ces forces seulement et en ne considérant que les côtés extrêmes du polygone funiculaire qui les comprennent.

Ainsi le moment des forces P_1 et P_2 par rapport à M est égal au segment E'F', déterminé, entre les côtés extrêmes I-F' et II-III, par une parallèle à *ab'*, qui est la résultante des 2 forces dans le polygone des forces, multiplié

Digitized by Google

par la distance polaire d', soit alors :

$$M = E'F' \times d'.$$

97. Moment par rapport à un point d'un système de forces parallèles. — On opère de la même manière que celle employée dans le n° 96, c'est-à-dire que l'on trace un polygone funiculaire A-I-II-III-B des forces données avec un pôle quelconque o (*fig.* 68).

Le segment EF, intercepté entre les côtés extrêmes du polygone funiculaire par la droite MX menée par le point donné parallèlement à la direction générale des forces, multiplié par la distance polaire d, donne le moment cherché.

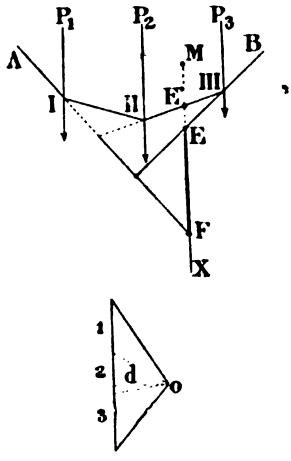


Fig. 68.

Remarque. — Quelles que soient les forces consécutives du système, dont on veut déterminer le moment par rapport au point M, le segment intercepté entre les côtés extrêmes de ces forces se trouve toujours sur la droite MX, et la distance polaire est toujours la même.

Ainsi le moment des forces P_1 et P_2 est déterminé par le segment E'F multiplié par d.

Il résulte de ceci que, si l'on prend la distance polaire comme unité, la valeur du moment est directement mesurée par le segment lui-même, mais à une échelle convenable.

§ 3. — MOMENTS DES COUPLES

98. Définition. — Le moment d'un couple est constant par rapport à tous les points de son plan, et ce moment est égal au produit de la force par son bras de levier.

Digitized by Google

Cette valeur constante s'appelle le *moment du couple*.

En effet, soient le couple formé par les forces P égales et de sens opposé et un point M du plan (*fig.* 69).

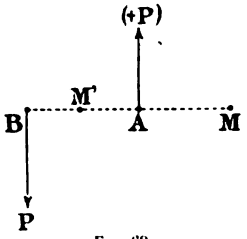


Fig. 69.

Les moments des deux forces par rapport à M ne sont pas de même signe, puisque les forces tendent à faire tourner leur bras de levier en sens contraire. On a par exemple:

$$-P \times BM$$

et

$$+P \times AM.$$

La somme de ces moments est alors :

$$M = P(-BM + AM) = -P \times AB,$$

c'est-à-dire le produit de la force par le bras de levier. Dans ce cas, le moment du couple est négatif.

Le résultat est le même si le point se trouve entre les deux forces; mais alors, les moments sont de même signe et on a :

$$M = -P \times BM' - P \times M'A = -P \times AB.$$

On remarque que le moment est encore négatif.

99. Une force P, appliquée en un point *o*, étant donnée, on peut toujours la transporter parallèlement à elle-même en un point quelconque M, pourvu que l'on adjoigne à la nouvelle force un couple dont le moment est égal au moment de la force donnée par rapport au point M, soit alors le moment $P \times m$ (*fig.* 70).

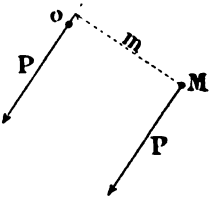


Fig. 70.

100. Tout système de forces situées dans un plan peut être réduit :

Digitized by Google

A une force unique, égale à la somme géométrique des forces données et appliquée en un point M quelconque du plan, et à un couple dont le moment est égal en grandeur à la somme des moments des forces données par rapport au point M et de même signe.

La force s'appelle la *résultante de translation* des forces données au point M ; et le couple : le *couple résultant de cette translation.*

Digitized by Google

CHAPITRE VI

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ

101. Rappel des principes. — Le *centre de gravité* d'un corps est le point de passage de la résultante des forces dues à la pesanteur, de quelque manière que se trouve placé ce corps[1].

Dans toute figure plane possédant un axe de symétrie, le centre de gravité se trouve sur cet axe.

Si la figure possède deux axes de symétrie, le centre de gravité se trouve à l'intersection des deux axes.

Le centre de gravité d'une ligne droite de longueur déterminée se trouve au milieu de cette droite.

Le centre de gravité d'un triangle se confond avec le point d'intersection des trois médianes. Il est toujours situé au tiers de la hauteur à partir de la base.

102. Méthode générale pour déterminer le centre de gravité d'un contour polygonal ou d'une surface quelconque ne possédant pas d'axe de symétrie. — On commencera par décomposer la figure donnée en éléments simples dont les centres de gravité soient connus.

On applique à ces centres de gravité deux systèmes de forces proportionnelles aux éléments, mais de direction différente pour les deux systèmes.

On détermine leurs résultantes, et le point de rencontre de ces résultantes donne le centre de gravité cherché.

103. Application à un contour polygonal ABCD. — Les éléments simples sont ici les droites AB, BC et CD, dont

[1] Voir *Mécanique* (B. C. T. P.), p. 76.

Digitized by Google

les centres de gravité sont g, g' et g'' situés au milieu des droites (*fig.* 71).

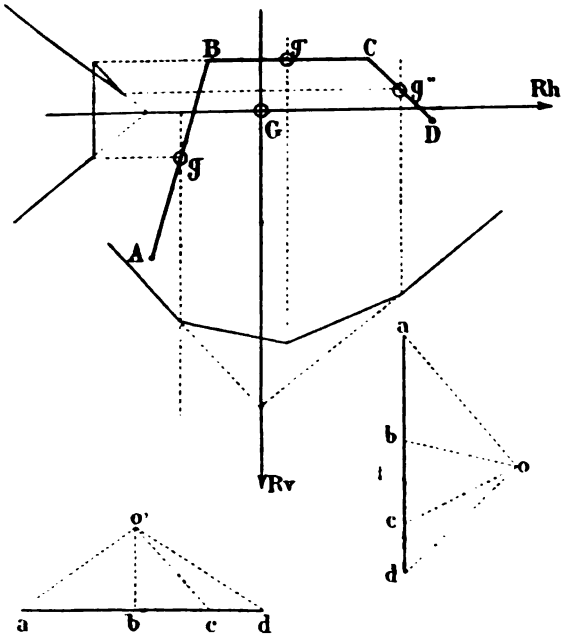


Fig. 71.

Les lignes d'action des forces proportionnelles aux longueurs des droites passent par ces centres de gravité.

On choisit comme direction du premier système la direction verticale.

On porte alors sur une verticale :

$$ab = \frac{AB}{2}, bc = \frac{BC}{2} \quad \text{et} \quad cd = \frac{CD}{2},$$

on prend un pôle o et on trace le polygone funiculaire correspondant, ce qui permet de déterminer la résultante R_v.

Digitized by Google

En procédant de même avec un système de forces de direction horizontale, on obtient un polygone funiculaire de pôle o' et la résultante est R_h.

Le point de rencontre G des deux résultantes R_v et R_h est le centre de gravité du contour polygonal donné.

104. Application à la surface formée par un quadrilatère. — Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 72).

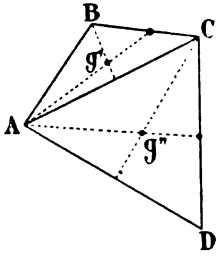


Fig. 72.

Il suffit de le décomposer en triangles, et, à cet effet, on tire la diagonale AC.

Les centres de gravité g' et g'' des deux triangles sont connus.

L'évaluation des forces proportionnelles aux surfaces peut se faire de deux manières :

1° En calculant les surfaces;

2° En remplaçant par le procédé du n° 54 les surfaces par une longueur, et, dans ce cas, il y a lieu de les réduire à une base commune (n° 55).

Ensuite, quelle que soit la manière employée, il suffit, comme dans le n° 102, de chercher le point d'intersection des résultantes de deux systèmes de forces parallèles, chacun d'eux, à une direction donnée.

105. Application à un fer à T (*fig.* 73). — La figure possède un axe de symétrie vertical AB, qui renferme alors le centre de gravité.

Elle peut être décomposée en deux rectangles (hachurés de manière différente), dont les centres de gravité sont g' et g''.

Les surfaces de ces rectangles sont :

Pour g'..... $45^{mm} \times 5 = 225^{mm2}$
— g''..... $40^{mm} \times 5 = 200^{mm2}$.

On porte horizontalement dans un polygone des forces, à

Digitized by Google

l'échelle de 1 centimètre pour 100^{mm2}, les longueurs

$$ab = g' = \frac{225}{100} = 2^{cm},25 \text{ et } bc = g'' = \frac{200}{100} = 2 \text{ centimètres.}$$

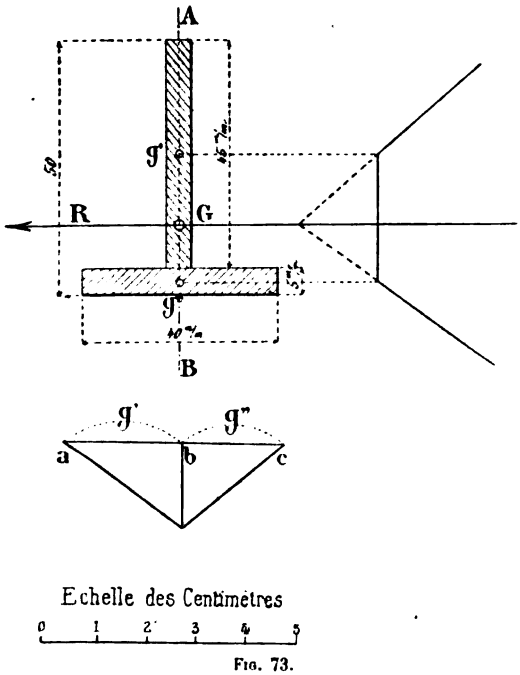


Fig. 73.

On prend un pôle, on trace le polygone funiculaire correspondant, et la résultante horizontale R rencontre l'axe de symétrie AB au point G, qui est le centre de gravité cherché.

106. Emploi du calcul dans la recherche des centres de gravité. — Le calcul s'emploie surtout lorsque la figure plane possède un axe de symétrie.

On considère les surfaces simples composant la figure comme des forces perpendiculaires à l'axe de symétrie et l'on

Digitized by Google

divise la somme des moments de ces forces, par rapport à un point de cet axe, par la somme des forces.

On obtient ainsi la distance du point donné à la résultante des forces, et, par cela même, la position du centre de gravité sur l'axe de symétrie, cette résultante étant par définition parallèle aux forces, c'est-à-dire perpendiculaire à cet axe.

Si :

S_1, S_2, S_3 et S_4 sont les surfaces simples;

y_1, y_2, y_3 et y_4, la distance de leur centre de gravité à un point de l'axe de symétrie;

La distance du centre de gravité de la surface totale sera donnée par la formule :

$$Y = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{\Sigma Sy}{\Sigma S}.$$

Il y a lieu de tenir compte, dans cette formule, du signe des moments : + pour les moments positifs et — pour les moments négatifs.

Application à l'exemple du n° 105. — Les surfaces simples sont :

Pour g' .... $45^{mm} \times 5^{mm} = 225$ millimètres carrés.
— g'' .... $40^{mm} \times 5^{mm} = 200$ millimètres carrés.

On prendra les moments par rapport au point g', et on a :

pour g' .... $y' = 0$
pour g'' .... $y'' = \frac{45^{mm}}{2} + \frac{5^{mm}}{2} = 25$ millimètres.

On trouve comme distance du centre de gravité G au point g' :

$$Y = \frac{225^{mm2} \times 0 + 200^{mm2} \times 25^{mm}}{225 + 200} = 11^{mm},76 \text{ environ.}$$

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE

POUTRES DROITES A AME PLEINE SUR DEUX APPUIS LIBRES OU ENCASTRÉS

CHAPITRE VII

GÉNÉRALITÉS

107. Définitions. — On appelle poutre droite à âme pleine une pièce prismatique dont l'axe longitudinal, ou fibre moyenne, est une ligne droite.

On suppose, dans ce qui va suivre, que les forces extérieures agissent normalement à la fibre moyenne et qu'elles se trouvent dans le plan de symétrie longitudinal.

On suppose également que l'axe longitudinal, en se déformant, reste dans son plan de symétrie.

Dans une pareille poutre, il ne peut y avoir ni couple de torsion, ni effort normal; le moment fléchissant et l'effort tranchant seuls y sont déterminés.

108. Conventions sur les signes. — On choisit, comme origine des coordonnées, l'extrémité de gauche de la poutre.

L'axe des x est l'axe longitudinal et il est compté positivement de gauche à droite.

L'axe des y est la perpendiculaire élevée sur l'axe longitudinal à l'origine, et le sens positif est compté de bas en haut.

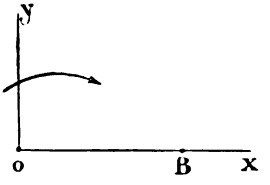


Fig. 74.

Les *moments fléchissants* sont positifs lorsqu'ils tendent à faire tourner leur bras de levier dans le sens de la marche des

Digitized by Google

aiguilles d'une montre, c'est-à-dire suivant la flèche de la figure 74.

Les efforts tranchants sont positifs lorsqu'ils sont dirigés de bas en haut.

109. Rappel des principes fondamentaux. — Une poutre posée sur deux appuis, libres ou non, soumise à des forces normales à la fibre moyenne, est en équilibre si l'on ajoute sur les appuis deux *réactions* également normales à la fibre moyenne, et dont la somme est égale et de sens contraire à la résultante des forces qui agissent sur cette poutre.

La *force extérieure* à une section est la résultante de toutes les forces, y compris les réactions, situées à gauche de la section.

Ainsi, pour la poutre AB posée sur *deux appuis libres*, soumise à l'action des forces P_1, P_2 et P_3, dont les réactions sur les appuis sont R_g et R_d, la *force extérieure* à la section C a pour valeur $R_g - P_1$ (*fig.* 75).

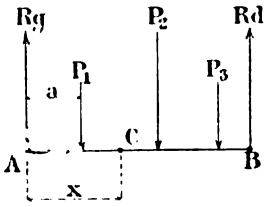


Fig. 75.

Le *moment fléchissant* au centre de gravité d'une section est égal à la somme des moments, par rapport à ce centre de gravité, de toutes les forces situées à gauche, y compris les réactions des appuis, en y ajoutant le moment fléchissant sur l'appui de gauche, s'il existe, et en tenant compte du signe des moments.

Ainsi, dans l'exemple choisi, la poutre étant sur appuis libres, il ne se produit pas de moment fléchissant sur les appuis, et le moment fléchissant au point C a pour valeur :

$$M_C = R_g x - P_1 (x - a).$$

S'il existe un moment fléchissant ω_A en A, la valeur du moment fléchissant en C devient :

$$M_C = R_g x - P_1 (x - a) + \omega_A.$$

Digitized by Google

L'*effort tranchant* dans une section est égal à la force extérieure à cette section, soit pour la section C :

$$T_C = R_g - P_1.$$

L'effort tranchant peut être encore exprimé d'une autre manière ; il est égal, en effet, à la dérivée du moment fléchissant prise par rapport à l'abscisse de la section considérée.

Ainsi on a pour la section C :

$$\frac{dM_C}{dx} = R_g - P_1.$$

La *fibre moyenne déformée* a pour équation celle obtenue en intégrant deux fois l'équation des moments fléchissants.

La flèche en un point donné s'obtient alors en donnant, dans cette équation, à x la valeur de l'abscisse du point considéré.

On a vu (n° 32) que l'équation des moments fléchissants peut s'écrire de la manière suivante :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

En intégrant deux fois, on aura successivement :

$$EI \frac{dy}{dx} = \int (M) + C$$

$$EIy = \int (\int M + C) + C_1.$$

La dernière de ces équations permet de déterminer les flèches y pour certaines valeurs de x et notamment la flèche maxima.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII

POUTRES DROITES POSÉES LIBREMENT SUR DEUX APPUIS

---

§ 1. — CHARGES FIXES ET DIRECTES

Les charges directes sont celles qui agissent directement sur la poutre, sans l'intermédiaire de pièces secondaires.

Exemples : le poids propre d'une poutre; la charge transmise par un galet de pont roulant sur une poutre, etc.

Les charges sont divisées en deux catégories : les charges uniformément réparties et les charges isolées.

Les premières ont, dans toute leur étendue, la même valeur par unité de longueur.

Les deuxièmes s'entendent pour un poids agissant en un point.

A. — Charges uniformément réparties

110. **Charges uniformes complètes. — Poutre posée librement sur deux appuis et chargée sur toute sa longueur d'une charge uniformément répartie verticale de p kilogrammes par mètre courant** (*fig.* 76).

Soit l la portée de la poutre, c'est-à-dire la distance entre les deux points d'appui A et B.

Réactions des appuis. — La charge est symétrique par rapport au milieu de la poutre, les réactions de gauche et

Digitized by Google

de droite : R_g et R_d, sont égales et ont pour valeur :

$$R_g = R_d = \frac{pl}{2}.$$

Elles sont dirigées de bas en haut.

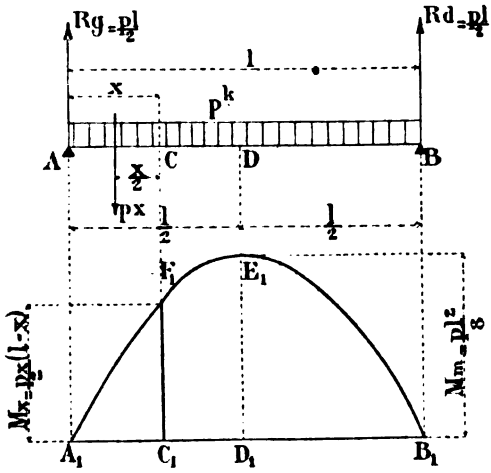


Fig. 76.

Moments fléchissants. — Dans une section quelconque C située à une distance x de l'appui de gauche, le moment fléchissant a pour valeur (n° 108) :

$$M_x = \frac{pl}{2}x - px\frac{x}{2} = \frac{px}{2}(l - x).$$

Quel que soit le point de la poutre, le moment fléchissant est toujours positif.

Sur les appuis, ce moment est nul, et il atteint son maximum au milieu de la portée ; sa valeur est alors :

$$M_m = \frac{pl^2}{8}.$$

Digitized by Google

La ligne représentative des moments fléchissants pour la charge uniformément répartie est une parabole $A_1E_1B_1$ à axe vertical, ayant son sommet E_1 sur cet axe et situé à une hauteur :

$$D_1E_1 = \frac{pl^2}{8}.$$

Pour un point quelconque C, situé à une distance x de l'appui de gauche, le moment fléchissant a pour valeur :

$$Mx = C_1F_1 = \frac{px}{2}(l - x).$$

Construction de la parabole (*fig.* 77). — On porte, sur l'axe vertical qui passe par le milieu de la portée : $DE = \frac{pl^2}{8}$, à une échelle convenue; on joint le point E aux deux appuis A et B et, par un de ces appuis, on mène AY parallèle à DE.

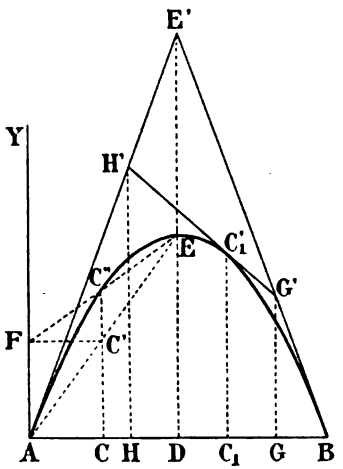


Fig. 77.

Ceci fait, pour déterminer un point de la parabole correspondant à un point C de la poutre, il suffit de mener CC′ parallèle à DE, ensuite C′F parallèle à AB, et finalement de joindre F et E.

Le point de rencontre C″ de FE avec CC′ prolongée est le point de la parabole cherché.

On peut donc déterminer par ce moyen plusieurs points que l'on réunit par une courbe continue.

Les tangentes aux appuis sont AE′ et E′B. Le point E′ est obtenu en portant :

$$DE' = 2DE = \frac{1}{4}pl^2.$$

Digitized by Google

La tangente en un point quelconque C_1' s'obtient, au moyen des tangentes aux appuis, en joignant les points H' et G' déterminés, sur ces deux tangentes, par des parallèles H'H et GG' à l'axe DE, menées par les milieux des segments AC_1 et C_1B.

Ainsi on a :

$$AH = HC_1 = \frac{AC_1}{2},$$

et

$$C_1G = GB = \frac{C_1B}{2}.$$

Ce dernier procédé permet donc de mener une tangente à la parabole sans que la courbe soit tracée.

Efforts tranchants (*fig.* 78). — L'effort tranchant en un point quelconque C, d'abscisse x, a pour valeur (n° 109) :

$$Tx = \frac{pl}{2} - px.$$

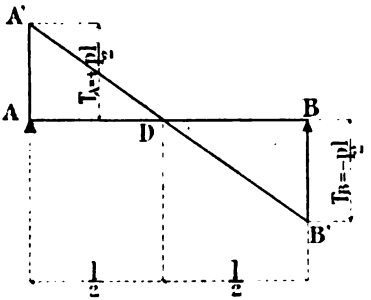


Fig. 78.

L'effort tranchant est positif sur l'appui de gauche ; il est nul au milieu de la poutre, et il est négatif à l'appui de droite.

Sur les deux appuis, l'effort tranchant est maximum, et sa valeur absolue est :

$$T = \frac{pl}{2}.$$

La ligne représentative des efforts tranchants est une droite A'DB' qui passe par le milieu D de la poutre et qui découpe sur les verticales des appuis les segments :

$$AA' = +\frac{pl}{2} \quad \text{et} \quad BB' = -\frac{pl}{2}.$$

Digitized by Google

Flèches. — La formule qui donne la flèche en un point quelconque de la poutre située à une distance x de l'appui de gauche est :

$$y = \frac{1}{EI} \times \frac{px}{24} (2lx^2 - x^3 - l^3).$$

La flèche maxima se produit au milieu de la portée, et sa valeur est :

$$f = -\frac{5pl^4}{384EI}.$$

111. Application à une poutre de 5 mètres de portée et soumise à l'action d'une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant.

Réactions des appuis :

$$R_g = R_d = \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} 2^T \times 5^m = 5 \text{ tonnes.}$$

Moment fléchissant maximum :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 2^T \times 5^2 = 6^{TM},25.$$

Efforts tranchants :

$$\text{Sur les appuis } T = \pm \frac{pl}{2} = \pm 5 \text{ tonnes.}$$

Représentation des moments fléchissants et des efforts tranchants (fig. 79).

Echelles adoptées :

Longueurs	1 centimètre par mètre.
Forces.....	1 centimètre pour 2 tonnes.
Moments fléchissants..	1 centimètre pour 2 tonnes-mètres.

On prend :

$$AB = 5^m \times 1^{cm} = 5 \text{ centimètres,}$$

et on élève en son milieu D une perpendiculaire sur

Digitized by Google

laquelle on porte :

$$DE = \frac{6^{Tm},25}{2^{Tm}} = 3^{cm},125.$$

Pour différents points a, b, c, on fait la construction du n° 110 pour obtenir les points a', b', c' de la parabole, que l'on joint par une courbe continue.

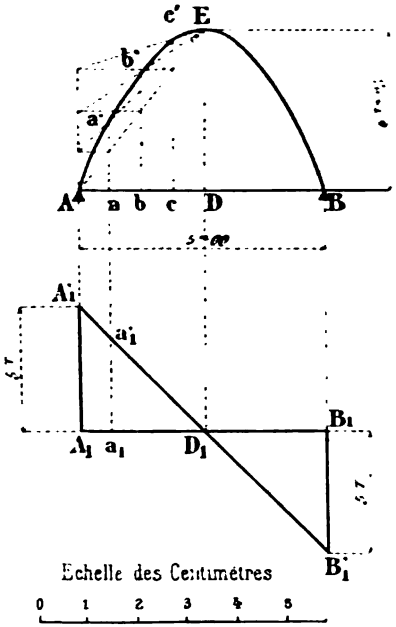


Fig. 79.

Les ordonnées aa', bb', cc', mesurées en centimètres, et multipliées par 2 tonnes-mètres, donnent les valeurs des moments fléchissants aux points a, b, c de la poutre.

Pour les efforts tranchants, on porte sur les appuis :

$$A_1A_1' = B_1B_1' = \frac{5^T}{2^T} = 2^{cm},5$$

Digitized by Google

et on joint $A'_1B'_1$. Cette droite passe par le milieu D_1 de la poutre.

Une ordonnée quelconque a_1a_1', mesurée en centimètres et multipliée par 2 tonnes, donne la valeur de l'effort tranchant en a.

Flèche maxima. — Si le moment d'inertie est constant et égal à 0,0005, et si le coefficient d'élasticité est :

$$E = 16 \times 10^9,$$

la flèche maxima au milieu a pour valeur :

$$f = \frac{5}{384} \times \frac{2000 \times 5^4}{0{,}0005 \times 16\,000\,000\,000} = 0^m{,}002.$$

112. Charges uniformes partielles. — La poutre AB, de portée l, est chargée d'un poids uniforme p par mètre, sur une longueur α (*fig.* 80).

La charge totale est donc $p\alpha$, elle est supposée appliquée au milieu de la longueur α, au point E distant des deux appuis des longueurs a et b.

Réactions des appuis :

$$R_g = \frac{p\alpha \times b}{l} \qquad \text{et} \qquad R_d = \frac{p\alpha \times a}{l}.$$

Moments fléchissants (*fig.* 80). — Pour un point quelconque de A en C, on a :

$$M = R_g x = \frac{p\alpha b}{l} x;$$

de C en D :

$$M = R_g x - \frac{p}{2}\left(x - a + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{p\alpha b}{l} x - \frac{p}{2}\left(x - a + \frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

de D en B :

$$M = R_g x - p\alpha(x - a) = \frac{p\alpha b}{l} x - p\alpha(x - a).$$

Digitized by Google

Les moments fléchissants sont toujours positifs.
Ils sont nuls aux deux appuis.

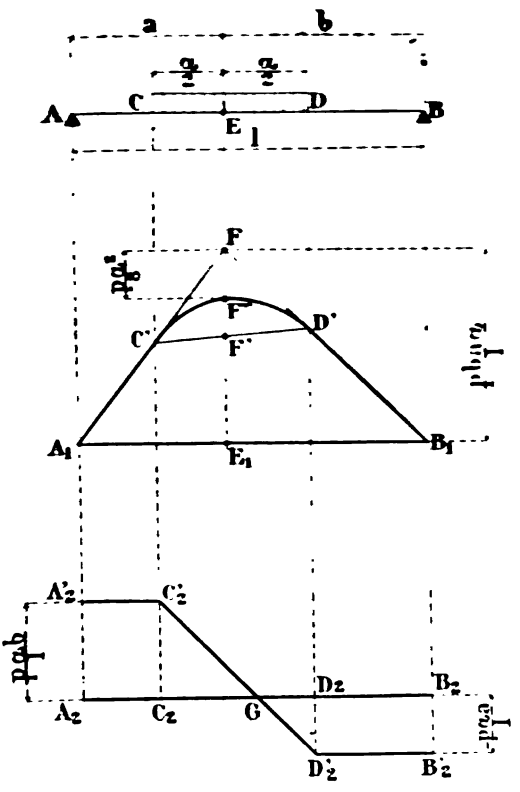


Fig. 80.

Le moment fléchissant maximum se produit pour :

$$x = a + \alpha\left(\frac{b}{l} - \frac{1}{2}\right)$$

et sa valeur est :

$$M_m = \frac{p\alpha ba}{2l^2}\ 2l - \alpha).$$

Digitized by Google

La *ligne représentative* des moments fléchissants se trace de la manière suivante :

Sur la perpendiculaire à A_1B_1, élevée en E_1, au milieu de $CD = \alpha$, on portera :

$$E_1F = \frac{p\alpha ab}{l}.$$

On joindra le point F aux appuis A_1 et B_1, et, par les points C et D, extrémités de la charge, on tracera des verticales qui rencontrent A_1F et FB_1 aux points C′ et D′.

La droite C′D′ détermine sur E_1F le point F′, et il suffira de diviser F′F en deux parties égales pour obtenir le point F″ qui appartient à la ligne des moments fléchissants.

Cette ligne se compose d'un arc de parabole C′F″D′, qui peut être tracé par la méthode du n° 110, et de deux droites A_1C' et B_1D' tangentes à l'arc de parabole en C′ et D′.

La distance FF″ ou F′F″ est égale à :

$$FF'' = F'F'' = \frac{p\alpha^2}{8}.$$

Efforts tranchants (*fig.* 80). — De A en C, l'effort tranchant est positif, constant et égal à :

$$T = R_g = \frac{p\alpha b}{l};$$

de C à D, il est variable, et sa valeur est donnée par la formule :

$$T_{C-D} = \frac{p\alpha b}{l} - p\left(x - a + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Enfin, de D en B, il est négatif, constant et égal à :

$$T_{D-B} = -\frac{p\alpha a}{l}.$$

La *ligne représentative* des efforts tranchants se compose e trois droites, savoir :

$A_2'C_2'$ parallèle à A_2B_2, telle que :

$$A_2A_2' = C_2C_2' = \frac{p\alpha b}{l};$$

Digitized by Google

$D'_2B'_2$ parallèle à A_2B_2, telle que :

$$B_2B'_2 = D_2D'_2 = -\frac{p\alpha a}{l};$$

enfin la droite $C'_2D'_2$.

Le point G, où cette dernière droite coupe la ligne AB, correspond au point où le moment fléchissant est maximum.

113. **Charge symétrique.** — Si la charge partielle est symétrique par rapport au milieu de la poutre (*fig.* 81), on a alors :

$$a = b = \frac{l}{2}.$$

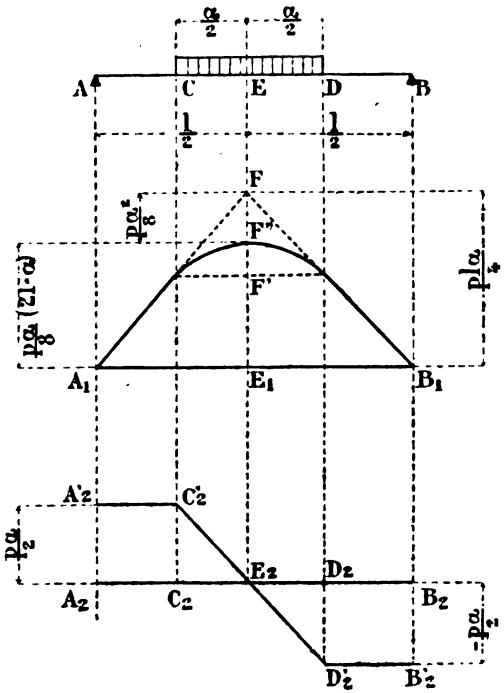


Fig. 81.

Le moment fléchissant maximum se produit au milieu de

Digitized by Google

la portée, sa valeur est :

$$M_m = \frac{p\alpha}{8}(2l - \alpha).$$

Les efforts tranchants sur les appuis ont même valeur absolue :

$$T = \frac{p\alpha}{2}.$$

La figure 81 donne les indications nécessaires pour tracer les lignes représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants (*Voir le cas du n° 112*).

114. Charges partielles de longueurs α et β, d'intensités différentes p et q au mètre courant, placées à chaque extrémité de la poutre (*fig.* 82).

Réactions :

$$R_g = \frac{p\alpha\left(l - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q\beta^2}{2}}{l},$$

$$R_d = \frac{\frac{p\alpha^2}{2} + q\beta\left(l - \frac{\beta}{2}\right)}{l}.$$

Moments fléchissants. — De A en C, arc de parabole :
Valeur du moment fléchissant :

$$M = R_g x - \frac{px^2}{2};$$

De C en D, droite :
Valeur du moment fléchissant :

$$M = R_g x - p\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Digitized by Google

Enfin, de D en B, arc de parabole :
Valeur du moment fléchissant :

$$M = R_g x - px\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{q}{2}(x - l + \beta)^2.$$

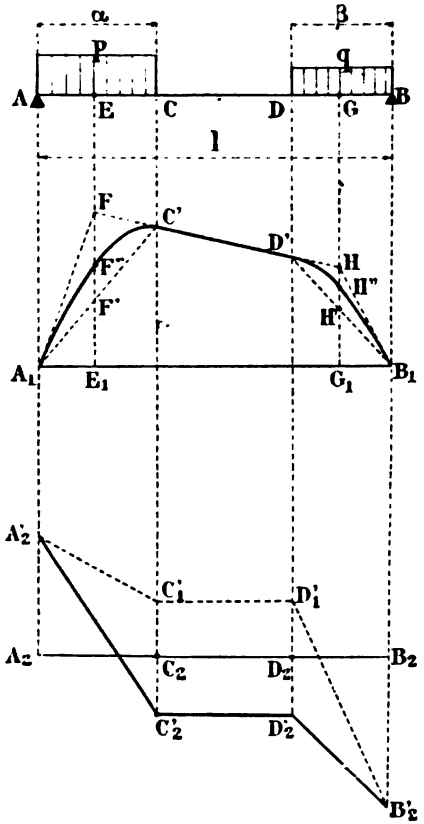


Fig. 82.

Ligne représentative des moments fléchissants. — Sur les verticales passant par le milieu de α et de β, en E et G,

Digitized by Google

on porte :

$$E_1F = R_g \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad G_1H = R_d \frac{\beta}{2}.$$

On joint par des droites les points A_1FHB_1, et, par les extrémités C et D des charges, on trace des verticales qui déterminent sur FH les points C′ et D′.

On mène les droites $C'A_1$ et $D'B_1$ qui déterminent les points F′ et H′ sur les verticales de F et de H, et on divise en deux parties égales les segments FF′ et HH′. Les points F″ et H″ ainsi obtenus appartiennent aux arcs de parabole $A_1F''C'$ et $B_1H''D'$; la ligne représentative est complétée par la droite C′D′ qui est tangente aux arcs de parabole en C′ et D′.

Efforts tranchants :

De A en C :

$$T = R_g - px \quad \begin{cases} \text{en A, positif et égal à } R_g\,; \\ \text{en C, } T_C = R_g - p\alpha \text{ positif si } R_g > p\alpha. \end{cases}$$

De C en D:

$$T = R_g - p\alpha \qquad \text{constant et positif si } R_g > p\alpha.$$

De D en B :

$$T = R_g - p\alpha - q(x - l + \beta) \quad \begin{cases} T_D = R_g - p\alpha\,; \\ T_B = -R_d \text{ (négatif).} \end{cases}$$

La ligne représentative des efforts tranchants est celle indiquée dans la figure 82, pour laquelle on a :

$$A_2A_2' = R_g$$
$$C_2C_1' = D_2D_1' = R_g - p\alpha \text{ (positif)}$$

ou :

$$C_2C_2' = D_2D_2' = R_g - p\alpha \text{ (négatif)}$$
$$B_2B_2' = -R_d.$$

On a donc, suivant le cas :

$$A_2'C_1'D_1'B_2'$$

Digitized by Google

ou :

$$A_2'C_2'D_2'B_2'.$$

115. Charges de même valeur. — Si $\alpha = \beta$ et $p = q$, c'est-à-dire si les charges ont même valeur, on a alors :

$$R_g = R_d = p\alpha$$
$$M_C = M_D = \frac{p\alpha^2}{2}.$$

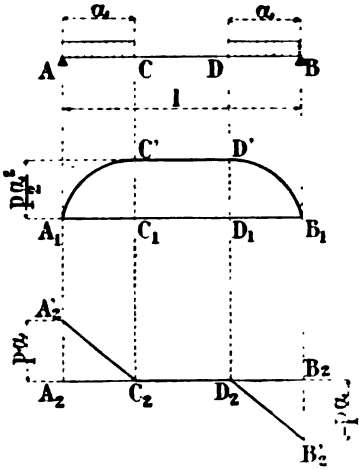


Fig. 83.

La ligne représentative des moments fléchissants se compose (*fig.* 83) de 2 arcs de parabole tangents en C' et D' à l'horizontale C'D' qui a pour ordonnée $\frac{p\alpha^2}{2}$.

Les efforts tranchants sur appuis sont :

$$A_2A_2' = B_2B_2' = T = \pm p\alpha,$$

et ces efforts sont nuls de C en D.

La ligne représentative est donc $A_2'C_2D_2B_2'$.

Digitized by Google

116. Charge unique. — Si la poutre ne contient plus qu'une charge, celle de gauche par exemple, on a (*fig.* 84) :

Réactions :

$$R_g = \frac{p\alpha(2l - \alpha)}{2l}$$

$$R_d = \frac{p\alpha^2}{2l}.$$

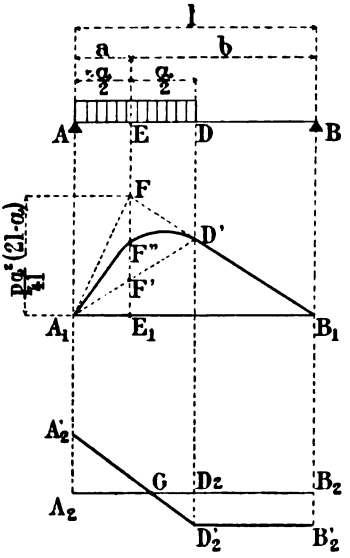


Fig. 84.

Moments fléchissants. — *De* A *en* D (arc de parabole) :
Valeur du moment fléchissant :

$$M_{A-D} = \frac{p\alpha(2l - \alpha)}{2l}x - \frac{p}{2}x^2.$$

De D *en* B (ligne droite) :
Valeur du moment fléchissant :

$$M_{D-B} = \frac{p\alpha^2}{2l}(l - x).$$

Digitized by Google

Moment fléchissant maximum pour $x = \frac{R_g}{p}$, dont la valeur est :

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p}.$$

La *ligne représentative* des moments fléchissants se trace comme dans le n° 112, mais en remarquant que $AC = 0$, ce qui donne $a = \frac{\alpha}{2}$.

On porte sur la verticale du milieu de α :

$$E_1F = \frac{p\alpha^2}{4l}(2l - \alpha),$$

et il n'y a plus qu'à déterminer les points D' et F''. Le point D' se trouve à la rencontre de FB_1 et de la verticale de D; et F'' est le milieu de FF'.

On a ainsi un arc de parabole $A_1F''D'$ terminé par la tangente $D'B_1$.

Efforts tranchants :

En A :

$$T_A = \frac{p\alpha(2l - \alpha)}{2l} = R_g \text{ (positif)};$$

De A en D :

$$T_{A-D} = \frac{p\alpha(2l - \alpha)}{2l} - px;$$

En D :

$$T_D = -\frac{p\alpha^2}{2l} \text{ (négatif)};$$

de D en B, l'effort tranchant est constant et négatif, il a même valeur que :

$$T_D = T_{D-B} = -\frac{p\alpha^2}{2l} = -R_d.$$

La *ligne représentative* des efforts tranchants est $A_2'D_2'B_2'$ de la figure 84, dans laquelle :

$$A_2A_2' = R_g \qquad \text{et} \qquad B_2B_2' = D_2D_2' = -R_d.$$

Digitized by Google

Le point G détermine le point où le moment fléchissant est maximum.

B. — Charges concentrées

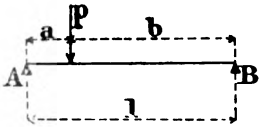


Fig. 85.

117. Charge unique en un point quelconque de la poutre. — Une poutre de portée AB $= l$ reçoit une charge P située à des distances a et b des appuis (*fig.* 85).

Réactions. — Les réactions ont pour valeur :

$$R_g = \frac{Pb}{l} \qquad \text{et} \qquad R_d = \frac{Pa}{l}.$$

Moments fléchissants. — Les formules générales des moments fléchissants sont (*fig.* 86) :

De A en C :

$$M = \frac{Pb}{l}\,x;$$

De C en B :

$$M = \frac{Pb}{l}\,x - P\,(x - a)$$
$$= \frac{Pa}{l}\,(l - x).$$

Le moment fléchissant maximum se produit au droit de la charge et il a pour valeur :

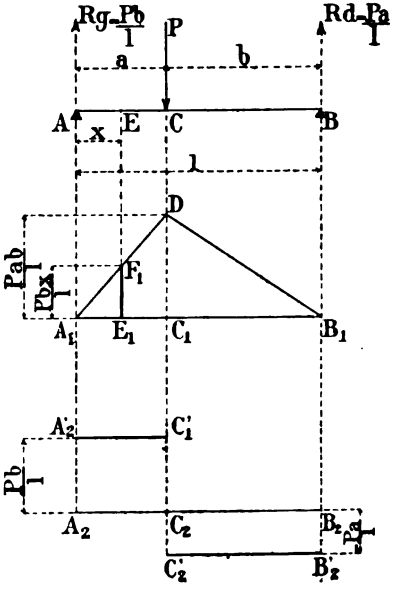


Fig. 86.

$$M_m = M_C = \frac{Pba}{l}.$$

Digitized by Google

Ligne représentative des moments fléchissants. — On porte sur la verticale du point C, correspondant à la charge, une longueur :

$$C_1D = \frac{Pab}{l},$$

et on joint ce point D aux deux appuis A_1 et B_1.

Les moments fléchissants sont représentés par les ordonnées du triangle A_1DB_1.

En un point quelconque E_1, d'abscisse x, situé dans le premier tronçon AC, le moment fléchissant a pour valeur l'ordonnée E_1F_1, qui est égale à $\frac{Pb}{l}x$.

Pour un point quelconque du deuxième tronçon CB, l'ordonnée à la distance x aurait pour valeur :

$$Mx = \frac{Pa}{l}(l - x).$$

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont constants dans chaque tronçon AC et CB.

De A en C, il est positif et égal à $R_g = \frac{Pb}{l}$, et, de C en B, il est négatif et égal à $R_d = -\frac{Pa}{l}$.

Ligne représentative des efforts tranchants. — On porte $A_2A_2' = C_2C_1' = +\frac{Pb}{l}$ et $C_2C_2' = B_2B_2' = -\frac{Pa}{l}$.

Les ordonnées des rectangles $A_2A_2'C_1'C_2$ et $C_2C_2'B_2'B_2$ représenteront les efforts tranchants.

On remarque qu'ils changent brusquement de signe au droit de la charge.

118. Cas où la charge unique se trouve au milieu de la portée (*fig.* 87). — Pour ce cas particulier, il suffit de faire $a = b = \frac{l}{2}$ dans les formules du n° 117; on obtient alors :

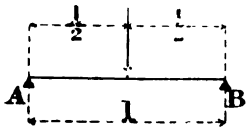


Fig. 87.

Réactions :

$$R_g = R_d = \frac{P}{2}.$$

Digitized by Google

Moments fléchissants :

De l'appui de gauche au milieu..... $M = \frac{P}{2} x$;

Du milieu à l'appui de droite..... $M = \frac{P}{2} (l - x)$;

Maximum au milieu de la portée..... $M_m = \frac{Pl}{4}$.

Le triangle A_1DB_1 qui représente les moments fléchissants est isocèle; la hauteur C_1D au milieu de la portée a pour valeur $\frac{Pl}{4}$ (*fig.* 88).

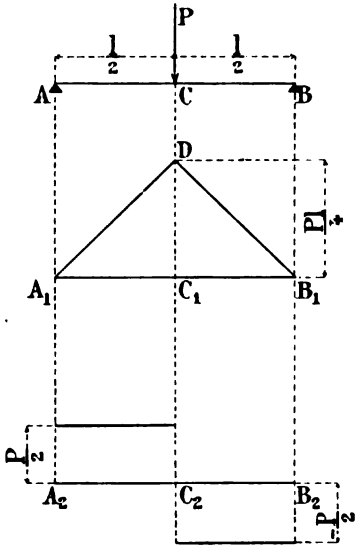


Fig. 88.

Efforts tranchants. — Ils sont constants dans les deux tronçons et ont même valeur $\frac{P}{2}$; mais ils sont de signe contraire.

Positifs de A en C et négatifs de C en B.

Digitized by Google

Flèches. — L'équation générale de la ligne élastique est :

$$y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3xl^2).$$

La flèche maxima se produit au milieu de la poutre; sa valeur est :

$$f = -\frac{Pl^3}{48EI}.$$

119. Application à une poutre de 10 mètres de portée qui

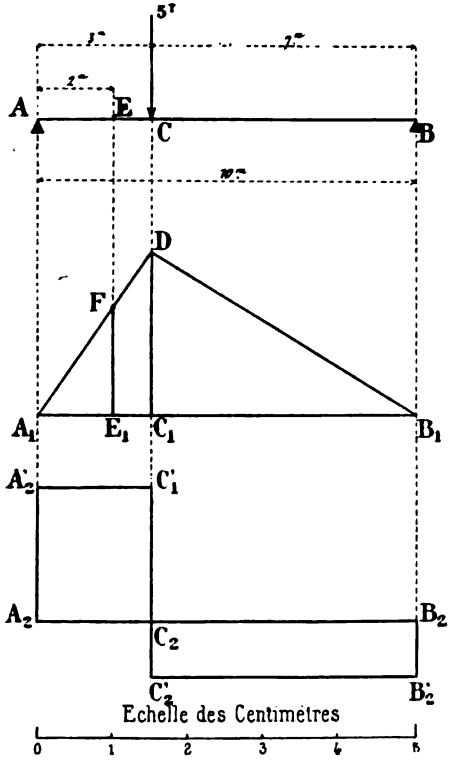


Fig. 89.

est soumise à l'action d'une charge concentrée de 5 tonnes agissant à 3 mètres de l'appui de gauche (*fig.* 89).

Digitized by Google

Réactions :

$$R_g = \frac{Pb}{l} = \frac{5^T \times 7^m}{10^m} = 3^T,5;$$

$$R_d = \frac{Pa}{l} = \frac{5^T \times 3^m}{10^m} = 1^T,5.$$

Moment fléchissant maximum. — Il se produit en C, il a pour valeur :

$$M_C = \frac{Pba}{l} = \frac{5^T \times 3^m \times 7^m}{10^T} = 10^{Tm},5.$$

Efforts tranchants :

De A en C : constant, positif et égal à $\frac{Pb}{l} = 3^T,5$;

De C en B : constant, négatif et égal à $-\frac{Pa}{l} = -1^T,5$.

Représentation des moments fléchissants et des efforts tranchants.

Échelles adoptées :

Longueurs.....	5 millimètres par mètre.
Forces.....	1 centimètre pour 2 tonnes.
Moments fléchissants.	1 centimètre pour 5 tonnes-mètres.

On prend :

$$A_1B_1 = 10 \times 5^{mm} = 50 \text{ millimètres}$$

et

$$AC = 3 \times 5^{mm} = 15 \text{ millimètres.}$$

Sur la verticale élevée en C_1, on porte :

$$C_1D = \frac{10^{Tm},5}{5} = 2^{cm},1.$$

On joint le point D aux appuis; les ordonnées du triangle

Digitized by Google

A_1DB_1 représentent, à l'échelle de 1 centimètre pour 5 tonnes-mètres, les moments fléchissants.

Ainsi, au point E_1 situé à 2 mètres de l'appui A, l'ordonnée E_1F mesure $1^{cm},4$; le moment fléchissant en ce point aura comme valeur :

$$M = 1^{cm},4 \times 5^{Tm} = 7 \text{ tonnes-mètres.}$$

Pour les efforts tranchants, il suffit de porter positivement :

$$A_2A_2' = \frac{3^T,5}{2} = 1^{cm},75$$

et négativement :

$$B_2B_2' = \frac{1^T,5}{2} = 0^{cm},75.$$

On mène ensuite à A_2B_2 les parallèles $A_2'C_1'$ et $C_2'B_2'$.

La ligne représentative des efforts tranchants est :

$$A_2A_2'C_1'C_2C_2'B_2'B_2.$$

120. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges concentrées P_1, P_2, P_3 (*fig.* 90). — On peut appliquer pour chacune des charges le procédé du n° 117 et tracer pour chacune d'elles les polygones des moments fléchissants et des efforts tranchants; il suffit ensuite de faire leur somme géométrique pour obtenir les polygones représentatifs pour toutes les charges réunies.

Mais on peut aussi exprimer analytiquement ces résultats.

Réactions :

$$R_g = \frac{\Sigma P(l-a)}{l} = \frac{P_1(l-a_1) + P_2(l-a_2) + P_3(l-a_3)}{l}$$

$$R_d = \frac{\Sigma Pa}{l} = \frac{P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3}{l}.$$

Digitized by Google

Moments fléchissants :

De A en C :

(1) $$M = R_g x;$$

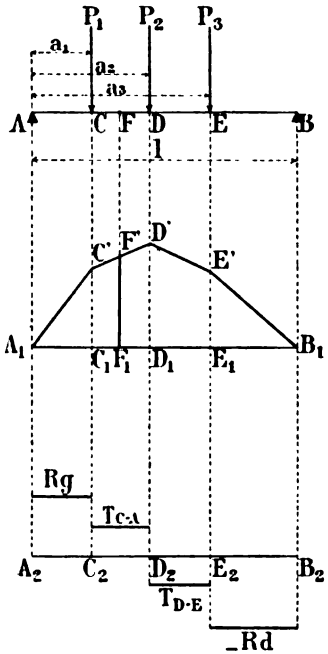


Fig. 90.

De C en D :

(2) $$M = R_g x - P_1 (x - a_1);$$

De D en E :

(3) $$M = R_g x - P_1 (x - a_1) - P_2 (x - a_2);$$

De E en B :

$$M = R_g x - P_1 (x - a_1) - P_2 (x - a_2) - P_3 (x - a_3).$$

Digitized by Google

Ces moments fléchissants sont toujours positifs, et le moment fléchissant maximum se produit toujours au droit d'une des charges.

Pour l'obtenir, il suffit donc de rechercher les différentes valeurs de ces moments au point d'application des charges.

La formule (1) donne pour $x = a_1$:

$$M_C = R_g a_1;$$

La formule (2) donne pour $x = a_2$:

$$M_D = R_g a_2 - P_1 (a_2 - a_1);$$

La formule (3) donne pour $x = a_3$:

$$M_E = R_g a_3 - P_1 (a_3 - a_1) - P_2 (a_3 - a_2).$$

La ligne représentative des moments fléchissants est un polygone $A_1C'D'E'B_1$ obtenu en portant $C_1C' = M_C$, $D_1D' = M_D$ et $E_1E' = M_E$.

Une ordonnée quelconque F_1F', mesurée à l'échelle convenue, représente la valeur du moment fléchissant en F.

Efforts tranchants. — L'effort tranchant est constant entre deux charges consécutives ; les différentes valeurs de cet effort sont les suivantes :

De A en C, $T = R_g$ (toujours positif)
De C en D, $T = R_g - P_1$ (positif si $R_g > P_1$).
De D en E, $T = R_g - P_1 - P_2$ (positif si $R_g > P_1 + P_2$)
De E en B, $T = R_g - P_1 - P_2 - P_3$ (toujours négatif).

La ligne représentative des efforts tranchants est une série de droites parallèles à AB disposées en escalier, comme l'indique la figure 90.

121. Recherche du moment fléchissant maximum développé dans une poutre de 10 mètres de portée et soumise à l'action de trois charges : 3 tonnes, 1 tonne et 8 tonnes, disposées comme l'indique la figure 91.

Digitized by Google

Réactions :

$$R_g = \frac{3^T \times 9^m + 1^T \times 5^m + 8^T \times 3^m}{10^m} = 5^T,6$$

$$R_d = 3^T + 1^T + 8^T - 5^T,6 = 6^T,4$$

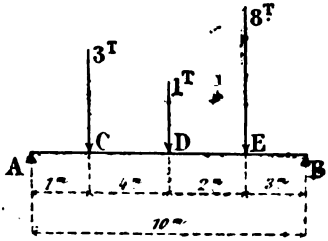


Fig. 91.

Moments fléchissants :

$$M_C = 5^T,6 \times 1^m = 5^{Tm},6$$

$$M_D = 5^T,6 \times 5^m - 3^T \times 4^m = 16^{Tm},0$$

$$M_E = 5^T,6 \times 7 - 3^T \times 6^m - 1^T \times 2^m = 19^{Tm},2$$

Le moment fléchissant maximum se produit donc en E sous la charge de 8 tonnes, et il a pour valeur :

$$M_m = 19^{Tm},2.$$

122. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme complète de p par mètre courant et d'une charge concentrée P_1 en un point quelconque (*fig.* 92). — Pour déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants, on trace, pour chacune des charges, les lignes représentatives de ces moments et efforts tranchants par les méthodes des nos 110 et 117, et on fait leur somme.

Ainsi, pour la charge uniformément répartie, on trace la parabole AF"B et, pour la charge P_1, le triangle AE'B.

En additionnant les ordonnées des deux lignes représentatives, on détermine un certain nombre de points G_1, E_1,

Digitized by Google

F_1, H_1, que l'on relie par une courbe qui représente la courbe enveloppe des moments fléchissants totaux.

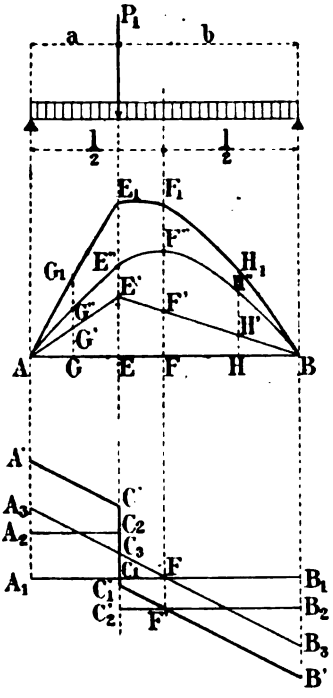


Fig. 92.

Pour les efforts tranchants, on sait que la ligne représentative, dans le cas d'une charge uniforme, est la droite A_3B_3, telle que (p. 93) :

$$A_1A_3 = B_1B_3 = \frac{1}{2}\,pl,$$

et, pour la charge concentrée, la ligne représentative est $A_2C_2C'_2B_2$, telle que :

$$A_2C_2 \text{ parallèle à } A_1B_1 = + R_g$$
$$C'_2B_2 \text{ parallèle à } A_1B_1 = - R_d$$

Digitized by Google

En faisant la somme des ordonnées et en tenant compte des signes, on obtient la ligne brisée A'C'C'$_1$B'.

Si l'on veut déterminer directement les moments fléchissants et les efforts tranchants, on emploie les équations ci-après :

Réactions :

$$R_g = \frac{pl}{2} + \frac{P_1 b}{l}, \qquad \text{et} \qquad R_d = \frac{pl}{2} + \frac{P_1 a}{l}.$$

Moments fléchissants. — Équations générales :

De A en E :

$$M = R_g x - \frac{px^2}{2};$$

De E en B :

$$M = R_g x - \frac{px^2}{2} - P_1 (x - a).$$

Le moment *fléchissant maximum* se produit dans le premier tronçon AE, si $R_g < pa$, et la valeur de x qui le détermine est : $x = \frac{R_g}{p}$.

L'expression du moment *fléchissant maximum* est dans ce cas :

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p}.$$

Si $R_g > pa$, le moment maximum peut alors se produire dans le deuxième tronçon EB, mais à la condition que $R_g - P_1 > pa$.

Si cette condition est remplie, on a pour l'abscisse du moment maximum : $x = \frac{R_g - P_1}{p}$, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{(R_g - P_1)^2}{2p} + P_1 a.$$

Enfin, si les deux conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites, c'est que le moment fléchissant est maximum au

Digitized by Google

point d'application de la charge concentrée, et sa valeur est alors :

$$M_m = M_E = R_g a - \frac{pa^2}{2}.$$

Efforts tranchants :

De A en E :

$$T_{A-E} = R_g - px;$$

De E en B :

$$T_{E-B} = R_g - px - P_1.$$

Pour l'appui A : $T_A = R_g$ (positif) ;

$$\text{Pour le point E 2 valeurs :} \begin{cases} T_E = R_g - pa \\ T_E = R_g - pa - P_1 \end{cases}$$

Pour l'appui B : $T_B = - R_d$ (négatif).

123. Détermination du moment fléchissant maximum dans une poutre de 6 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de 2 tonnes par mètre courant et d'une charge concentrée de 6 tonnes appliquée à 2 mètres de l'appui de gauche (*fig.* 93).

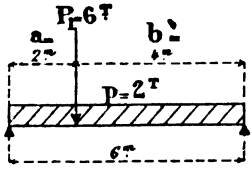


Fig. 93.

D'après le n° 122, on a :

$$R_g = \frac{pl}{2} + \frac{P_1 b}{l} = \frac{2^T \times 6^m}{2} + \frac{6^T \times 4^m}{6^m} = 10 \text{ tonnes.}$$

Les conditions qui déterminent la position du moment fléchissant maximum sont :

Digitized by Google

Pour le premier tronçon : $R_g < pa$,

$$R_g = 10 \text{ tonnes}, \qquad pa = 2^m \times 2^T = 4 \text{ tonnes},$$

condition non satisfaite.

Pour le deuxième tronçon : $R_g - P_1 > pa$,

$$R_g - P_1 = 10 - 6 = 4 \text{ tonnes}, \; pa = 4 \text{ tonnes},$$

la condition n'est également pas satisfaite.

Le moment maximum se produira donc au droit de la charge concentrée.

Sa valeur est :

$$= R_g a - \frac{pa^2}{2} = 10^T \times 2^m - \frac{2^T \times 2^2}{2} = 16 \text{ tonnes-mètres}.$$

124. **Même exemple que ci-dessus, mais la charge concentrée est située à 5 mètres de l'appui de gauche.** — Avec ces données :

$$a = 5 \text{ mètres} \qquad \text{et} \qquad b = 1 \text{ mètre}.$$

Réaction de gauche :

$$R_g = \frac{pl}{2} + \frac{P_1 b}{l} = \frac{2^T \times 6^m}{2} + \frac{6^T \times 1^m}{6^m} = 7 \text{ tonnes}.$$

Condition pour que le moment fléchissant maximum se produise dans le premier tronçon :

$$R_g < pa$$

$$R_g = 7 \text{ tonnes}, \qquad pa = 2 \text{ tonnes} \times 5 = 10 \text{ tonnes}.$$

La condition est donc satisfaite.

On a alors pour la valeur de x, qui rend le moment fléchissant maximum :

$$x = \frac{R_g}{p} = \frac{7^T}{2} = 3^m,50.$$

Valeur du moment fléchissant maximum :

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p} = \frac{7^2}{2 \times 2} = 12^{Tm},25.$$

Digitized by Google

§ 2. — CHARGES FIXES ET INDIRECTES

Les charges indirectes sont celles qui agissent sur la poutre par l'intermédiaire de pièces secondaires.

Exemple : les poutrelles de plancher qui reçoivent les charges par les solives, les poutres de pont dont les charges sont transmises par les entretoises, les fermes des charpentes qui reçoivent les réactions des pannes, etc.

A. — Charges uniformément réparties

125. La poutre AB reçoit les efforts d'une charge uniformément répartie *p* par mètre par l'intermédiaire de poutrelles attachées aux points C, D, E (*fig.* 94).

Moments fléchissants. — Les moments fléchissants aux points d'attache des poutrelles sont les mêmes que si la charge agissait directement sur la poutre; mais, entre ces points d'attache, les moments fléchissants sont moindres.

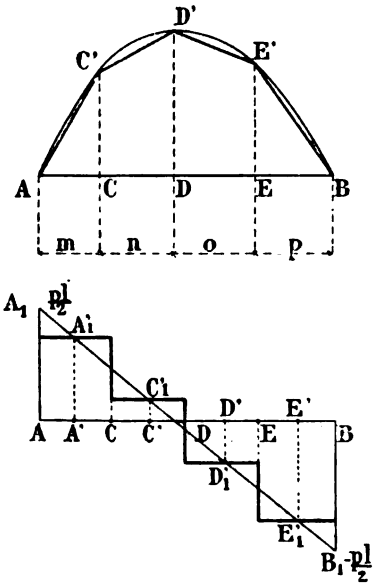


Fig. 94.

Pour tracer la ligne représentative de ces moments fléchissants, on commence par tracer la parabole correspondant à la charge directe de la poutre (n° 110) et, par les points d'attache C, D, E, on mène des

Digitized by Google

verticales qui rencontrent cette parabole aux points C', D', E', qui appartiennent à la nouvelle ligne représentative des moments fléchissants; il suffit ensuite, pour déterminer cette ligne, de joindre par des droites les points A, C', D', E', B.

Si l'on veut obtenir par le calcul les moments fléchissants aux points d'attache, il y a lieu de procéder de la manière suivante :

Soient m, n, o, p, les distances entre les poutrelles.

La charge concentrée au point C a pour valeur :

$$p \times \left(\frac{m+n}{2}\right).$$

Celles aux points D et E sont respectivement :

$$p \times \left(\frac{n+o}{2}\right) \quad \text{et} \quad p \times \left(\frac{o+p}{2}\right).$$

On revient donc au cas d'une poutre soumise à l'action directe de plusieurs charges concentrées agissant aux points C, D et E; ce cas a été traité dans le n° 119.

Efforts tranchants. — La ligne représentative des efforts tranchants, au lieu d'être une droite, comme dans le cas d'une charge uniforme directe, se compose d'une série de lignes brisées disposées en escalier. Les efforts tranchants sont constants dans chaque intervalle de poutrelles.

Pour déterminer cette droite, on commence par tracer la ligne A_1B_1, qui donne les efforts tranchants dans le cas d'une charge directe, et à cet effet on porte sur la verticale des appuis :

$$AA_1 = +\frac{pl}{2} \quad \text{et} \quad BB_1 = -\frac{pl}{2}.$$

Ensuite, par le milieu des intervalles des poutrelles, en A', C', D', E', on mènera des verticales que A_1B_1 rencontre aux points A'_1, C'_1, D'_1, E'_1.

Il suffit de mener par ces points, dans chaque intervalle, des horizontales pour déterminer la ligne des efforts tranchants, qui est tracée en traits forts dans la figure.

Digitized by Google

On aurait obtenu le même résultat en considérant les charges de la poutre concentrées aux points d'attache des poutrelles (n° 120).

Remarque. — L'effort tranchant aux appuis est inférieur à celui que donnerait la charge directe, mais les réactions sous les appuis sont les mêmes s'il existe une poutrelle sur ces appuis.

Cela tient à ce que, dans le cas des poutrelles, la portion de charge correspondant à $\frac{m}{2}$ ou $\frac{p}{2}$ a été reportée sur la poutrelle des appuis, et alors elle n'agit pas sur la poutre, mais elle agit comme réaction sous ces appuis.

126. Application. — **Deux poutres de 8 mètres de portée, distantes de 3 mètres d'axe en axe, reçoivent par l'intermédiaire de solives une charge uniformément répartie de 1.000 kilogrammes par mètre carré. Les solives sont écartées de 2 mètres** (*fig.* 95). — Les poutres ayant un écartement de 3 mètres et la charge uniforme étant de 1.000 kilogrammes par mètre carré, il s'ensuit que la charge par mètre courant pour une poutre sera :

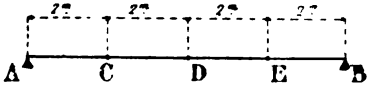


Fig. 95.

$$p = \frac{1000^k}{2} \times 3^m = 1.500 \text{ kilogrammes.}$$

Les distances entre les points d'attache des solives étant égales à 2 mètres, les charges concentrées en ces divers points sont les mêmes et ont pour valeur :

$$P_C = P_D = P_E = 1.500^k \times 2^m = 3.000 \text{ kilogrammes.}$$

Réactions pour le calcul des moments fléchissants :

$$R_g = R_d = 3.000 + \frac{3000}{2} = 4.500 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

Moments fléchissants :

$$M_C = 4.500^k \times 2^m = 9.000^{km}.$$

$$M_D = 4.500^k \times 4^m - (3.000^k \times 2^m) = 12.000^{km}.$$

En raison de la symétrie :

$$M_E = M_C.$$

On aurait pu obtenir les moments fléchissants par la formule générale (n° 110) :

$$M = \frac{px}{2}(l - x).$$

Ainsi, pour le point C :

$$x = 2^m \quad \text{et} \quad l - x = 8 - 2 = 6 \text{ mètres.}$$

$$M_C = \frac{1.500}{2} \times 2 \times 6 = 9.000^{km}.$$

Pour le point D, qui est le milieu de la poutre,

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2.$$

$$M = \frac{1}{8} 1.500^k \times 8^2 = 12.000^{km}.$$

Le tracé de la ligne représentative des moments fléchissants s'effectue sans difficulté par la méthode du n° 124.

Efforts tranchants :

De A en C :

$$T_{A-C} = R_g = 4.500 \text{ kilogrammes;}$$

De C en D :

$$T_{C-D} = R_g - P_C = 4.500^k - 3.000^k = 1.500^k \text{ (positifs);}$$

De D en E :

$$T_{D-E} = R_g - P_C - P_D = 4.500^k - 6.000^k = -1.500^k \text{ (négatifs);}$$

Digitized by Google

enfin de E en A :

$$T_{E-A} = - R_d = - 4.500 \text{ kilogrammes.}$$

Réactions sous les appuis. — Elles sont les mêmes que dans le cas de la charge directe, soit :

$$\pm \frac{pl}{2} = \pm \frac{1.500^k \times 8^m}{2} = 6.000 \text{ kilogrammes.}$$

B. — Charges concentrées

127. Charge unique agissant sur une poutre par l'intermédiaire de poutrelles (*fig.* 96). — Soit une poutre AB, qui porte un poids unique P par l'intermédiaire d'une pièce s'appuyant sur les deux poutrelles C et D.

La pièce qui s'appuie sur les deux poutrelles ayant une portée de $(a + b)$, on répartit la charge P entre les deux points d'attache C et D de la manière suivante (n° 117) :

$$P_C = \frac{Pb}{a + b}$$

et

$$P_D = \frac{Pa}{a + b}.$$

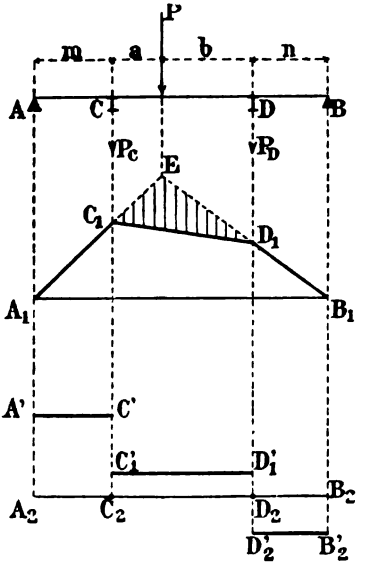


Fig. 96.

On traite ensuite la poutre comme étant soumise à l'action de deux charges concentrées P_C et P_D agissant en deux points déterminés C et D.

Digitized by Google

La ligne représentative des moments fléchissants peut se déterminer simplement comme suit :

On trace la ligne des moments fléchissants A_1EB_1 comme dans le cas d'une charge unique directe, et, par les points d'attache C et D, on mène des verticales qui rencontrent A_1E et B_1E aux points C_1 et D_1. Il suffit ensuite de joindre ces deux points par une droite C_1D_1 pour déterminer la nouvelle ligne représentative qui sera $A_1C_1D_1B_1$.

Remarque. — Comme dans le cas de la charge uniforme, les moments fléchissants ne sont pas changés aux points d'attache des poutrelles, mais entre les poutrelles ; ils sont diminués de toute la partie hachurée.

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont constants dans chaque intervalle de poutrelles, et la ligne représentative est une série de lignes brisées disposées en escalier (n° 119).

Les efforts tranchants diminuent dans le cas de la répartition des charges par poutrelles et, dans l'intervalle qui reçoit la charge P, l'effort tranchant est constant au lieu d'avoir deux valeurs comme dans le cas de la charge directe.

La ligne représentative est donnée par les droites $A'C'$, $C'_1D'_1$ et $D'_2B'_2$ parallèles à A_2B_2, pour lesquelles on a :

$$A_2A' = C_2C' = P_C \frac{a+b+n}{m+a+b+n},$$

$$C_2C'_1 = D_2D'_1 = P_C \frac{a+b+n}{m+a+b+n} - P_C,$$

$$D_2D'_2 = B_2B'_2 = P_C \frac{a+b+n}{m+a+b+n} - P_C - P_D.$$

128. Plusieurs charges concentrées agissant sur la poutre par l'intermédiaire de poutrelles. — Soient les charges P_1, P_2, P_3, P_4, agissant sur la poutre AB (*fig.* 97).

Le cas est analogue à celui de la charge unique, et il suffit de répartir aux points d'attache C_1, D_1, E_1 les charges données, comme il a été fait au n° 127.

On traite ensuite la poutre comme étant soumise directement à l'action de ces charges concentrées (n° 120).

Digitized by Google

La *ligne représentative* des moments fléchissants peut se déterminer facilement en traçant d'abord le polygone des moments fléchissants dus aux charges P_1, P_2, P_3, P_4, comme si elles agissaient directement sur la poutre. On joint ensuite les points de rencontre des verticales des poutrelles avec les côtés de ce polygone et on obtient ainsi la ligne représentative des moments fléchissants $A_1C'_1D'_1E'_1B_1$, dans le cas de la répartition des charges par poutrelles.

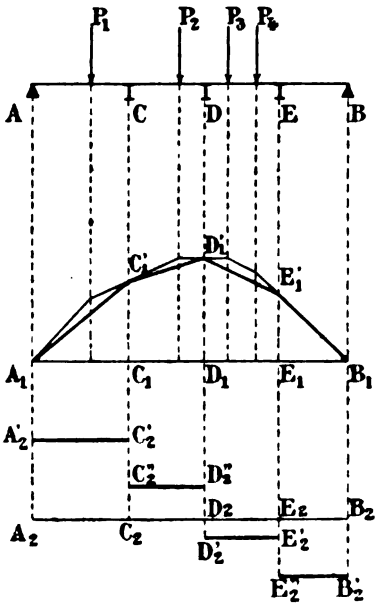


Fig. 97.

Efforts tranchants. — On procède pour les efforts tranchants comme il a été fait pour les charges concentrées appliquées directement sur la poutre, mais en ne considérant que les charges transmises aux points d'attache.

La ligne représentative est composée d'une série de lignes brisées disposées en escaliers.

Charge concentrée et charge uniforme. — Si la poutre recevait à la fois, par le moyen de poutrelles, des charges concentrées et une charge uniforme, il suffirait de traiter séparément les deux cas et de faire ensuite la somme des efforts, ou bien encore de transformer toutes les charges en charges concentrées au droit des poutrelles.

Le problème revient donc au cas d'une poutre supportant directement une série de charges concentrées (n° 120).

Digitized by Google

§ 3. — CHARGES VARIABLES DIRECTES

A. — Charges uniformes

129. Moments fléchissants. — Il a été dit (n° 116) que, dans le cas d'une charge partielle uniforme, sur une longueur α (*fig.* 98), la valeur du moment fléchissant maximum est de :

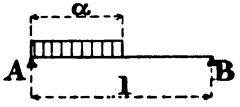


Fig. 98.

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p},$$

et qu'il se produit à une distance de l'appui de gauche égale à $x = \frac{R_g}{p}$.

Ce moment fléchissant est toujours inférieur à celui produit par la même charge uniforme lorsqu'elle s'étend sur toute la travée.

En effet, dans ce dernier cas, pour la valeur de $x = \frac{R_g}{p}$, on a :

$$M = \frac{p}{2} x (l - x) = \frac{p}{2} \frac{R_g}{p} \left(l - \frac{R_g}{p}\right);$$

d'où :

$$M = \frac{R_g}{2} \left(l - \frac{R_g}{p}\right) = \frac{R_g l}{2} - \frac{R_g^2}{2p}.$$

Or $\frac{R_g^2}{2p}$ étant le moment maximum dans le cas de la charge partielle, on doit avoir pour vérifier la proposition :

$$\frac{R_g l}{2} - \frac{R_g^2}{2p} > \frac{R_g^2}{2p},$$

ou :

$$\frac{R_g l}{2} > \frac{2R_g^2}{2p},$$

Digitized by Google

ou bien encore :

$$\frac{l}{2} > \frac{R_g}{p} \qquad \text{et finalement} \qquad R_g < \frac{pl}{2}.$$

Ce qui est toujours vrai, puisque R_g n'est que la réaction d'une charge partielle, réaction qui est toujours inférieure à celle d'une charge complète qui a pour valeur $\frac{pl}{2}$.

En conséquence, le moment fléchissant maximum dans une section quelconque est obtenu lorsqu'on charge toute la poutre.

Le moment fléchissant maximum maximorum a lieu au milieu de la portée, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{pl^2}{8}.$$

130. Efforts tranchants. — Il a été dit également (n° 113) que, dans le cas d'une charge partielle disposée de A en D (*fig.* 99), l'effort tranchant de D en B était constant, négatif et égal à :

$$(1) \quad R_g - p\alpha = -\frac{p\alpha^2}{2l}.$$

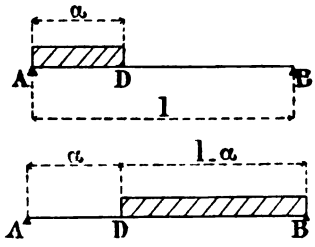


FIG. 99.

Si, au lieu de charger la poutre comme ci-dessus, on la chargeait de D en B, l'effort tranchant de A en D serait constant, positif et égal à R_g, soit :

$$(2) \qquad R_g = \frac{p(l-\alpha)^2}{2l} = \frac{pl}{2} - p\alpha + \frac{p\alpha^2}{2l}.$$

Ainsi donc la formule (1) donne, pour la section D, l'effort tranchant *maximum négatif*, et l'équation (2), l'effort tranchant *maximum positif*.

En conséquence, lorsqu'on fait varier la charge, les

Digitized by Google

efforts tranchants maxima négatif et positif sont toujours situés à l'extrémité de la charge, et il résulte de ceci que, pour une section quelconque D, il faut charger la poutre :

De l'appui de gauche jusqu'à la section exclusivement pour avoir l'effort tranchant maximum négatif relatif à cette section, et de l'appui de droite jusqu'à la section exclusivement pour avoir l'effort tranchant maximum positif relatif à cette section.

En valeur absolue, les deux efforts tranchants correspondant à une même section seront égaux pour $\alpha = \frac{l}{2}$.

Représentation des efforts tranchants (*fig.* 100). — La ligne représentative des efforts tranchants est, pour chaque cas, une parabole à axe vertical ayant son sommet sur un appui.

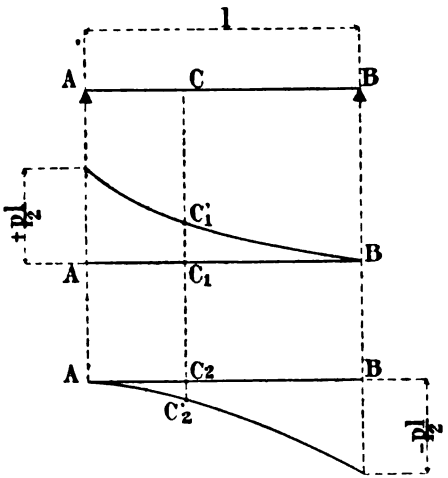


Fig. 100.

Celle des efforts tranchants maxima positifs est tangente à la poutre à l'appui de droite, et sa valeur à l'appui de gauche est $T_A = +\frac{pl}{2}$. On suppose que la charge variable s'avance de B vers A.

Digitized by Google

Tandis que celle des efforts tranchants maxima négatifs est tangente à la poutre à l'appui de gauche, et sa valeur à l'appui de droite est $T_B = -\frac{pl}{2}$. La marche de la charge est celle de A vers B.

Si, après avoir tracé les deux paraboles, on voulait déterminer les efforts tranchants dans la section C, par exemple, il suffirait de relever, à l'échelle adoptée, les ordonnées $C_1C'_1$ et $C_2C'_2$; la première donnerait l'effort tranchant maximum positif, et la deuxième, l'effort tranchant maximum négatif.

Remarque. — Ces deux efforts sont nécessaires dans le calcul des ponts pour l'application de la circulaire ministérielle dont on parlera plus loin.

131. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme fixe de p par mètre et d'une charge uniforme variable de q par mètre. — *Moments fléchissants.* — D'après le n° 129, le moment fléchissant maximum en un point quelconque de la poutre sera obtenu, dans le cas de la charge variable, lorsque cette charge couvrira toute la travée.

Il suffira donc, pour déterminer les moments fléchissants maxima, de traiter la poutre comme si elle était soumise à une charge fixe de $p + q$ au mètre courant (cas du n° 110).

La ligne représentative des moments fléchissants sera une parabole dont la flèche est égale au moment fléchissant maximum maximorum, qui a pour valeur :

$$Mm = \frac{1}{8}(p + q)l^2.$$

En un point quelconque d'abscisse x, ce moment fléchissant sera :

$$Mx = \frac{1}{2}(p + q)\,x\,(l - x).$$

Efforts tranchants (*fig.* 101). — Pour les efforts tranchants, il y a lieu de procéder séparément pour les deux systèmes de charge.

Digitized by Google

D'après le n° 110, les efforts tranchants dus à la charge fixe p sont représentés par une droite A_1B', qui détermine sur les appuis des segments égaux à $\pm \frac{pl}{2}$.

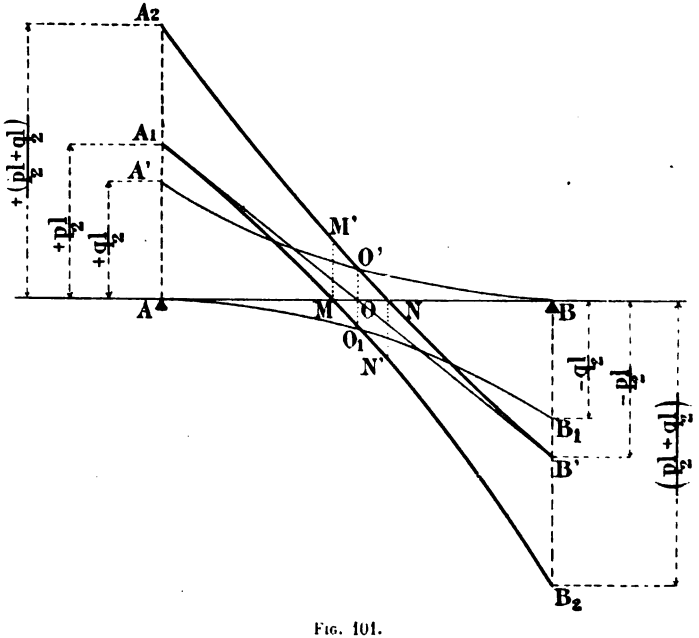


Fig. 101.

D'après le n° 130, les efforts tranchants dus à la charge variable q sont représentés par deux paraboles qui ont respectivement leur sommet sur un appui et découpent sur l'autre appui un segment égal à $\pm \frac{ql}{2}$.

La parabole supérieure A'B est celle relative aux efforts tranchants maxima positifs, et celle inférieure AB_1 aux efforts tranchants maxima négatifs.

Pour avoir la ligne représentative des efforts tranchants dus aux deux charges, il suffit d'additionner les ordonnées

Digitized by Google

de la droite A_1B' avec chacune des paraboles en tenant compte des signes.

On obtiendra ainsi d'une part :

1° La courbe $A_2O'B'$;

2° La courbe $A_1O_1B_2$.

D'après la figure, on voit :

que les efforts tranchants sont toujours positifs de A en M	maxima courbe A_2M' minima courbe A_1M
que les efforts sont toujours négatifs de N en B	maxima courbe $N'B_2$ minima courbe NB'
enfin qu'ils sont variables de sens entre M et N	positifs courbe $M'N$ négatifs courbe MN'

B. — Charges concentrées

132. Charge unique.

1° *Moments fléchissants* (*fig.* 102). — D'après le n° 117, le moment fléchissant maximum se produit toujours au point d'application de la charge.

Si α est la distance de cette charge à l'appui de gauche, la réaction en cet appui est :

$$R_g = \frac{P}{l}(l - \alpha)$$

et le moment fléchissant au point d'application de la charge a pour valeur :

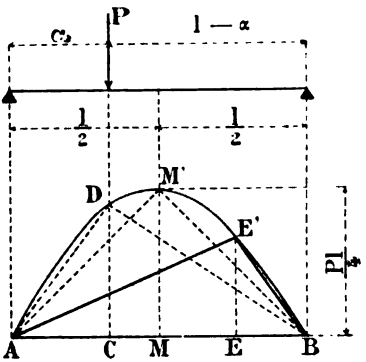


Fig. 102.

$$M_\alpha = \frac{P\alpha}{l}(l - \alpha).$$

Pour une charge appliquée en C, la ligne représentative des moments fléchissants serait un triangle ayant pour base AB et pour hauteur : $CD = \frac{P}{l}\alpha(l - \alpha)$.

Digitized by Google

Soit alors le triangle ADB.

Si la charge se déplace, la formule montre que le sommet D décrit une parabole, et le moment fléchissant maximum maximorum se produit au milieu de la portée, sa valeur est :

$$MM' = \frac{Pl}{4}.$$

Il suffira donc, pour déterminer cette parabole, de porter sur la verticale du milieu de la poutre $MM' = \frac{Pl}{4}$ et d'effectuer ensuite le tracé indiqué n° 110.

Si l'on désire avoir la ligne représentative des moments fléchissants pour une position de la charge, en E par exemple, on élèvera en ce point une verticale qui rencontre la parabole en E'.

On joindra par des droites ce point aux appuis, et le triangle AE'B sera la ligne cherchée.

2° *Efforts tranchants* (*fig.* 103). — On a vu (n° 117) que, pour une position de la charge P, l'effort tranchant à gauche de cette

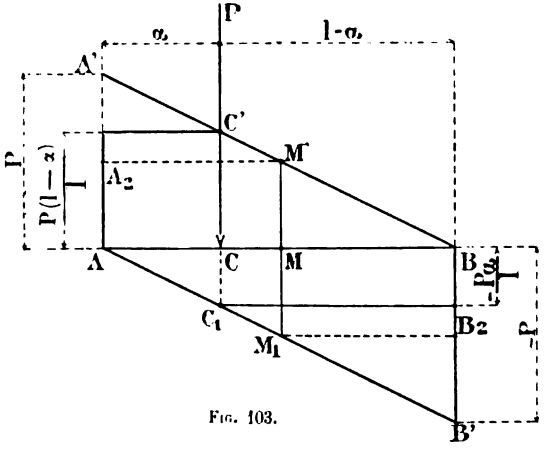


Fig. 103.

charge était positif et égal à $\frac{P(l-\alpha)}{l}$ et que l'effort tranchant à droite était négatif et égal à $-\frac{P\alpha}{l}$.

Digitized by Google

Si la charge varie de position, les points C′ et C_1 se meuvent sur les droites BA′ et AB′, telles que :

$$AA' = + P \qquad \text{et} \qquad BB' = - P.$$

En conséquence, la ligne représentative des efforts tranchants pour une charge unique variable se compose de deux droites, l'une A′B dont les ordonnées à partir de AB représentent les efforts tranchants positifs, et l'autre AB′ dont les ordonnées représentent les efforts tranchants négatifs.

Ainsi, par exemple, si la charge se trouve en M, la ligne représentative des efforts tranchants pour cette position de la charge sera : $A_2M'MM_1B_2$.

133. Cas de deux charges égales, qui se meuvent sur la poutre, leur distance restant constante. — Soient 1 et 2 les charges dont l'intensité est P, d leur distance constante, et α la distance variable entre l'appui de gauche et la première charge (*fig.* 104).

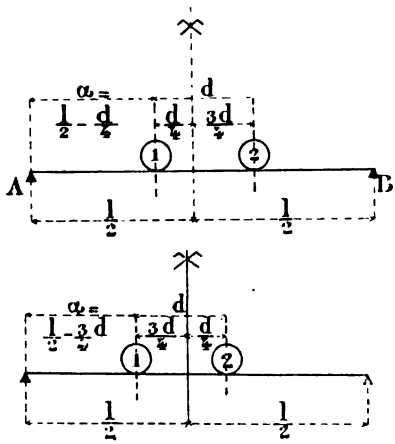


Fig. 104.

Le moment fléchissant maximum maximorum se produit en deux points symétriques par rapport au milieu de la poutre, savoir :

1° Sous la première charge de gauche 1, lorsque cette charge est située avant le milieu de la poutre et à une distance de ce milieu égale au 1/4 de l'écartement des charges, soit alors $\frac{d}{4}$.

La valeur de α est : $\alpha = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$, et le moment fléchissant

Digitized by Google

maximum maximorum a pour valeur :

$$Mm = \frac{P}{8l}(2l - d)^2;$$

2° Sous la deuxième charge 2, lorsque cette charge est située après le milieu de la poutre et à une distance de ce milieu égale au 1/4 de l'écartement des charges, soit : $\frac{d}{4}$.

La valeur de α est $\alpha = \frac{l}{2} - \frac{3}{4}d$, et le moment fléchissant maximum maximorum a également pour valeur :

$$Mm = \frac{P}{8l}(2l - d)^2.$$

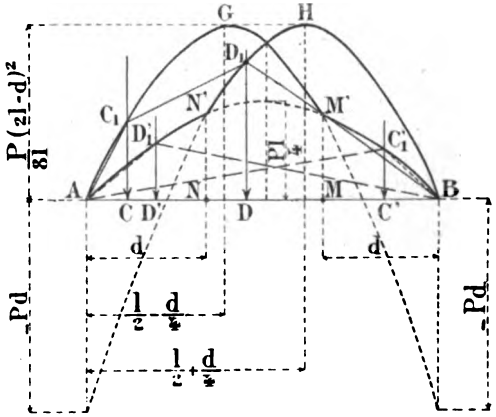


Fig. 105.

La ligne représentative des moments fléchissants maxima se compose de deux paraboles (*fig.* 105) : la première, relative à la première charge, part de l'appui de gauche, a son sommet sur la verticale d'abscisse : $\frac{l}{2} - \frac{d}{4}$, et découpe sur la verticale de l'appui de droite un segment négatif égal à $-Pd$.

La seconde, relative à la deuxième charge, est symétrique à

Digitized by Google

la première parabole et son sommet se trouve sur la verticale d'abscisse : $\frac{l}{2} + \frac{d}{4}$.

Les sommets de ces deux paraboles sont à une hauteur de :

$$M_m = \frac{P}{8l}(2l - d)^2.$$

Elles se coupent sur la verticale du milieu de la poutre.

La ligne représentative des moments fléchissants ainsi tracée supposerait que les deux charges restent sur la poutre ; mais il n'en est pas ainsi, car, lorsque les charges se déplacent vers la droite et que la charge 1 se trouve au point M situé à une distance d de l'appui de droite, la charge 2 est alors sur cet appui et, à partir de ce point M jusqu'en B, la parabole de la première charge doit être modifiée, car il ne reste sur la poutre qu'une seule charge.

Il en est de même lorsque les charges se déplacent vers la gauche, et ce qui vient d'être dit pour le point M s'applique au point N situé à une distance d de l'appui de gauche. La parabole de la deuxième charge doit être aussi modifiée.

De ces points M et N aux appuis et respectivement pour chacune des charges, les moments fléchissants sont représentés par deux arcs d'une même parabole dont le sommet se trouve sur la verticale du milieu de la poutre et à une hauteur égale à $M = \frac{Pl}{4}$.

La ligne représentative finale des moments fléchissants est alors définie par les arcs de parabole, en traits forts, AGM'B et AN'HB.

Pour une position quelconque des charges en C et en D, les moments fléchissants seront donnés par les ordonnées du quadrilatère AC_1D_1B.

Si la première charge se trouve dans la zone MB en C', il n'y aura qu'une charge sur la poutre et les moments fléchissants seront alors donnés par les ordonnées du triangle $AC_1'B$.

Au contraire, si la deuxième charge se trouve dans la zone AN en D', elle agira seule sur la poutre et les moments fléchissants seront donnés par le triangle $AD_1'B$.

Digitized by Google

Efforts tranchants. — L'effort tranchant à gauche de la première charge est constant, positif et égal à :

$$T = \frac{P}{l}(2l - 2\alpha - d),$$

et l'effort tranchant à droite de la deuxième charge est constant, négatif et égal à :

$$T = -\frac{P}{l}(2\alpha + d).$$

La ligne représentative des efforts tranchants maxima se compose de deux droites (*fig.* 106) :

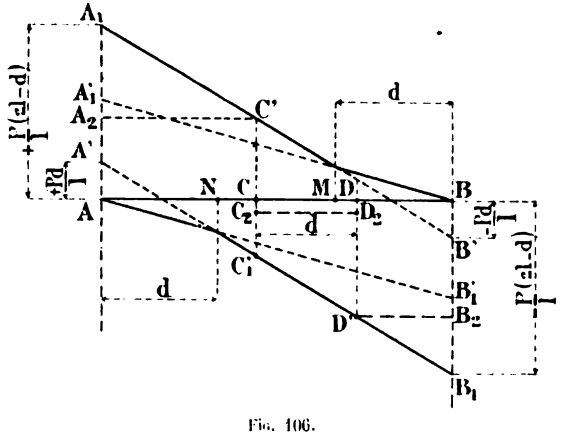


Fig. 106.

Une A_1B' qui donne les efforts tranchants positifs, lorsque les charges se meuvent de l'appui B vers A, et l'autre $A'B_1$ qui donne les efforts tranchants négatifs, lorsque les charges se meuvent de A vers B.

On a :

$$AA_1 = BB_1 = \pm \frac{P}{l}(2l - d)$$

et

$$AA' = BB' = \pm \frac{Pd}{l}.$$

Digitized by Google

La remarque faite pour les moments fléchissants en ce qui concerne les zones AN et MB de longueur d est également à faire pour les efforts tranchants.

De M en B, la ligne représentative serait donnée par la droite A'_1B, et de N en A par la droite AB'_1, telles que : $AA'_1 = BB'_1 = P$.

La ligne représentative finale serait alors figurée par les lignes brisées tracées en traits forts.

Pour une section quelconque C entre N et M, il faudra, pour avoir l'effort tranchant maximum positif, placer une des charges en C et l'autre entre C et B à la distance d, tandis que, pour avoir l'effort tranchant maximum négatif dans la même section C, il faudra également qu'une des charges se trouve en C, mais l'autre entre C et A à une distance d.

Pour une position quelconque des charges aux points C et D distants de d, CC′ serait l'effort tranchant positif au droit de la première charge située en C, et DD′ l'effort tranchant négatif au droit de la deuxième charge placée en D.

Entre les deux charges, on porterait $C'C_2 = P$, et la ligne représentative des efforts tranchants pour la position donnée serait la ligne brisée en escaliers $A_2C'C_2D_2D'B_2$.

134. Cas d'une charge uniformément répartie fixe et de deux charges concentrées liées invariablement entre elles qui se meuvent sur la poutre. — Pour déterminer la ligne représentative des moments fléchissants maxima et, par suite, le moment fléchissant maximum maximorum, il est préférable de tracer séparément les lignes représentatives pour chaque catégorie de charges et de faire ensuite la somme des ordonnées en divers points de la poutre. Les points ainsi obtenus seront réunis par des portions de courbes.

L'ensemble de ces courbes s'appelle la *courbe-enveloppe* des moments fléchissants maxima. Il suffira de relever à l'échelle convenue la valeur du moment fléchissant maximum maximorum.

134 *a*. Application à une poutre de 12 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniformément répartie fixe de 2 tonnes par mètre courant et de deux charges mobiles

Digitized by Google

de 5 tonnes chacune, écartées de 4 mètres. — D'après le n° 109, la ligne représentative des moments fléchissants maxima pour la charge uniformément répartie est une parabole dont le sommet se trouve au milieu de la portée et à une hauteur égale à :

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{2^T \times \overline{12}^2}{8} = 36 \text{ tonnes-mètres};$$

la ligne représentative des moments fléchissants maxima pour deux charges mobiles égales se compose de quatre arcs de parabole définis dans le n° 133.

Pour les paraboles relatives aux deux charges variables comprises sur la poutre, la verticale des sommets se trouve respectivement à une distance de l'appui de gauche égale à :

1re charge $\frac{l}{2} - \frac{d}{4} = \frac{12}{2} - \frac{4}{4} = 5$ mètres;

2e charge $\frac{l}{2} + \frac{d}{4} = \frac{12}{2} + \frac{4}{4} = 7$ mètres.

La hauteur de ces sommets est la même pour les deux paraboles et égale à :

$$\frac{P}{8l}(2l - d)^2 = \frac{5^T}{8 \times 12^m}(2 \times 12^m - 4^m)^2 = 20^{Tm},833.$$

Les segments découpés sur les appuis sont égaux à :

$$-Pd = -5^T \times 4^m = -20 \text{ tonnes-mètres.}$$

Quant à la parabole relative à l'une des charges seulement, la verticale du sommet est au milieu de la poutre, et sa hauteur correspond à :

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{5^T \times 12^m}{4} = 15 \text{ tonnes-mètres.}$$

Les arcs de cette dernière parabole partent des appuis et sont limités à une verticale située à : $d = 4$ mètres de chaque appui.

Digitized by Google

CONSTRUCTION DE LA COURBE-ENVELOPPE. — *Echelles :*

Longueur..... 1 centimètre par mètre.
Moments fléchissants 1 centimètre par 5 tonnes métriques.

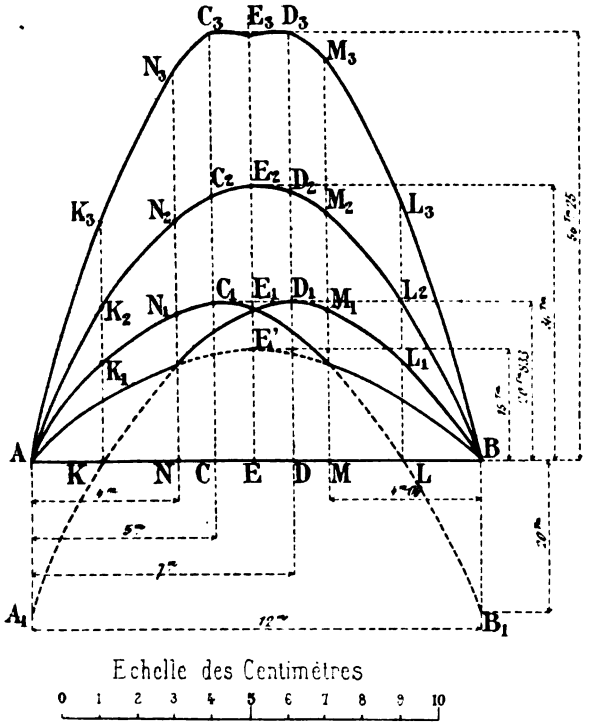


FIG. 107.

On portera (*fig.* 107) :

$$AB = l = \frac{12 \times 1^{cm}}{1} = 12 \text{ centimètres};$$

$$AN = BM = d = \quad 4 \quad —$$

$$AC = \frac{l}{2} - \frac{d}{4} = \quad 5 \quad —$$

$$AD = \frac{l}{2} + \frac{d}{4} = \quad 7 \quad —$$

Digitized by Google

Sur les verticales de ces points :

$$EE_2 = \frac{36^{Tm}}{5^{Tm}} \times 1^{cm} = 7^{cm},2 ;$$

$$EE' = \frac{15^{Tm}}{5^{Tm}} \times 1^{cm} = 3 \text{ centimètres} ;$$

$$CC_1 = DD_1 = \frac{20^{Tm},833}{5^{Tm}} \times 1^{cm} = 4^{cm},2 ;$$

$$AA_1 = BB_1 = -\frac{20^{Tm}}{5^{Tm}} \times 1^{cm} = -4 \text{ centimètres.}$$

Ce qui permettra de tracer toutes les paraboles par le procédé du n° 110. La parabole AE_2B est relative à la charge uniforme, et les autres aux charges mobiles.

Il y a lieu de remarquer que, pour les charges mobiles, la ligne représentative des moments fléchissants maxima est représentée par la courbe $AC_1E_1D_1B$.

Il suffira alors, pour tracer la courbe-enveloppe des moments fléchissants maxima pour les deux catégories de charges, d'ajouter, sur une même verticale, les ordonnées de cette courbe $AC_1E_1D_1B$ et celles de la parabole AE_2B.

On aurait par exemple :

$$KK_3 = KK_1 + KK_2 \qquad NN_3 = NN_1 + NN_2$$
$$CC_3 = CC_1 + CC_2 \qquad EE_3 = EE_1 + EE_2$$

et ainsi de suite.

En réunissant tous les points obtenus par une série de courbes, on obtiendra la courbe-enveloppe AE_3B.

D'après l'épure, le moment fléchissant maximum maximorum se produit en C et D, et il varie très peu de C en D.

L'ordonnée CC_3 mesurée donne $11^{cm},25$, soit, à l'échelle de 1 centimètre par 5 tonnes-mètres, un moment fléchissant de :

$$M_m = 11,25 \times 5^{Tm} = 56^{Tm},25.$$

Efforts tranchants. — La ligne représentative des efforts tranchants dus à la charge uniforme est une droite qui dé-

Digitized by Google

coupe sur les appuis des segments égaux à :

$$T = \pm \frac{pl}{2} = \frac{2^T \times 12^m}{2} = \pm 12^T.$$

La ligne représentative des efforts tranchants maxima relative à deux charges mobiles se compose de quatre droites définies dans le n° 133.

On a successivement :

$$\pm \frac{P}{l}(2l - d) = \pm \frac{5^T}{12}(2 \times 12^m - 4^m) = \pm 8^T,33$$

$$\pm \frac{Pd}{l} = \pm \frac{5^T \times 4^m}{12} = \pm 1^T,67$$

$$P = 5^T$$

Échelles des longueurs : 1 centimètre pour 1 mètre.
Forces : 1 centimètre pour 2 tonnes.

On portera (*fig.* 108) :

$$AA_1 = BB_1 = \pm \frac{12^T}{2^T} \times 1^{cm} = 6^{cm},$$ et on tracera A_1B_1

$$AA_2 = BB_2 = \pm \frac{8^T,33}{2} \times 1^{cm} = 4^{cm},165$$

$$AA_4 = BB_4 = \pm \frac{1^T,67}{2^T} \times 1^{cm} = 0^{cm},835$$

$$AA_3 = BB_3 = \pm \frac{5^T}{2^T} \times 1^{cm} = 2^{cm},5$$

Ce qui permettra de tracer toutes les droites relatives aux variations des efforts tranchants dus aux charges mobiles ; on aura ainsi les lignes représentatives A_2M_2B pour les efforts tranchants maxima positifs, lorsque les charges vont de B vers A, et AN_2B_2 pour les efforts tranchants maxima négatifs, lorsque les charges vont de A vers B.

Il suffira alors, pour tracer les lignes-enveloppes des efforts tranchants maxima pour les deux catégories de charges, d'additionner avec leurs signes les ordonnées de la droite A_1EB_1 avec celles des lignes représentatives des

Digitized by Google

charges mobiles, ou plus simplement de porter sur les appuis :

$$\left.\begin{aligned} AA' &= AA_1 + AA_2 \\ -BB' &= -(BB_1 + BB_2) \end{aligned}\right\} AA' = BB'$$

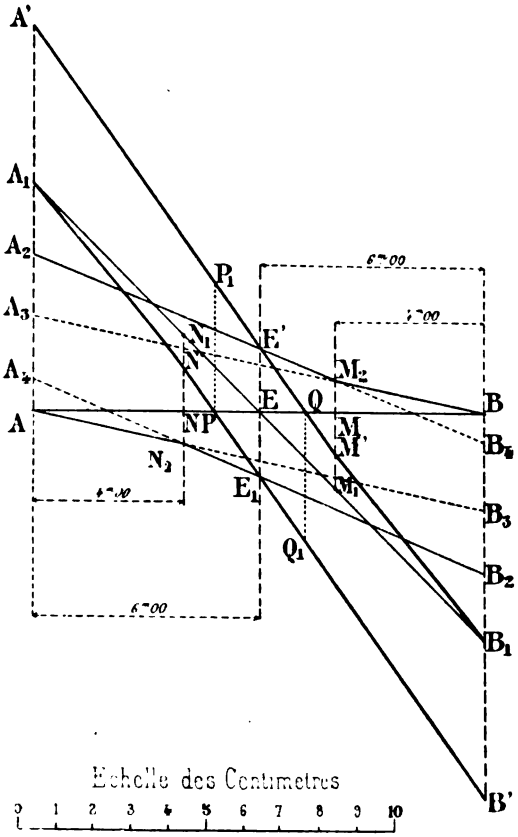


Fig. 108.

On joindra les points A' et E' par une droite que l'on prolongera jusqu'à M' sur la verticale située à la distance

Digitized by Google

$d = 4$ mètres de l'appui de droite, et on tracera ensuite la droite $M'B_1$.

On opérera de même pour les deux droites $B'E_1N'$ et $N'A_1$.

Ces différentes droites seront les lignes-enveloppes des efforts tranchants.

Entre les points P et Q de la poutre, les efforts tranchants sont variables de sens. De A en P, ils sont toujours positifs :

La ligne $A'P_1$ donne les efforts tranchants maxima, et la ligne A_1P, les efforts tranchants minima. De Q en B, ils sont toujours négatifs :

La ligne Q_1B' donne les efforts tranchants maxima, et la ligne QB_1, les efforts tranchants minima.

135. Poutre soumise à l'action de charges concentrées mobiles formant convoi, c'est-à-dire liées invariablement entre elles. — Il s'agit de déterminer pour une poutre posée librement sur deux appuis :

1° Le moment fléchissant maximum développé dans une section donnée de la poutre ;

2° Le moment fléchissant *maximum maximorum ;*

3° Les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans une section donnée.

Ce problème, qui est d'une application constante dans le calcul des poutres, se résout d'une manière assez simple par les procédés graphiques, et il sera traité dans la *quatrième partie* avec tous les développements qu'il comporte ; mais il n'est pas inutile de donner un aperçu des méthodes analytiques que l'on emploie dans certains cas, notamment lorsque le convoi se compose d'un petit nombre de charges.

A. **Recherche du moment fléchissant maximum produit dans une section donnée pendant le passage d'un convoi.** — Cette recherche ne peut être effectuée que par tâtonnements ; mais ils peuvent être abrégés par l'emploi des deux principes suivants :

Premier principe. — *Le moment fléchissant dans une section quelconque se produit toujours lors du passage d'une des charges dans la section considérée.*

Deuxième principe. — *Pour un groupe de charges* P_1 *à* P_3 *en-*

Digitized by Google

gagées sur la poutre, celle des charges, placée sur la section considérée XX (fig. 109), qui donnera le moment fléchissant

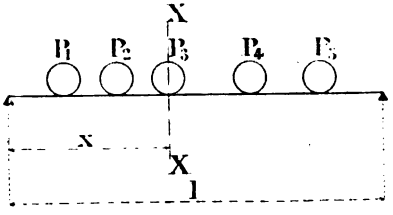


Fig. 109.

maximum dans cette section, soit P_3 *par exemple, doit satisfaire aux inégalités ci-après :*

$$\frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5} \leq \frac{x}{l} \leq \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5};$$

x étant l'abscisse de la section, et l la portée de la poutre.

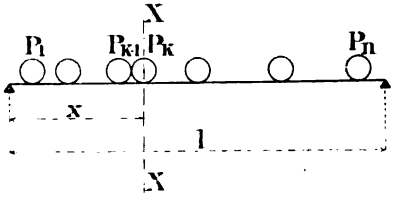


Fig. 110.

D'une manière générale, on aura, en appelant (*fig.* 110) :

P_k, la charge qui est sur la section considérée ;
P_{k-1}, la charge qui précède P_k ;
P_n, la dernière charge engagée sur la poutre ;

$$(1) \qquad \frac{\Sigma_1^{k-1} P}{\Sigma_1^n P} \leq \frac{x}{l} \leq \frac{\Sigma_1^k P}{\Sigma_1^n P}.$$

Cette formule exprime que *le rapport de l'abscisse x de la section à la portée l doit être :*

a) Plus grand ou au moins égal au rapport de la somme

Digitized by Google

des charges qui précèdent celle qui est sur la section, à la somme de toutes les charges engagées sur la poutre ;

b) Plus petit ou au moins égal au rapport de la somme des charges situées à gauche de la section, y compris celle qui est sur cette section, à la somme de toutes les charges engagées sur la poutre.

Si ces deux conditions (*a*) et (*b*) sont remplies, la charge P_k produira le moment fléchissant maximum dans la section considérée, mais pour les charges *seulement engagées sur la poutre.*

Il peut donc arriver que, pour d'autres groupes de charges du convoi, soit que ce convoi se meuve dans un autre sens, une de ces charges satisfasse également aux conditions (*a*) et (*b*).

Il y a donc lieu de pouvoir établir quelle est celle des différentes charges trouvées qui donnera le plus grand moment fléchissant.

A cet effet, on appliquera à chacune de ces charges, appartenant à un groupe différent, la formule suivante, qui donne la valeur du moment fléchissant, et on choisira le plus grand d'entre eux :

$$(2) \quad M = \frac{x(l-x)}{l} \times \Sigma P - \frac{(l-x)}{l} \times M_g - \frac{x}{l} \times M_d.$$

Dans cette formule :

x est l'abscisse de la section ;
l, la portée de la poutre ;
ΣP, la somme des charges engagées sur la poutre ;
M_g, la somme des moments des charges situées à gauche de la section par rapport à cette section ;
M_d, la somme des moments des charges situées à droite de la même section.

On remarquera que, pour tous les groupes considérés, les termes $\frac{x(l-x)}{l}$, $\frac{l-x}{l}$ et $\frac{x}{l}$ sont constants et ne dépendent que de la position de la section.

Digitized by Google

135 *a*. Application à une poutre de 8 mètres de portée, qui donne passage à quatre charges de 4, 5, 6 et 3 tonnes disposées comme l'indique la figure 111, et pour laquelle il s'agit de déterminer le moment fléchissant maximum dans une section située à 3 mètres de l'appui de gauche. —

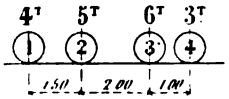


Fig. 111.

En vertu du principe 1, on placera successivement les charges sur la section en supposant que le convoi s'avance de B vers A, et on appliquera la formule (1) du *deuxième principe*.

Le terme $\frac{x}{l}$ est constant, et sa valeur est : $\frac{3^m}{8^m} = 0,375$.

La *charge* 1 donne (*fig.* 112) :

Condition (*a*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k-1} P}{\Sigma_1^n P} = \frac{0}{18^T} = 0.$$

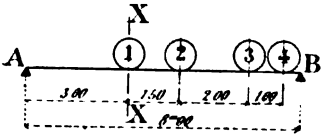


Fig. 112.

Condition (*b*) :

$$\frac{\Sigma_1^k P}{\Sigma_1^n P} = \frac{4^T}{18^T} = 0,22.$$

La condition (*a*) est satisfaite, puisque $0 < \frac{x}{l} = 0,375$, mais la condition (*b*) n'est pas satisfaite, puisque 0,22 est < que :

$$\frac{x}{l} = 0,375.$$

Charge 2 (*fig.* 113) :

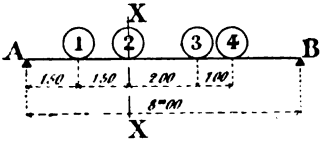


Fig. 113.

Condition (*a*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k-1} P}{\Sigma_1^n P} = \frac{4^T}{18^T} = 0,22.$$

Condition (*b*) :

$$\frac{\Sigma_1^k P}{\Sigma_1^n P} = \frac{9^T}{18^T} = 0,50.$$

Les deux conditions sont satisfaites, puisque :

$$0,22 < \frac{x}{l} = 0,375 < 0,50.$$

Digitized by Google

La charge 2 est une de celles qui peuvent donner le moment fléchissant maximum.

Charge 3 (la charge 1 est sortie de la poutre) (*fig.* 114).

Condition (*a*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k+1} P}{\Sigma_1^n P} = \frac{5^T}{14^T} = 0{,}357.$$

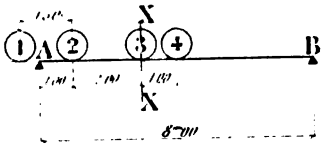


Fig. 114.

Condition (*b*) :

$$\frac{\Sigma_1^k P}{\Sigma_1^n P} = \frac{11^T}{14^T} = 0{,}78.$$

Les deux conditions sont encore réalisées, et la charge 3 est également une de celles qui peuvent donner le moment fléchissant maximum.

Charge 4. — Elle ne réalise pas les deux conditions.

En faisant avancer le convoi de A vers B, mais en mettant la roue 1 en avant, on aurait :

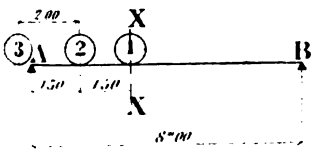


Fig. 115.

Charge 1 (*fig.* 115).

Condition (*a*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k-1} P}{\Sigma_1^n P} = \frac{5^T}{9^T} = 0{,}55.$$

Cette condition n'est pas satisfaite, puisque

$$0{,}55 > \frac{x}{l} = 0{,}375.$$

Charge 2 (*fig.* 116).

Condition (*a*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k-1} P}{\Sigma_1^n P} = \frac{6^T}{15^T} = 0{,}40.$$

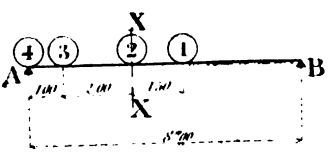


Fig. 116.

Condition qui n'est pas satisfaite.

Digitized by Google

Charge 3 (*fig.* 117).

Condition (*a*) :

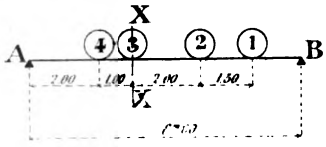


FIG. 117.

$$\frac{\Sigma_1^{k-1}P}{\Sigma_1^{n}P} = \frac{3^T}{18^T} = 0,166.$$

Condition (*b*) :

$$\frac{\Sigma_1^{k}P}{\Sigma_1^{n}P} = \frac{9}{18^T} = 0,50.$$

Les deux conditions sont satisfaites.

Charge 4. — Les conditions ne sont pas satisfaites.

En résumé, il faut donc retenir la charge 2 pour le convoi avançant de B vers A, et la charge 3 pour le convoi marchant dans les deux sens.

La formule (2), appliquée à ces charges, donnera la valeur des moments fléchissants dont on choisira le plus grand.

On a d'abord :

$$x = 3 \text{ mètres}, \qquad l - x = 8^m - 3^m = 5 \text{ mètres}.$$

$$\frac{x}{l} = \frac{3}{8} = 0,375 ; \qquad \frac{l-x}{l} = \frac{8-3}{8} = 0,625$$

et

$$\frac{x(l-x)}{l} = \frac{3 \times 5}{8} = 1,875.$$

La roue 2 donne (*fig.* 113) :

$$\Sigma P = 4^T + 5^T + 6^T + 3^T = 18 \text{ tonnes}.$$
$$M_g = 4^T \times 1^m,5 = 6 \text{ tonnes-mètres}.$$
$$M_d = 6^T \times 2^m + 3^T(1^m + 2^m) = 21 \text{ tonnes-mètres}.$$

Moment fléchissant, formule (2) :

$$M_2 = 1,875 \times 18^T - 0,625 \times 6^{Tm} - 0,375 \times 21^{Tm} = 22^{Tm},125.$$

La roue 3 donne successivement :

1° Train s'avançant de B vers A (*fig.* 114) :

$$\Sigma P = 5^T + 6^T + 3^T = 14 \text{ tonnes}.$$
$$M_g = 5^T \times 2^m = 10 \text{ tonnes-mètres}.$$
$$M_d = 3^T \times 1^m = 3 \text{ tonnes-mètres}$$

Digitized by Google

Moment fléchissant, formule (2) :

$$M_3 = 1{,}875 \times 14^T - 0{,}625 \times 10^{Tm} - 0{,}375 \times 3^{Tm} = 18^{Tm},875.$$

2° Train s'avançant de A vers B (*fig.* 117) :

$\Sigma P =$. $= 18$ tonnes.
$M_g = 3^T \times 1^m$ $= 3$ tonnes-mètres.
$M_d = 5^T \times 2^m + 4^T (2^m + 1^m,5) = 24$ tonnes-mètres.

Moment fléchissant, formule (2) :

$$M_3 = 1{,}875 \times 18^T - 0{,}625 \times 3^{Tm} - 0{,}375 \times 24^{Tm} = 22^{Tm},875.$$

C'est donc la charge 3 placée sur la section considérée avec la charge 1 en tête, du côté de B, qui donnera le moment fléchissant maximum dans cette section.

Si le convoi ne devait pas se retourner, il ne faudrait retenir que les charges 2 et 3 avec la tête du convoi du côté de A, et le moment fléchissant maximum dans la section serait donné par la roue 2.

B. **Moment fléchissant maximum maximorum.** — Ce moment est le plus grand de tous ceux qui peuvent se produire dans la poutre lors du passage du convoi.

Sa recherche est très laborieuse, car le problème comporte deux inconnues, savoir : la section où il se produit et la charge qui le détermine. Comme pour une section donnée, le moment fléchissant maximum maximorum se produit toujours au droit d'une charge du convoi.

Le principe suivant aide à résoudre le problème :

Troisième principe. — *Pour un groupe de charges liées invariablement entre elles et engagées sur une poutre, le moment fléchissant maximum produit par une charge considérée s'obtient en plaçant ces charges de telle façon que le milieu de la poutre se trouve à égale distance de la résultante des charges engagées et de la charge considérée.*

Ainsi, pour le groupe des charges P_1 à P_4 (*fig.* 118), le moment fléchissant *maximum*, sous la charge P_2, se produira

Digitized by Google

en plaçant cette charge en m_2, de manière que l'on ait :

$$Mm_2 = Mr = \frac{\delta}{2}.$$

M étant le milieu de la poutre, et δ la distance de la charge considérée à la résultante $R = \Sigma P$ des charges P_1 à P_4.

Pour que ce principe soit applicable, il faut que, lors du placement de la charge considérée P_2 dans sa position déterminée, toutes les charges du groupe restent engagées sur la poutre et qu'il n'en rentre pas de nouvelles.

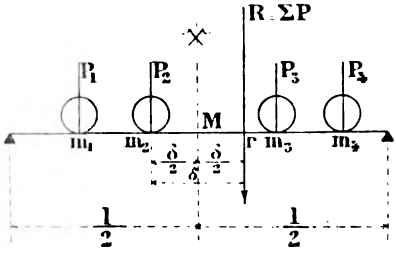


Fig. 118.

Il résulte de ceci qu'il faudra examiner plusieurs groupes de charges du convoi et rechercher dans chaque groupe la charge qui produit le moment fléchissant maximum, et choisir le plus grand d'entre eux ; on aura en même temps le point où il a lieu.

La recherche de la résultante et le placement de la charge considérée peuvent être simplifiés en déterminant directement la *distance* de cette charge à l'appui de gauche par la formule :

$$x = \frac{M_g - M_d + \Sigma P l}{2\Sigma P}. \tag{3}$$

M_g est la somme des moments des charges de gauche par rapport à la charge considérée ;

M_d, la somme des moments des charges de droite ;

ΣP, la somme de toutes les charges engagées sur la poutre ;

l, la portée de la poutre.

Cette valeur de x portée dans la formule (2) donnée précédemment permettra de déterminer le moment fléchissant

Digitized by Google

maximum produit par la charge considérée du groupe examiné.

135 *b*. Exemple. — *Déterminer le moment fléchissant maximum maximorum dans une poutre de* 5 mètres *de portée qui donne passage au convoi représenté* (*fig.* 119).

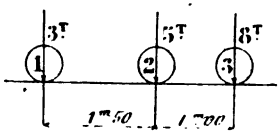


Fig. 119.

La charge 1 donnerait pour valeur de x, formule (3) :

$$x_1 = -\frac{0 - (5^T \times 1^m,5 + 8^T \times 2^m,5) + 16^T \times 5^m}{2 \times 16^T} = 1,64;$$

la charge 2 :

$$x_2 = \frac{3^T \times 1^m,5 - 8^T \times 1^m + 16^T \times 5^m}{2 \times 16^T} = 2^m,39;$$

la charge 3 :

$$x_3 = \frac{3^T \times 2^m,5 + 5^T \times 1^m - 0 + 16^T \times 5^m}{2 \times 16^T} = 2^m,89.$$

Avec ces trois valeurs de x, les charges se trouvent toujours engagées sur la poutre ; il y a donc lieu de rechercher par la formule (2) :

$$M = \frac{x(l-x)}{l}\Sigma P - \frac{(l-x)}{l} M_g - \frac{x}{l} M_d$$

les moments fléchissants pour ces trois valeurs.

Charge 1 :

$$M_1 = \frac{1^m,64(5^m - 1^m,64)}{5^m} \times 16^T - \frac{(5^m - 1^m,64)}{5^m} \times 0 - \frac{1^m,64}{5} \times 27^{Tm},5$$
$$= + 8^{Tm},61.$$

Digitized by Google

Charge 2 :

$$M_2 = \frac{2^m,39\,(5^m - 2^m,39)}{5^m} \times 16^T - \frac{(5^m - 2^m,39)}{5^m} \times 3^T \times 1^m,5$$
$$- \frac{2^m,39}{5^m} \times 8^T \times 1^m = + 13^{Tm},787.$$

Charge 3 :

$$M_3 = \frac{2^m,89\,(5^m - 2^m,89)}{5^m} \times 16^T - \frac{(5^m - 2^m,89)}{5^m} \times (3^T \times 2^m,5 + 5 \times 1)$$
$$= + 14^{Tm},238.$$

Le moment fléchissant *maximum maximorum* se produit donc sous la charge 3 et à $2^m,89$ de l'appui de gauche. Sa valeur est de $14^{Tm},238$.

A l'inspection des charges, il était à peu près certain que le moment cherché se produirait sous une des charges 2 ou 3 ; on aurait donc pu se dispenser d'examiner la charge 1.

Remarque importante. — Pour une poutre de portée donnée et pour un convoi dont la longueur est plus grande que la portée, il y a lieu d'examiner tout d'abord quels sont les différents groupes qui renferment les plus lourdes charges et qui peuvent être engagés sur la poutre.

On choisira parmi ces groupes ceux dont la résultante est des plus grandes, et il est fort probable que ces groupes fourniront la charge cherchée.

Pour les trains de chemins de fer, ce sont les locomotives qui donnent généralement le moment fléchissant maximum maximorum, et pour les véhicules traînés par des chevaux, ce sont les roues de ces véhicules.

C. **Efforts tranchants maxima positif et négatif dans une section donnée.** — On a vu (n° 116) que, pour tous les points d'une poutre situés à gauche d'une charge, l'effort tranchant est constant et positif et qu'il est négatif pour les points situés à droite.

Il résulte de ceci que, si l'on désire rechercher l'effort tranchant maximum positif dans une section donnée *xx*

Digitized by Google

d'une poutre, pour un convoi déterminé, il y a d'abord intérêt à placer la première charge du convoi dans la section et toutes les autres à droite, comme le représente la figure 120.

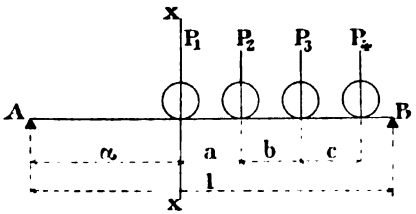


Fig. 120.

Dans ces conditions, l'effort tranchant est constant et positif depuis l'appui de gauche A jusqu'à la section xx.

A partir de cette section et en allant vers la droite, l'effort tranchant diminue, puisqu'il se trouve diminué de la charge P_1 dans l'intervalle a, des charges P_1 et P_2 dans l'intervalle b, et ainsi de suite.

Dans la plupart des cas, cette position du convoi donne l'effort tranchant maximum positif, notamment lorsqu'il s'agit d'un train de chemin de fer avec locomotive en avant dont les charges diffèrent peu.

L'effort tranchant maximum positif aurait alors pour valeur :

$$T_m = \frac{P_1(l-\alpha)+P_2(l-\alpha-a)+P_3(l-\alpha-a-b)+P_4(l-\alpha-a-b-c)}{l}.$$

Mais il arrive que, pour certains convois, les premières charges sont beaucoup plus faibles que celles qui suivent et, dans ces conditions, il se pourrait que la deuxième charge, voire même la troisième, donnât l'effort tranchant maximum positif.

Il y aurait donc lieu d'essayer cette deuxième position; mais, pour un même nombre de charges engagées sur la poutre, la deuxième charge ne donnera l'effort tranchant maximum positif que si la condition suivante est remplie :

$$(1) \qquad \frac{a}{l} > \frac{P_1}{\Sigma P},$$

Digitized by Google

soit dans le cas précédent :

$$\frac{a}{l} > \frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4},$$

et dans ce cas l'effort tranchant maximum positif dans la section donnée aurait pour valeur (*fig.* 121) :

$$T_m = \frac{P_2(l-\alpha-a) + P_3(l-\alpha-a-b) + P_4(l-\alpha-a-b-c) - P_1\alpha}{l}.$$

Il y a lieu de remarquer que la valeur de α varie pour chaque position et qu'elle exprime la distance de l'appui de gauche à la première charge.

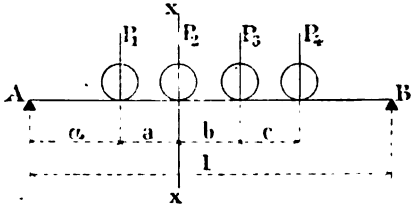


Fig. 121.

Enfin la troisième charge donnera l'effort tranchant maximum positif, le même convoi restant toujours entièrement engagé sur la poutre, si la condition suivante est remplie :

$$(2) \qquad \frac{b}{l} > \frac{P_2}{\Sigma P},$$

soit dans le cas présent :

$$\frac{b}{l} > \frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4},$$

et dans ce cas l'effort tranchant maximum positif dans la section donnée sera :

$$T_m = \frac{P_3(l-\alpha-a-b) + P_4(l-\alpha-a-b-c) - P_1\alpha - P_2(\alpha+a)}{l}.$$

D'une manière générale, la charge qui donnera l'effort tranchant maximum positif devra satisfaire à l'inégalité ci-

Digitized by Google

après :

$$(a) \qquad \frac{k}{l} > \frac{P_k}{\Sigma P},$$

dans laquelle P_k est la charge qui précède la charge à essayer, k la distance de cette charge à celle qui est essayée, l la portée de la poutre et ΣP la somme de toutes les charges engagées.

L'effort tranchant maximum positif aura pour valeur :

$$(b) \qquad T_m = \frac{\Sigma M_d P}{l} - \Sigma P_g^x ;$$

dans cette formule :

$\Sigma M_d P$ est la somme des moments par rapport à l'appui de droite B des charges engagées sur la poutre ;

ΣP_g^x, la somme des charges comprises sur la poutre entre l'appui de gauche et la section xx considérée.

Remarque importante. — Il est bien entendu que si, dans ces différentes positions, une des charges du convoi sortait de la poutre ou si une nouvelle charge y entrait, il faudrait considérer le convoi engagé comme un nouveau groupe de charges et recommencer la recherche de l'effort tranchant maximum positif, comme il a été fait ci-dessus.

En conséquence, il y a lieu d'examiner, avant toute chose, quels sont les différents groupes de charges pouvant être engagés sur la poutre, qui comportent naturellement les plus lourdes charges, et les essayer.

135 *c*. **Effort tranchant maximum négatif.** — Les mêmes opérations sont à refaire, mais en plaçant les charges *à gauche de la section* au lieu de les placer à droite.

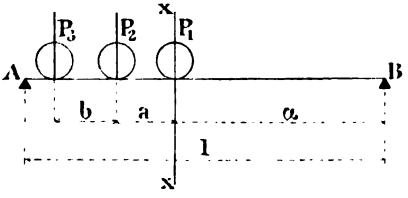


Fig. 122.

Ainsi, pour une section xx quelconque, on placera les charges comme l'indique la figure 122, si la première charge donne l'effort tranchant maximum négatif.

Digitized by Google

Si l'on veut essayer la deuxième charge P_2 en la plaçant sur la section, elle devra satisfaire l'inégalité (a) déjà citée :

$$\frac{k}{l} > \frac{P_k}{\Sigma P};$$

elle déterminera alors l'effort tranchant maximum négatif ; mais il y a lieu de remarquer que P_k est la charge considérée et k la distance de cette charge à celle précédemment essayée.

Dans tous les cas, l'effort tranchant maximum négatif à droite de la section xx sera donné par la formule suivante :

$$(c) \qquad T_m = -\left(\frac{\Sigma M_g P}{l} - \Sigma P_d^x\right),$$

dans laquelle :

$\Sigma M_g P$ est la somme des moments par rapport à l'appui de gauche A des charges engagées sur la poutre ;

ΣP_d^x, la somme des charges comprises sur la poutre entre l'appui de droite B et la section xx considérée.

D. **Effort tranchant maximum maximorum dans la poutre.** — L'effort tranchant maximum maximorum se produit toujours sur l'un des appuis :

Sur celui de gauche, l'effort tranchant positif ;

Sur celui de droite, l'effort tranchant négatif.

L'appui étant un des points de la poutre, il conviendrait de placer en ce point la première charge du convoi et successivement les autres, et de déterminer chaque fois la valeur de l'effort tranchant.

La plus grande de ces valeurs serait l'effort tranchant maximum maximorum.

Mais on peut simplifier cette recherche en vérifiant, pour chaque position, l'inégalité générale suivante :

$$(d) \qquad \frac{k_{n-1}}{l} > \frac{P_{n-1}}{\Sigma_n^l P},$$

Digitized by Google

dans laquelle :

k_{n-1} est la distance entre deux charges ;
P_{n-1}, la charge qui précède celle à essayer ;
$\Sigma_n^l P$, la somme des charges engagées sur la poutre, y compris la charge à essayer.

L'application de cette inégalité se fait très facilement en remplaçant l'indice n par le numéro de la charge à essayer.

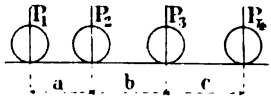


Fig. 123.

Ainsi, soit à déterminer l'effort tranchant maximum maximorum *positif* dans une poutre de portée l lors du passage du convoi défini par les quatre charges P_1, P_2, P_3, P_4, liées comme l'indique la figure 123.

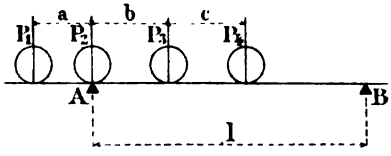


Fig. 124.

La charge P_2 placée sur l'appui de gauche A (*fig.* 124) donnera un effort plus grand que lorsque la charge P_1 est sur l'appui, si l'inégalité (*d*) est satisfaite. — Or le numéro de la charge étant le deuxième, il suffira de remplacer n par 2, et on aura alors :

$$\frac{k_1}{l} > \frac{P_1}{P_2 + P_3 + P_4};$$

mais k_1 étant le premier intervalle, soit a sur la figure, il vient :

$$\frac{a}{l} > \frac{P_1}{P_2 + P_3 + P_4}.$$

Si l'inégalité est satisfaite, on passera à la charge P_3, qui donnerait pour $n = 3$:

$$\frac{k_2}{l} > \frac{P_2}{P_3 + P_4} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{l} > \frac{P_2}{P_3 + P_4}.$$

Digitized by Google

Enfin, si cette inégalité était encore satisfaite, on essaierait la charge P_4, qui donnerait pour $n = 4$:

$$\frac{k_3}{l} > \frac{P_3}{P_4} \qquad \text{ou} \qquad \frac{c}{l} > \frac{P_3}{P_4}.$$

Si l'on voulait au contraire déterminer l'effort tranchant maximum négatif qui se produit sur l'appui de droite, on placerait successivement les charges sur cet appui et on vérifierait l'inégalité (d); mais il y a lieu de remarquer que, si les charges ne se retournent pas, c'est-à-dire si le convoi s'avance de A vers B avec la charge P_4 en avant, il faudra avoir soin de tenir compte du changement d'indice des charges, et le mieux est, afin qu'il n'y ait pas d'erreur, de marquer momentanément en rouge les nouveaux indices ; ainsi P_4 prendra l'indice 1, P_3 l'indice 2, et ainsi de suite.

Il en est de même des intervalles : c deviendra k_1, b sera k_2.

La valeur de l'effort tranchant maximum sur les appuis sera toujours donnée par les formules suivantes :

Effort tranchant sur l'appui de gauche :

$$(e) \qquad T_g = \frac{\Sigma M_d P}{l};$$

Effort tranchant sur l'appui de droite :

$$(f) \qquad T_d = -\frac{\Sigma M_g P}{l},$$

dans lesquelles $\Sigma M_d P$ est la somme des moments, par rapport à l'appui de droite, de toutes les charges engagées sur la poutre, y compris celle située sur l'appui de gauche, et $\Sigma M_g P$ la somme des moments, par rapport à l'appui de gauche, de toutes les charges engagées sur la poutre, y compris celle située sur l'appui de droite.

136. Application. — Une poutre de 10 mètres de portée étant donnée, rechercher les efforts tranchants maxima positif et négatif dans une section située à 3 mètres de l'appui de gauche, ainsi que les efforts tranchants sur les appuis lors

Digitized by Google

du passage sur la poutre de 4 galets d'un pont roulant répondant au diagramme (*fig.* 125).

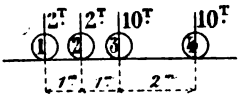


Fig. 125.

1° *Recherche de l'effort tranchant maximum positif dans la section considérée.* — Les quatre charges peuvent être engagées sur la poutre lorsque la première, celle de 2 tonnes, se trouvera dans la section; on peut donc examiner *à priori* si, en plaçant la *deuxième charge* sur la section, on n'obtient pas le maximum d'effort.

L'inégalité (*a*) donne :

$$\frac{k}{l} = \frac{1^m}{10^m} = 0,10$$

$$\frac{P_k}{\Sigma P} = \frac{2^T}{2 + 2 + 10 + 10} = 0,08.$$

La condition étant remplie, il y a lieu d'examiner la troisième charge, laquelle donne :

$$\frac{k}{l} = \frac{1^m}{10^m} = 0,10$$

$$\frac{P_k}{\Sigma P} = \frac{2^T}{2 + 2 + 10 + 10} = 0,08.$$

La troisième charge satisfait également l'inégalité (*a*); on est donc conduit à examiner la quatrième charge.

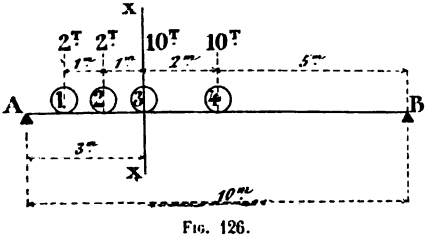


Fig. 126.

Mais il y a lieu de remarquer qu'en plaçant la charge n° 4 sur la section *xx*, la première sort de la poutre, et alors on se trouve en présence d'un deuxième groupe de charges.

Pour le *premier groupe* examiné, c'est la troisième charge

Digitized by Google

qui, placée sur la section, donne l'effort tranchant maximum positif; la figure 126 indique la position des charges.

La formule (b) :

$$T = \frac{\Sigma M_d P}{l} - \Sigma P_g^x,$$

donne :

$$\Sigma M_d P = 2^T \times 9^m + 2^T \times 8^m + 10^T \times 7^m + 10^T \times 5^m = 154^{Tm}$$
$$\Sigma P_g^x = 2^T + 2^T = 4^T$$
$$T_m = + \frac{154^{Tm}}{10^m} - 4^T = + 11^T,4.$$

Deuxième groupe. — Le deuxième groupe a lieu lorsque la *quatrième charge* se trouve dans la section, et alors il ne reste plus que trois charges placées sur la poutre, comme l'indique la figure 127.

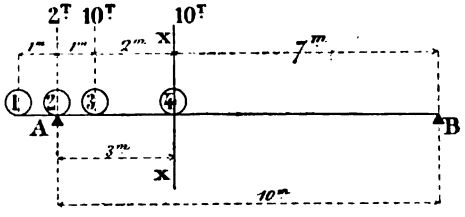


Fig. 127.

Dans cette position, l'effort tranchant positif à gauche de la section xx a pour valeur tirée de la formule (b) :

$$Tx = \frac{2^T \times 10^m + 10^T \times 9^m + 10^T \times 7^m}{10^m} - 12^T = + 6^T.$$

C'est donc le premier groupe qui donne l'effort tranchant maximum dans la section considérée, et c'est la troisième charge qui le produit; sa valeur est :

$$T_m = 11^T,4.$$

2° *Recherche de l'effort tranchant maximum négatif.* — Dans

Digitized by Google

un exemple comme celui qui a été choisi, les galets du pont roulant vont revenir avec la quatrième charge en tête. — Cette charge, placée sur la section, donnera probablement l'effort tranchant maximum négatif.

La position des charges sera celle de la figure 127, c'est-à-dire qu'il ne se trouvera sur la poutre que les charges 2, 3 et 4.

En faisant avancer les galets vers l'appui B, on constitue un nouveau groupe de charges, puisque les deuxième et première se trouvent engagées sur la poutre; il y a donc lieu de rechercher :

1° L'effort tranchant dans la première position avec la charge n° 4 sur la section xx;

2° L'effort tranchant dans la deuxième position avec la charge n° 3 sur la section.

En appliquant la formule (*c*) :

Première position (*fig.* 127) :

$$\Sigma M_g P = 10^T \times 1^m + 10^T \times 3^m = 40 \text{ tonnes-mètres},$$
$$\Sigma P_d^x = 0$$
$$T_m = -\frac{40^{T^m}}{10^m} = -4 \text{ tonnes}.$$

Deuxième position (*fig.* 126):

$$\Sigma M_g P = 2^T \times 1^m + 2^T \times 2^m + 10^T \times 3^m + 10^T \times 5^m = 86^{T^m}$$
$$\Sigma P_d^x = 10^T$$
$$T_m = -\left(\frac{86^{T^m}}{10^m} - 10^T\right) = +1^T,4.$$

Donc, dans la deuxième position, l'effort tranchant à droite de la section xx est positif, et alors il ne faut considérer que la première position qui donne l'effort tranchant maximum négatif, dont la valeur est de $T_m = -4$ tonnes.

3° *Recherche de l'effort tranchant maximum positif sur l'appui de gauche.* — On examinera immédiatement si le galet n° 2 placé sur l'appui de gauche donne un effort plus grand que celui résultant du premier galet.

Digitized by Google

L'inégalité (d) donne alors :

$$\left.\begin{array}{l} k_{n-1} = k_1 = 1^m,00 \\ l \quad = \quad 10^m,00 \\ P_{n-1} = P_1 = 2^T \\ \Sigma_n^l P = 2^T + 10^T + 10^T = 22^T \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{k_1}{l} = \dfrac{1^m}{10^m} = 0,10 \\ \\ \dfrac{P_1}{\Sigma_n^l P} = \dfrac{2^T}{22^T} = 0,09 \end{array}$$

L'inégalité est donc satisfaite, puisque $\frac{k_1}{l} > \frac{P_1}{\Sigma_n^l P}$; il convient donc d'essayer le troisième galet, lequel, placé sur l'appui de gauche donne dans l'inégalité (d) :

$$\left.\begin{array}{l} k_{n-1} = k_2 = 1^m \\ l \quad = 10^m \\ P_{n-1} = P_2 = 2^T \\ \Sigma_n^l P = 10^T + 10^T = 20^T \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{k_2}{l} = \dfrac{1^m}{10^m} = 0,10 \\ \\ \dfrac{P_2}{\Sigma_n^l P} = \dfrac{2}{20} = 0,10. \end{array}$$

L'inégalité se traduit par une égalité, ce qui veut dire que le galet n° 3 donnera le même effort tranchant que le galet n° 2.

En essayant le galet n° 4, on aurait :

$$\left.\begin{array}{l} k_{n-1} = k_3 = 2^m \\ l \quad = 10^m \\ P_{n-1} = P_3 = 10^T \\ \Sigma_n^l P = P_4 = 10^T \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{k_3}{l} = \dfrac{2}{10} = 0,2. \\ \\ \dfrac{P_3}{\Sigma_n^l P} = \dfrac{10}{10} = 1. \end{array}$$

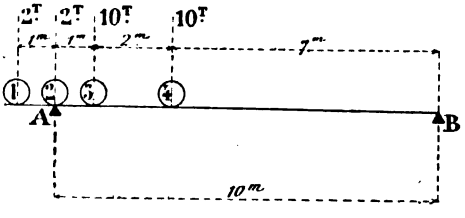


Fig. 128.

L'inégalité n'étant pas satisfaite, puisque $\frac{k_{n-1}}{l}$ est $< \frac{P_{n-1}}{\Sigma_n^l P}$, il n'y a donc lieu de considérer seulement que les galets n° 2

Digitized by Google

et n° 3, qui, d'après ce qui précède, donnent le même effort tranchant.

Le galet n° 2 mis dans sa position réelle (*fig.* 128) donne comme valeur de l'effort tranchant sur l'appui, en appliquant la formule (*e*) :

$$T_g = \frac{\Sigma M_d P}{l}.$$

$$T_g = \frac{2^T \times 10^m + 10^T \times 9^m + 10^T \times 7^m}{10^m} = 18 \text{ tonnes.}$$

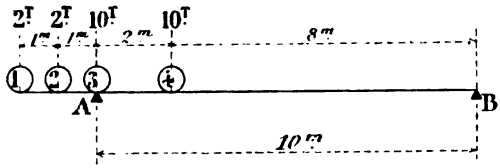


Fig. 129.

Le galet n° 3 mis dans sa position réelle (*fig.* 129) donne :

$$T_g = \frac{10^T \times 10^m + 10^T \times 8^m}{10^m} = 18 \text{ tonnes.}$$

4° *Recherche de l'effort tranchant maximum négatif sur l'appui de droite.* — Il y a lieu de remarquer que les galets d'un pont roulant ne se retournent pas ; dans ces conditions, en faisant avancer le convoi de l'appui de gauche vers l'appui de droite, c'est le galet n° 4 qui prendra la tête.

Si on examine *a priori* le galet n° 3 placé sur l'appui de droite, l'inégalité (*d*) donne :

$$\left.\begin{array}{l} k_{n-1} = 2^m \\ l = 10^m \end{array}\right\} \frac{k_{n-1}}{l} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{n-1} = 10^T \\ \Sigma_n^l P = 10^T + 2^T + 2^T = 14^T \end{array}\right\} \frac{P_{n-1}}{\Sigma_n^l P} = \frac{10}{14} = 0{,}71.$$

Or, cette inégalité n'étant pas satisfaite, c'est le galet n° 4 qui, posé sur l'appui de droite (*fig.* 130), donnera le maximum d'effort.

Digitized by Google

Sa valeur déduite de la formule (f) :

$$T_d = -\frac{\Sigma M_g P}{l},$$

est :

$$T_d = -\left(\frac{2^T \times 6^m + 2^T \times 7^m + 10^T \times 8^m + 10^T \times 10^m}{10^m}\right) = -20^T,6.$$

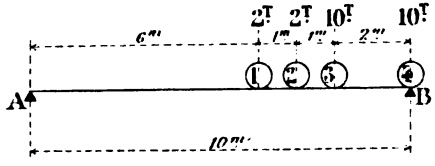


Fig. 130.

Il ressort des calculs qui précèdent que le galet 4 donne l'effort tranchant maximum maximorum ; il est négatif et sa valeur est de 20T,6.

Remarque. — Si l'on désirait avoir la variation des efforts tranchants dans la poutre, il suffirait de choisir quelques sections et de déterminer comme il a été fait précédemment les efforts positifs et négatifs.

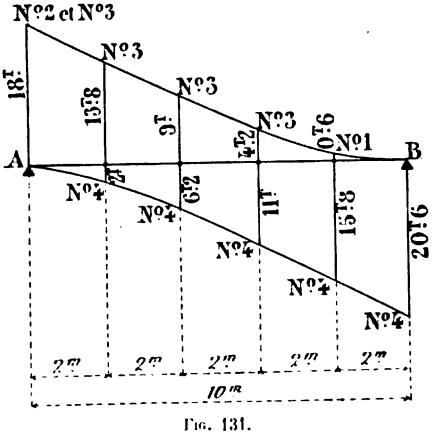


Fig. 131.

On joindrait ensuite ces points par une courbe continue et on obtiendrait les lignes représentatives des efforts tranchants.

On pourrait, par exemple, diviser la poutre en 5 parties égales, ce qui nécessiterait la recherche des efforts tranchants

Digitized by Google

dans quatre sections espacées de 2 mètres. En procédant comme il a été fait précédemment, on trouverait les valeurs inscrites sur la figure 131, qui donne en même temps le numéro du galet qui produit l'effort tranchant maximum dans chaque section.

On remarquera que les efforts tranchants maxima positifs ne sont pas toujours produits par le même galet, ce qui est compréhensible, étant donné que les galets de tête, le convoi s'avançant de l'appui de droite vers l'appui de gauche, ont des charges faibles par rapport aux autres ; mais il n'en est pas de même pour les efforts tranchants maxima négatifs, qui sont toujours produits par le quatrième galet ; qui devient celui de tête, lorsque le convoi s'avance de l'appui de gauche vers l'appui de droite, et dont la charge est des plus grandes.

§ 5. — CHARGES VARIABLES ET INDIRECTES

137. Moments fléchissants. — D'une manière générale, il suffira de déterminer la courbe-enveloppe des moments fléchissants, les charges étant supposées directes, et de faire ensuite la répartition de ces moments fléchissants par les poutrelles, comme il a été fait au paragraphe 2.

Pour les charges uniformes, le moment fléchissant maximum en un point donné se produit toujours en chargeant toute la poutre.

Pour les charges concentrées formant convoi, le cas sera traité par la statique graphique.

138. Efforts tranchants. — Trois cas sont à considérer.

A. — Charge uniforme

Dans le cas d'une charge directe p par mètre, la ligne représentative des efforts tranchants maxima positif et négatif se compose (n° 131) de deux paraboles tangentes respectivement à l'un des appuis et découpant sur la verticale de ces appuis des segments égaux à $\pm \frac{pl}{2}$.

Digitized by Google

Pour un point déterminé de la poutre, l'effort tranchant maximum positif s'obtient en chargeant la poutre de ce point jusqu'à l'appui de droite, et l'effort tranchant maximum négatif s'obtient en chargeant la poutre de ce même point à l'appui de gauche.

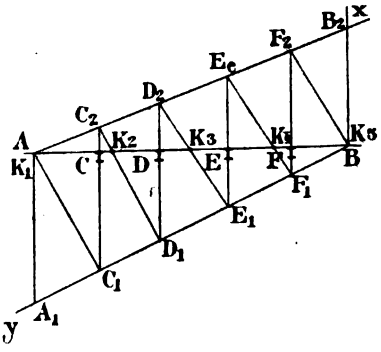


Fig. 132.

Dans le cas d'une répartition des charges par poutrelle, les efforts tranchants dans chaque intervalle étant constants, il est nécessaire de déterminer jusqu'à quel *point* de l'intervalle la charge variable doit être amenée pour donner le maximum d'effet.

Ce point K, qui est variable pour chaque intervalle, s'appelle le *point limite des efforts tranchants.*

Il s'obtient facilement par le procédé suivant (*fig.* 132) :

Par les deux appuis, on tracera deux droites parallèles quelconques Ax et By et, par les points d'attache des poutrelles, on mènera des verticales qui rencontrent les droites Ax et By en différents points AA_1, C_2C_1, D_2D_1, E_2E_1, F_2F_1 et B_2B.

Il suffira de joindre AC_1, C_2D_1, D_2E_1, E_2F_1 et F_2B.

Les points de rencontre de ces droites avec l'axe de la poutre seront les points K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.

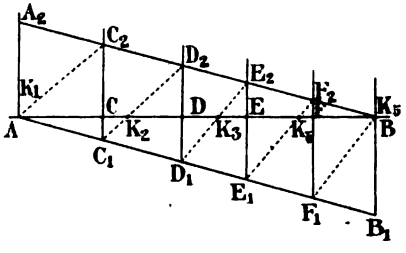


Fig. 133.

Sur les appuis, les points K se confondent avec ces appuis.

Si les parallèles initiales étaient tracées en sens inverse,

Digitized by Google

il faudrait joindre alors les points C_2A, D_2C_1, ..., BF_1 (*fig.* 133).

Les points K peuvent être également déterminés par le calcul ; la formule ci-après donne pour un intervalle quelconque CD, d'indice n, la distance x_n du point C au point K_n (*fig.* 134) :

$$x_n = \lambda_n \frac{a}{l - \lambda_n}.$$

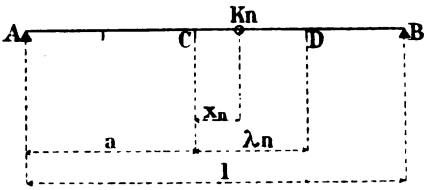


Fig. 134.

dans laquelle :

x_n est la distance cherchée ;
λ_n, la longueur de l'intervalle considéré ;
a, la distance de l'appui de gauche à l'entretoise qui limite à gauche l'intervalle.

Cette formule donne pour le premier intervalle :

$$x_1 = \lambda_1 \frac{0}{l - \lambda_1} = 0$$

Ce qui veut dire que le point K_1 se confond avec l'appui de gauche.

Elle donne pour le dernier intervalle :

$$x_n = \lambda_n \frac{l - \lambda_n}{l - \lambda_n} = \lambda_n.$$

Ce qui veut dire que le point K du dernier intervalle se confond avec l'appui de droite.

Les points K étant déterminés, soit graphiquement, soit par le calcul, il s'agit de rechercher quelle est la valeur de l'effort tranchant maximum dans un intervalle quelconque.

Soit (*fig.* 135) la poutre AB divisée en quatre intervalles de poutrelles, pour lesquels on a déterminé les points K par le procédé précédent.

Si p est la charge variable uniforme par mètre courant, la ligne représentative des efforts tranchants positifs pour la *charge directe* sera la parabole BA_1.

L'effort tranchant maximum positif dans le deuxième in-

Digitized by Google

tervalle CD, par exemple, s'obtiendra en amenant la charge de B en K_2.

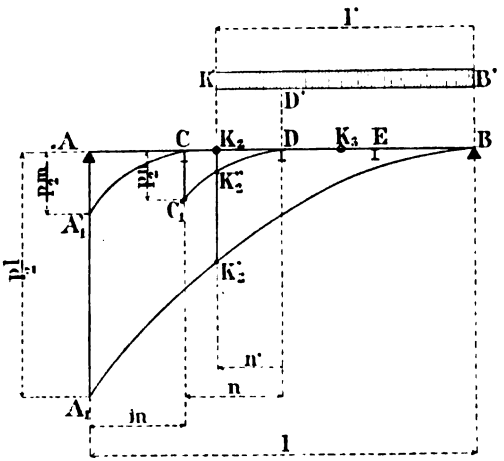


Fig. 135.

Pour la charge directe, l'effort tranchant au point K_2 est représenté par l'ordonnée $K_2K'_2$, dont la valeur est constante de A en K_2 et a pour expression :

$$K_2K'_2 = \frac{pl'^2}{2l}.$$

Mais, par suite de la présence des poutrelles, la portion de charge K'D' située dans l'intervalle considéré transmet en C une charge qui a pour valeur :

$$\frac{pn'}{n} \times \frac{n'}{2} = \frac{pn'^2}{2n}.$$

Cette charge étant située à gauche du point K_2 donne en ce point un effort tranchant négatif qu'il y a lieu de retrancher de l'effort tranchant dû à la charge directe $K_2K'_2$.

Il reste alors comme valeur de l'effort tranchant maximum

Digitized by Google

positif en K_2 :

$$T_{K_2} = \frac{pl'^2}{2l} - \frac{pn'^2}{2n}.$$

La construction de cette expression se fait facilement de la manière suivante :

Le premier terme $\frac{pl'^2}{2l}$ est représenté par l'ordonnée $K_2K'_2$ d'une parabole ayant son sommet en B et qui découpe sur la verticale de l'appui de gauche un segment AA_1 égal à $\frac{pl}{2}$ (n° 130).

Le deuxième terme $\frac{pn'^2}{2n}$ est l'ordonnée $K_2K''_2$ d'une parabole ayant son sommet en D et qui découpe sur la verticale de C un segment $CC'_1 = \frac{pn}{2}$.

L'effort tranchant maximum positif en K_2 sera donc représenté par l'ordonnée $K''_2K'_2 = K_2K'_2 - K_2K''_2$.

Pour le premier intervalle AC, le point K_1 se confond avec l'appui A ; il faudra donc, pour avoir l'effort tranchant maximum positif de cet intervalle, charger la poutre de B jusqu'en A.

La charge directe donnerait comme valeur de l'effort tranchant l'ordonnée $AA_1 = \frac{pl}{2}$.

La charge dans l'intervalle AC, considéré comme une petite poutre, produira en A une charge dont la valeur est $\frac{pm}{2}$ et qui doit être retranchée de l'effort tranchant dû à la charge directe.

Il restera alors comme valeur de l'effort tranchant maximum positif qui est constant dans tout l'intervalle AC :

$$T_A = \frac{pl}{2} - \frac{pm}{2} = \frac{p}{2}(l - m).$$

Cet effort est représenté par l'ordonnée $A_1A'_1$.

Remarque I. — Pour un intervalle quelconque, il n'est pas nécessaire de tracer les deux paraboles des efforts tranchants.

Digitized by Google

Il suffit de déterminer les ordonnées par la construction déjà exposée (n° 110).

Ainsi, pour le point K_2 de l'exemple précédent, on portera (*fig.* 136) $AA_1 = \frac{pl}{2}$ et on joindra A_1B.

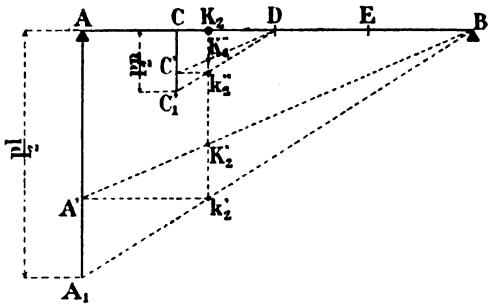


Fig. 136.

Par le point k'_2 situé sur la verticale de K_2, on mènera une parallèle k'_2A' à AB et on joindra A'B. Cette droite détermine sur $K_2k'_2$ le point K'_2 qui appartient à la parabole BA_1.

On portera ensuite $CC'_1 = \frac{pn}{2}$ et on fera la même construction que ci-dessus en considérant l'intervalle CD comme une poutre séparée ; on obtiendra ainsi le point K''_2 qui appartient à la deuxième parabole DC'_1.

L'ordonnée $K''_2K'_2$ représentera la valeur de l'effort tranchant maximum positif dans l'intervalle CD.

Remarque II. — Si l'on désirait déterminer l'effort tranchant maximum négatif dans le même intervalle CD, il faudrait charger la poutre de A jusqu'en K_2.

On effectuerait les mêmes constructions que précédemment, mais en se rappelant que les sommets des paraboles seraient en A et en C.

On aurait ainsi (*fig.* 137) :

$$BB_1 = \frac{pl}{2} \quad \text{et} \quad DD_1 = \frac{pn}{2}.$$

Digitized by Google

L'ordonnée de l'effort tranchant maximum négatif dans l'intervalle CD serait $K''_2K'_2$, dont la valeur est :

$$T_{K_2} = \frac{pl'^2_1}{2l} - \frac{pn'^2_1}{2n}.$$

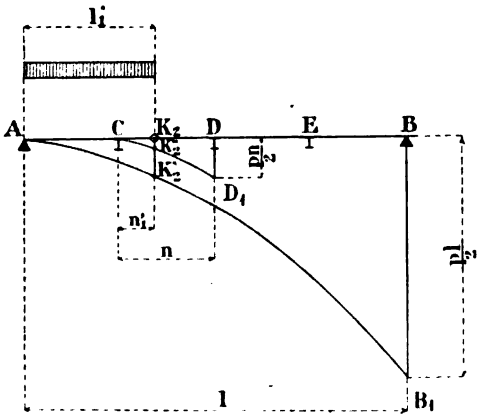


Fig. 137.

138 *a*. **Ligne représentative des efforts tranchants maxima.** — Les efforts tranchants maxima au droit des points K étant déterminés et ces efforts étant constants dans chaque intervalle, la ligne représentative sera constituée par une série de lignes disposées en escaliers toutes parallèles à AB.

138 *b*. **Formule générale pour déterminer analytiquement la valeur des efforts tranchants maxima positif et négatif.** — D'une manière générale, lorsque les points K ont été déterminés, les efforts tranchants maxima dans un intervalle quelconque sont donnés par la formule :

$$T_{K_n} = \frac{p}{2}\left[\frac{\alpha_n^2}{l} - \frac{\alpha_n'^2}{\lambda n}\right],$$

Digitized by Google

dans laquelle :

n est l'indice de l'intervalle considéré ;
α, la distance d'un des appuis au point K_n ;
α', la distance d'une des entretoises limitant l'intervalle au point K_n ;
λ_n, la longueur de l'intervalle.

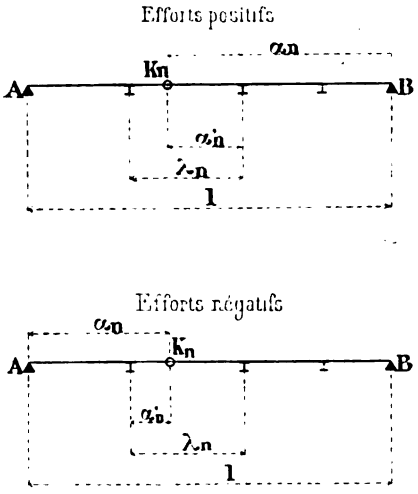


Fig. 138.

Pour l'application de cette formule, il faut assigner à α et à α' leurs vraies valeurs, suivant que l'on a affaire à l'effort positif ou à l'effort négatif, savoir (*fig.* 138) :

Effort positif	α	de l'appui de droite jusqu'au point K considéré.
	α'	de la poutrelle de droite jusqu'au point K.
Effort négatif	α	de l'appui de gauche jusqu'au point K.
	α'	de la poutrelle de gauche jusqu'au point K.

Digitized by Google

B. — Charge unique

Dans le cas d'une charge unique P, agissant *directement* sur la poutre, la ligne représentative des efforts tranchants se compose de deux droites A_1B et AB_1, qui découpent sur la verticale des appuis des segments égaux à P (*fig.* 139).

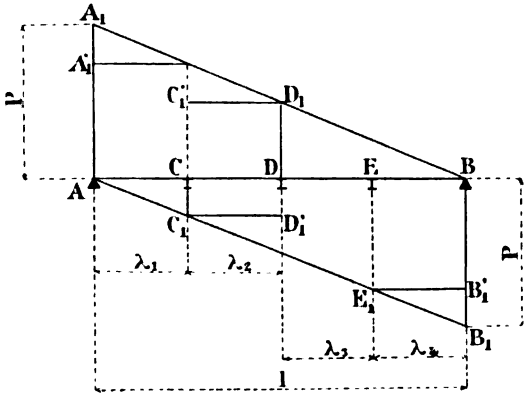


Fig. 139.

Si la charge est transmise à la poutre par des poutrelles situées aux points C, D et E, l'effort tranchant maximum, en valeur absolue dans un intervalle, se produit toujours lorsqu'on place la charge sur une des poutrelles limitant l'intervalle considéré.

Ainsi, pour l'intervalle CD, on placera la charge en C et en D et on recherchera quel est celui des deux points où se produit le *maximum*.

La charge placée en C donne l'effort tranchant maximum négatif représenté par l'ordonnée CC_1, et la charge placée en D donne l'effort tranchant maximum positif représenté par l'ordonnée DD_1.

La valeur de ces efforts tranchants est :

Positif :

$$T_D = \frac{P}{l}(\lambda_3 + \lambda_4);$$

Digitized by Google

Négatif :

$$T_C = -\frac{P}{l}\lambda_1.$$

Ils sont constants dans tout l'intervalle CD et seraient représentés par les droites D_1C_1' et C_1D_1' parallèles à AB.

Dans les panneaux extrêmes, l'effort tranchant maximum positif serait AA_1' et l'effort tranchant maximum négatif BB_1'.

C. — Cas de plusieurs charges formant convoi

S'il y a plusieurs charges liées invariablement entre elles, la position du convoi pour obtenir l'effort tranchant maximum, dans un panneau quelconque, n'est pas définie *a priori* comme dans le cas d'une charge unique. Elle dépend de la valeur de ces charges.

En général, on peut dire que, si la première ou la dernière charge est la plus lourde, c'est elle qu'il faudra placer sur les poutrelles limitant l'intervalle considéré.

Si, au contraire, la deuxième ou l'avant-dernière charge est plus lourde que la première ou la dernière, il y a lieu de rechercher si l'effort tranchant maximum n'est pas donné en plaçant cette deuxième ou avant-dernière charge sur les poutrelles limitant l'intervalle.

Soit la poutre AB de portée l divisée en quatre intervalles par des poutrelles placées en A, C, D, E et B, et soit à déterminer les efforts tranchants maxima positif et négatif dans l'intervalle CD, lors du passage d'un convoi composé de trois charges P_1, P_2 et P_3.

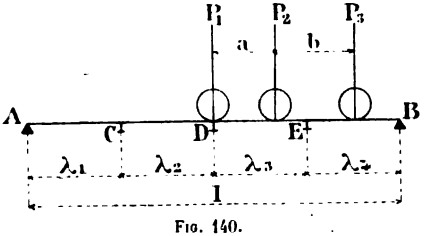


Fig. 140.

1° *Effort tranchant maximum positif.* — La première position des charges à examiner sur la poutre est celle qui consiste à placer la première des charges P_1 sur la poutrelle D.

Digitized by Google

Dans cette position (*fig.* 140), l'effort tranchant maximum positif est constant de A en D et *sa valeur est la même que celle de l'effort tranchant pour des charges directement appliquées sur la poutre*, cas qui a été déjà examiné (p. 152, C).

Cette valeur est :

$$T_D = \frac{\Sigma M_d P}{l}.$$

Il y a lieu d'examiner maintenant si, en faisant avancer le convoi vers la gauche, l'effort tranchant dans l'intervalle CD augmente ou diminue de valeur.

On amènera la charge P_2 sur la poutrelle D et la vérification ne doit avoir lieu que si $P_1 < P_2$ et $a < \lambda_2$.

La charge P_1 se trouve alors en M (*fig.* 141).

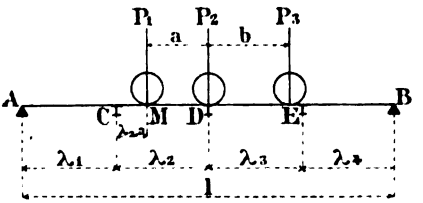


Fig. 141.

L'effort tranchant dans l'intervalle CD a pour valeur : l'effort tranchant dû aux charges agissant directement sur la poutre, diminué de la portion de charge transmise en C par la petite poutre CD sur laquelle se trouve la charge P_1.

Pour que cet effort tranchant soit plus grand que celui déterminé dans le même intervalle par les charges placées dans la première position, c'est-à-dire lorsque P_1 est en D, il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{\lambda_2}{l} > \frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Si cette inégalité est vérifiée, l'effort tranchant maximum positif dans l'intervalle CD aura pour valeur :

$$T_{CD} = \frac{\Sigma M_d P}{l} - \frac{P_1 a}{\lambda_2}.$$

L'inégalité ci-dessus peut se mettre sous une forme géné-

Digitized by Google

rale qui est la suivante :

$$\frac{\lambda_n}{l} > \frac{P_1}{\Sigma P}.$$

dans laquelle : λ_n est l'intervalle considéré ;

P_1, la première charge ;

ΣP, la somme de toutes les charges engagées sur la poutre.

Remarque. — Il pourrait se faire que les deux premières charges soient très rapprochées (bogies d'une locomotive) et qu'en plaçant la *troisième charge* sur la poutrelle, les deux précédentes se trouvent dans l'intervalle considéré comme dans la figure 142.

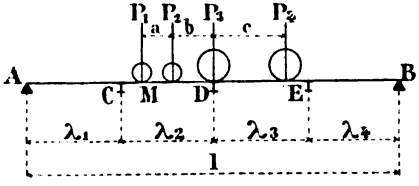


Fig. 142.

On essayera d'abord par l'inégalité ci-dessus si la première charge seule engagée dans l'intervalle donne un effort tranchant plus grand que dans la première position, et, si cela est, on vérifiera l'inégalité suivante :

$$\frac{\lambda_n}{l} > \frac{P_1 + P_2}{\Sigma P}.$$

qui est relative aux deux premières charges engagées. Si cette inégalité se vérifie, l'effort tranchant maximum positif sera donné par cette dernière position des charges qui est représentée sur la figure.

L'effort tranchant maximum positif dans l'intervalle considéré CD, par exemple, aura alors pour valeur :

$$T_{CD} = \frac{\Sigma M_d P}{l} - \frac{P_1(a+b)}{\lambda_2} - \frac{P_2 b}{\lambda_2}.$$

2° *Effort tranchant maximum négatif.* — Les mêmes opérations sont à refaire, mais en plaçant la première charge ou la suivante, le cas échéant, sur l'entretoise placée à gauche de l'intervalle.

Digitized by Google

Si la première charge donne l'effort maximum, l'effort tranchant maximum négatif, dans l'intervalle DE, sera obtenu en plaçant la charge de tête, le convoi s'avançant de A vers B, sur l'entretoise D (*fig.* 143).

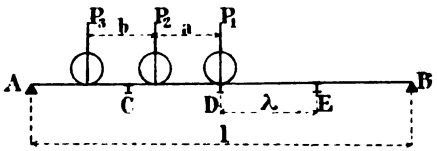


Fig. 143.

Si, au contraire, c'est la deuxième charge qui donne l'effort maximum, ce qui aura lieu si l'inégalité $\frac{\lambda_n}{l} > \frac{P_1}{\Sigma P}$ est vérifiée, il faudra placer cette deuxième charge sur l'entretoise D, la charge de tête se trouvant alors dans l'intervalle considéré (*fig.* 144).

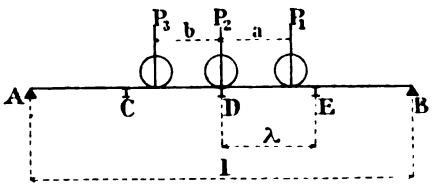


Fig. 144.

Pour la première position, la valeur de l'effort tranchant maximum négatif sera donnée par la formule :

$$T_{DE} = -\frac{\Sigma M_g P}{l}.$$

$\Sigma M_g P$ est la somme des moments par rapport à l'appui de gauche de toutes les charges engagées sur la poutre.

Pour la deuxième position, on aura :

$$T_{DE} = -\left(\frac{\Sigma M_g P}{l} - \frac{P_1 a}{\lambda}\right),$$

λ étant la longueur de l'intervalle considéré.

Digitized by Google

Enfin il pourrait se faire qu'une troisième position donnât l'effort maximum ; on procéderait alors comme il a été fait pour le même cas dans la recherche de l'effort tranchant maximum positif, mais en tenant toujours compte que le convoi se meut de la gauche vers la droite.

139. Exemples d'application. — Premier exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans une poutre de 12 mètres de portée qui donne passage à une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant, transmise à la poutre par des entretoises distantes de 3 mètres.

La charge étant uniformément répartie, on recherchera d'abord la position des points K.

Dans les premier et dernier intervalles, ces points se confondent avec les appuis.

Pour les deuxième et troisième intervalles, la formule donne :

$$x_n = \lambda_n \frac{a}{l - \lambda_n}.$$

Deuxième intervalle :

$$x_2 = 3^m \times \frac{3^m}{12 - 3} = 1 \text{ mètre.}$$

Troisième intervalle :

$$x_3 = 3^m \times \frac{6^m}{12 - 3} = 2 \text{ mètres.}$$

D'autre part, la formule générale de l'effort tranchant :

$$T_K = \frac{p}{2}\left(\frac{\alpha_n^2}{l} - \frac{\alpha_n'^2}{\lambda_n}\right).$$

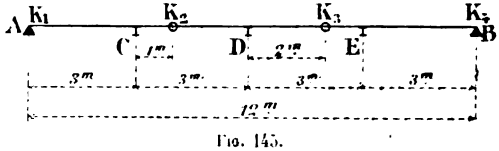


Fig. 145.

donne (*fig.* 145) :

1° EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA POSITIFS

Premier intervalle :

$$\alpha_1 = 12^m, \quad \alpha'_1 = 3^m, \quad \lambda_1 = 3^m.$$
$$T_1 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{\overline{12}^2}{12} - \frac{\overline{3}^2}{3}\right) = 9 \text{ tonnes.}$$

Deuxième intervalle :

$$\alpha_2 = 8^m, \quad \alpha'_2 = 2^m, \quad \lambda_2 = 3^m.$$
$$T_2 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{\overline{8}^2}{12} - \frac{\overline{2}^2}{3}\right) = 4 \text{ tonnes.}$$

Troisième intervalle :

$$\alpha_3 = 4^m, \quad \alpha'_3 = 1^m, \quad \lambda_3 = 3^m.$$
$$T_3 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{\overline{4}^2}{12} - \frac{\overline{1}^2}{3}\right) = 1 \text{ tonne.}$$

Dernier intervalle :

$$\alpha_4 = 0, \quad \alpha'_4 = 0, \quad \lambda_4 = 3^m.$$
$$T_4 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{0}{12} - \frac{0}{3}\right) = 0.$$

2° EFFORTS TRANCHANTS MAXIMA NÉGATIFS

Premier intervalle :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha'_1 = 0.$$
$$T_1 = 0.$$

Deuxième intervalle :

$$\alpha_2 = 4^m, \quad \alpha'_2 = 1^m, \quad \lambda_2 = 3^m$$
$$T_2 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{\overline{4}^2}{12} - \frac{\overline{1}^2}{3}\right) = 1 \text{ tonne.}$$

Digitized by Google

Troisième intervalle:

$$\alpha_3 = 8^m, \quad \alpha'_3 = 2^m, \quad \lambda_4 = 3^m.$$

$$T_3 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{8^2}{12} - \frac{2^2}{3}\right) = 4 \text{ tonnes.}$$

Dernier intervalle :

$$\alpha_4 = 12^m, \quad \alpha'_4 = 3^m, \quad \lambda_4 = 3^m.$$

$$T_4 = \frac{2^T}{2}\left(\frac{12^2}{12} - \frac{3^2}{3}\right) = 9 \text{ tonnes.}$$

Tous ces résultats sont relevés dans l'épure (*fig.* 146), qui donne la ligne représentative des efforts tranchants maxima positifs et négatifs.

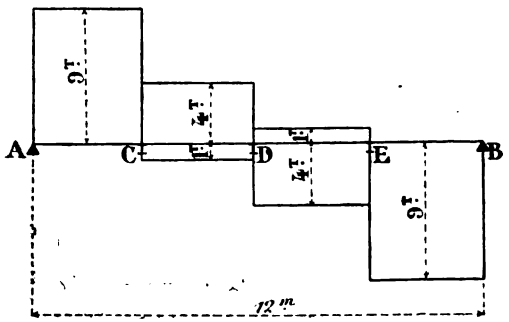


Fig. 146.

140. Deuxième exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans la même poutre que celle du premier exemple, mais en supposant que la charge uniforme soit remplacée par une charge unique de 10 tonnes.

On placera successivement la charge de 10 tonnes sur tous les points d'attache des entretoises.

Au point C. — Effort tranchant maximum positif dans l'intervalle AC:

$$T_{AC} = \frac{10^T \times 9^m}{12^m} = +7^T,5.$$

Digitized by Google

Effort tranchant maximum négatif dans l'intervalle CD :

$$T_{CD} = -\frac{10^T \times 3^m}{12^m} = -2^T,5.$$

Au point D. — Effort tranchant maximum positif dans l'intervalle CD :

$$T_{CD} = \frac{10^T \times 6^m}{12^m} = +5 \text{ tonnes.}$$

Effort tranchant maximum négatif dans l'intervalle DE :

$$T_{DE} = -\frac{10^T \times 6^m}{12^m} = -5 \text{ tonnes.}$$

Au point E. — Effort tranchant maximum positif dans l'intervalle DE :

$$T_{DE} = \frac{10^T \times 3^m}{12^m} = +2^T,5.$$

Effort tranchant maximum négatif dans l'intervalle EB :

$$T_{EB} = -\frac{10^T \times 9^m}{12^m} = -7^T,5.$$

L'effort tranchant négatif dans l'intervalle AC est nul, et il en est de même pour l'effort tranchant positif dans l'intervalle EB.

La ligne représentative des efforts tranchants pourrait être obtenue en portant sur les verticales des points d'attache des entretoises les valeurs ci-dessus; mais il est plus simple de tracer d'abord les lignes représentatives pour une charge directe (p. 173, B) en portant (*fig.* 147) $AA_1 = BB_1 = P = 10$ tonnes, et de joindre BA_1 et AB_1.

On mènera ensuite des verticales par les points d'attache des entretoises qui déterminent, sur les droites BA_1 et AB_1, les points C_1, D_1, E_1, C'_1, D'_1 et E'_1.

Par tous ces points on mènera des parallèles à AB dans les intervalles de gauche pour les efforts positifs et dans les inter-

Digitized by Google

valles de droite pour les efforts négatifs; on obtiendra ains

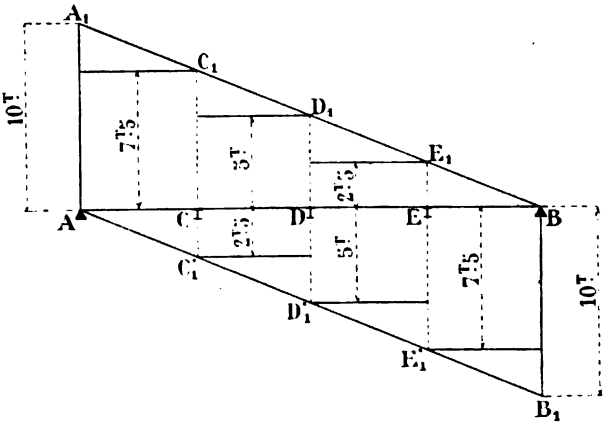


Fig. 147.

les lignes en escalier qui représentent les efforts tranchants quand la charge se meut sur la poutre.

141. Troisième exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans la poutre des deux exemples précédents, mais en supposant qu'elle donne passage à un convoi non retournable, de trois charges, défini par le diagramme (*fig.* 148).

D'après la répartition des charges du convoi, c'est la charge n° 1 ou n° 2 qui donnera les efforts tranchants maxima positifs pendant la marche du convoi de droite vers la gauche, tandis qu'il est certain que c'est la charge n° 3 qui donnera les efforts tranchants maxima négatifs pendant la marche du convoi de gauche vers la droite.

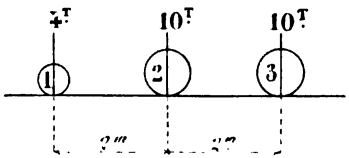


Fig. 148.

Digitized by Google

1° *Efforts tranchants maxima positifs* (*fig.* 149)

Intervalle AC. — Examinons si la deuxième position, c'est-à-dire la roue n° 2 placée en C, donne le maximum.

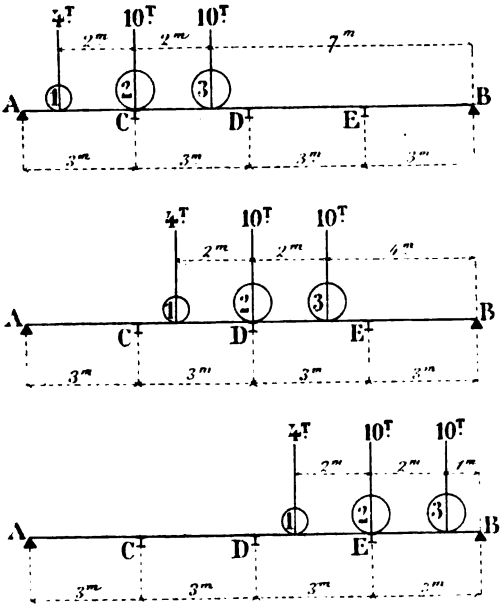


Fig. 149.

A cet effet il faut que l'inégalité $\frac{\lambda_n}{l} > \frac{P_1}{\Sigma L}$ soit vérifiée.

Or :

$$\frac{\lambda_n}{l} = \frac{3^m}{12^m} = \frac{1}{4} = 0,25$$

et

$$\frac{P_1}{\Sigma P} = \frac{4^T}{24^T} = \frac{1}{6} = 0,16.$$

Digitized by Google

L'inégalité étant satisfaite, c'est la deuxième roue qui donnera l'effort tranchant maximum; sa valeur tirée de la formule :

$$T = \frac{\Sigma M_d P}{l} - \frac{P_1 a}{\lambda}$$

donne :

$$T_{AC} = \frac{4^T \times 11^m + 10^T \times 9^m + 10^T \times 7^m}{12^m} - \frac{4^T \times 2^m}{3^m} = 14^T,33.$$

Intervalle CD. — Toutes les charges se trouvant également sur la poutre et λ_2 ayant même valeur que λ_1, c'est encore la deuxième position qui donne l'effort tranchant maximum positif.

$$T_{CD} = \frac{4^T \times 8^m + 10^T \times 6^m + 10^T \times 4^m}{12^m} - \frac{4^T \times 2^m}{3^m} = 8^T,33.$$

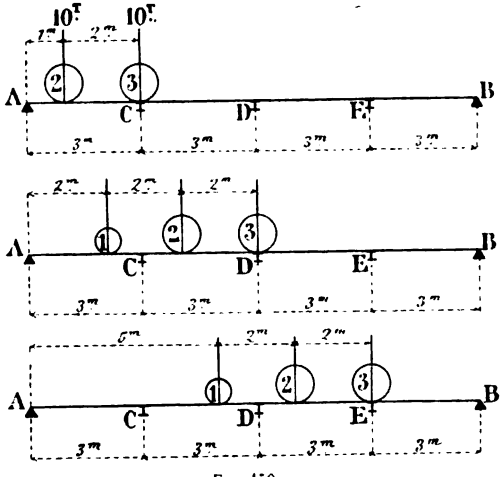


Fig. 150.

Intervalle DE. — C'est toujours la deuxième position.

$$T_{DE} = \frac{4^T \times 5^m + 10^T \times 3^m + 10^T \times 1^m}{12^m} - \frac{4^T \times 2^m}{3^m} = 2^T,33$$

Digitized by Google

2° *Efforts tranchants maxima négatifs* (*fig.* 150)

La roue n° 3, c'est-à-dire la roue de tête lorsque le convoi s'avance de gauche vers la droite, produit toujours l'effort maximum négatif en la plaçant sur l'entretoise de gauche de l'intervalle.

On aura donc successivement en appliquant la formule

$$T = \frac{\Sigma M_g P}{l} :$$

Intervalle CD :

$$T_{CD} = -\frac{10^T \times 3^m + 10^T \times 1^m}{12^m} = -3^T,33.$$

Intervalle DE :

$$T_{DE} = -\frac{10^T \times 6^m + 10^T \times 4^m + 4^T \times 2^m}{12^m} = -9 \text{ tonnes.}$$

Intervalle EF :

$$T_{EF} = -\frac{10^T \times 9^m + 10^T \times 7^m + 4^T \times 5^m}{12^m} = -15 \text{ tonnes.}$$

La ligne représentative des efforts tranchants maxima pendant la marche du convoi sur la poutre est composée d'une série de droites disposées en escaliers.

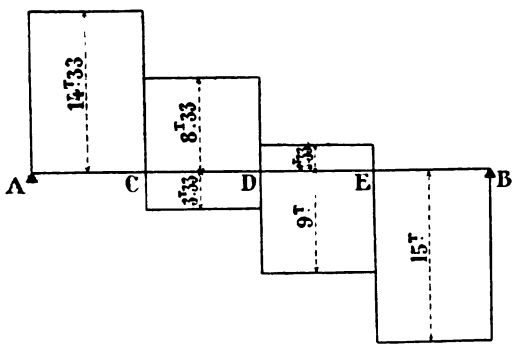


Fig. 151.

La figure 151 représente l'épure de ces efforts tranchants, sur laquelle sont consignés les résultats obtenus.

Digitized by Google

CHAPITRE IX

POUTRES ENCASTRÉES AUX DEUX APPUIS

---

§ 1. — CHARGES UNIFORMES

142. Charges uniformes complètes (*fig.* 152).

Données : { Portée de la poutre..... l
Charge par mètre..... p

Réactions. — La charge étant symétrique par rapport au milieu de la poutre, les réactions sont :

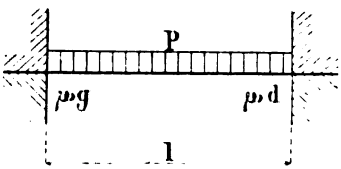


Fig. 152.

$$R_g = R_d = \frac{pl}{2}.$$

Moments fléchissants. — Aux appuis, par suite de l'encastrement, il se produit deux couples dont les moments fléchissants sont négatifs et ont pour valeur :

$$\mu_g = \mu_d = -\frac{pl^2}{12}.$$

La formule qui donne le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre à une distance x de l'appui de gauche est :

$$M_x = \frac{1}{2} px(l - x) + \mu_g$$

Digitized by Google

et, en remplaçant μ_g par sa valeur $-\frac{pl^2}{12}$:

$$M_x = \frac{1}{2} px(l - x) - \frac{pl^2}{12}.$$

Le moment fléchissant au milieu de la poutre est positif et a pour valeur :

$$M = \frac{1}{24} pl^2.$$

Ce moment est égal en valeur absolue à la moitié du moment fléchissant sur appui.

La ligne représentative des moments fléchissants (*fig.* 153) est une parabole dont le sommet se trouve sur la verticale du milieu de la poutre, et qui a pour ordonnée positive en ce point $EE_1 = \frac{1}{24} pl^2$.

Sur les appuis, les ordonnées AA_1 et BB_1 sont négatives et égales à μ_g $\mu_d = -\frac{pl^2}{12}$.

Les ordonnées relatives aux moments fléchissants sont à compter à partir de la ligne AB jusqu'à la parabole (parties hachurées).

La figure montre que les moments fléchissants sont négatifs dans les régions AC et BD et positifs dans la région CD.

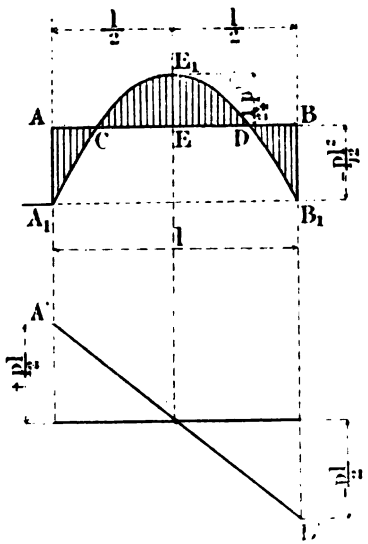


Fig. 153.

En C et en D, les moments fléchissants sont nuls.

Les distances AC et DB sont égales à :

$$AC = DB = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}211\,l.$$

Digitized by Google

Efforts tranchants. — La formule qui donne l'effort tranchant en un point quelconque de la poutre situé à une distance x de l'appui de gauche est :

$$T = p\left(\frac{l}{2} - x\right);$$

sur l'appui de gauche $T_g = + R_g = \frac{pl}{2}$;

sur l'appui de droite $T_d = - R_d = - \frac{pl}{2}$.

La ligne représentative des efforts tranchants est une droite A'B' qui passe par le milieu de la poutre et qui découpe sur les verticales des appuis des segments égaux à $\pm \frac{pl}{2}$ (*fig.* 153).

De A en E, les efforts tranchants sont positifs, et de E en B ils sont négatifs.

Flèches. — La formule qui donne la flèche en un point quelconque de la poutre est :

$$y = \frac{px^2}{24 . EI}(2lx - x^2 - l^2).$$

La flèche maxima se produit au milieu de la poutre, et sa valeur est :

$$f_m = - \frac{pl^4}{384 . EI}.$$

142 *a*. Application à une poutre de 8 mètres de portée supportant une charge uniformément répartie de 2 tonnes par mètre courant. — *Réactions :*

$$R_g = R_d = \frac{pl}{2} = \frac{2^T \times 8^m}{2} = 8 \text{ tonnes.}$$

Moments d'encastrement sur les appuis :

$$\mu_g = \mu_d = - \frac{pl^2}{12} = - \frac{2^T \times \overline{8}^2}{12} = - 10^{Tm},667.$$

Digitized by Google

Moment maximum dans la travée.

Il se produit au milieu, et sa valeur est :

$$M = \frac{1}{24} pl^2 = \frac{1}{24} 2^T \times \overline{8}^2 = 5^{Tm},333.$$

Ligne représentative des moments fléchissants (fig. 154).

Échelles { Longueur..... 1 centimètre pour 1 mètre.
Moments fléchissants. 1 centimètre pour 2 Tm.

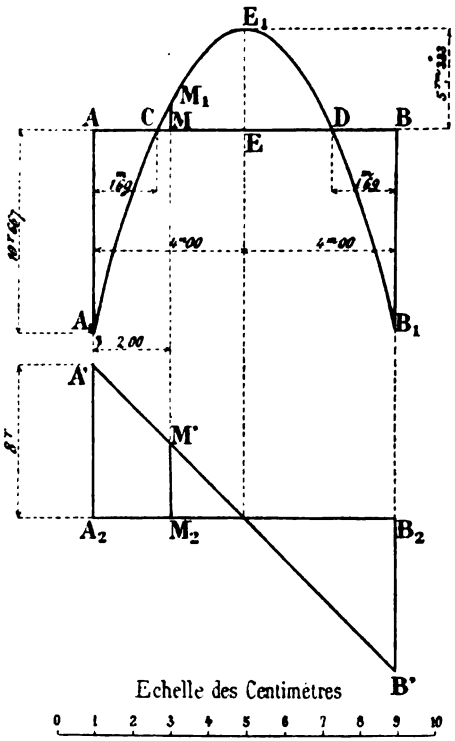


Fig. 154.

On prendra AB = $8^m \times 1^{cm}$ = 8 centimètres.

Digitized by Google

Sur les verticales de A et de B, on portera négativement :

$$AA_1 = BB_1 = \mu_g = \mu_d = -\frac{10^{Tm},667}{2^{Tm}} \times 1^{cm} = -5^{cm},333.$$

Ensuite, sur la verticale du milieu de AB, on portera positivement $EE_1 = +\frac{pl^2}{24} = \frac{5^{Tm},333}{2^{Tm}} \times 1^{cm} = 2^{cm},67$, et, par les trois points A_1, E_1, B_1, ainsi obtenus, on fera passer une parabole dont le sommet sera en E_1.

Les points C et D sont distants des appuis A et B de la valeur :

$$AC = DB = 0,211l = 0,211 \times 8^m = 1^m,688.$$

Soit à l'échelle..... $1^{cm},69$.

En un point M de la poutre situé à 2 mètres de l'appui de gauche, le moment fléchissant, qui est positif, est représenté par l'ordonnée MM_1, qui mesure $0^{cm},65$; sa valeur est donc :

$$M = 0,65 \times 2^{Tm} = 1^{Tm},3.$$

La formule générale $M = \frac{1}{2} px(l - x) + \mu_g$ donnerait :

$$M = \frac{1}{2} 2^T \times 2(8 - 2) - 10^{Tm},667 = 1^{Tm},333.$$

Efforts tranchants :

Effort sur appuis :

$$T_g = \pm \frac{pl}{2} = \pm \frac{2^T \times 8^m}{2} = \pm 8 \text{ tonnes.}$$

Si l'on prend comme échelle des efforts 1 centimètre pour 2 tonnes, on portera positivement $A_2A' = \frac{8^T}{2} = 4$ centimètres, et négativement $B_2B' = 4$ centimètres.

On joindra A'B' qui sera la ligne représentative des efforts tranchants.

Au point M par exemple, situé à 2 centimètres de A (c'est-à-dire à 2 mètres), l'ordonnée M_2M' mesure 2 centi-

Digitized by Google

mètres ; l'effort tranchant correspondant qui est positif aura pour valeur :

$$2^{cm} \times 2^{T} = 4 \text{ tonnes.}$$

C'est bien la valeur que donne la formule générale :

$$T = p\left(\frac{l}{2} - x\right) = 2^{T}\left(\frac{8^{m}}{2} - 2^{m}\right) = 4 \text{ tonnes.}$$

Flèche. — La flèche maxima se produit au milieu et a pour valeur, si $I = 0{,}001000$ et $E = 16 \times 10^{9}$:

$$f_m = \frac{2.000 \times \overline{8}^{4}}{384 \times 16 \times 10^{9} \times 0{,}001} = 0^{m}{,}0013.$$

143. Charge uniforme incomplète sur une longueur α. — Soit l la portée, et p la charge par mètre courant (*fig.* 155).

Réactions. — La réaction de gauche a pour valeur :

$$R_g = \frac{p\alpha}{2l^3}(\alpha^3 + 2l^3 - 2l\alpha^2).$$

Celle de droite :

$$R_d = \frac{p\alpha}{2l^3}(2l\alpha^2 - \alpha^3).$$

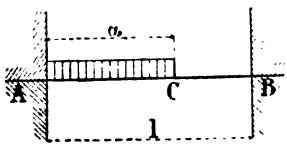


Fig. 155.

Moments fléchissants sur appui :

$$\mu_g = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(6l^2 - 8\alpha l + 3\alpha^2) \text{ (négatif)};$$

$$\mu_d = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(4l\alpha - 3\alpha^2) \text{ (négatif)}.$$

Moments fléchissants dans la travée.

De A jusqu'en C :

$$M_x = R_g x - \frac{px^2}{2} + \mu_g;$$

En C :

$$M_C = R_g \alpha - \frac{p\alpha^2}{2} + \mu_g.$$

Digitized by Google

De C en B :

$$M_x = R_g x + \mu_g - p\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Moment fléchissant maximum dans la travée. — Il se produit au point d'abscisse,

$$x = \frac{R_g}{p},$$

et sa valeur est :

$$M_m = \frac{\overline{R_g}^2}{2p} + \mu_g$$

(positif).

La ligne représentative des moments fléchissants peut se déterminer simplement de la manière suivante (*fig.* 156) :

On tracera la ligne représentative des moments fléchissants pour la charge partielle, mais en supposant la poutre reposant sur deux appuis libres (n° 116); on obtiendra ainsi la courbe AC_1B.

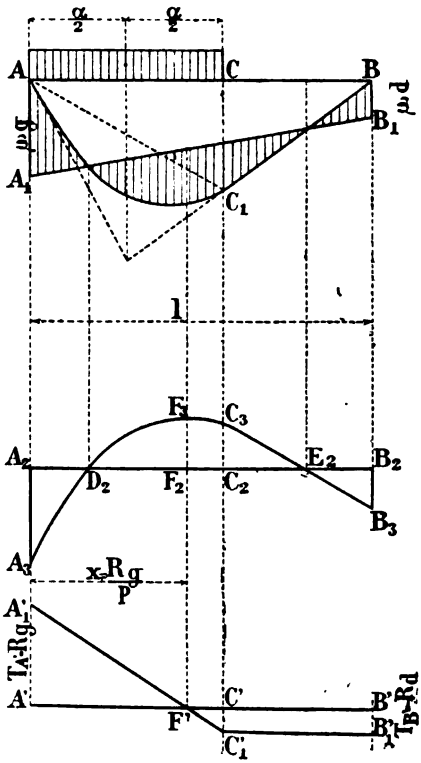


Fig. 156.

On portera ensuite sur les appuis :

$$AA_1 = \mu_g \quad \text{et} \quad BB_1 = \mu_d,$$

et on joindra les deux points obtenus A_1, B_1 par une droite.

La partie hachurée comprise entre cette droite A_1B_1 et la

Digitized by Google

courbe AC_1B donnera les ordonnées des moments fléchissants.

On pourra relever ensuite ces ordonnées et les porter avec leurs signes sur la droite A_2B_2 pour obtenir la ligne représentative $A_3C_3B_3$.

Au point C_3, la droite B_3C_3 est tangente à la portion de parabole A_3C_3.

La figure montre que :

Les moments sont négatifs dans les régions A_2D_2 et E_2B_2, qu'ils sont positifs de D_2 en E_2 et qu'ils sont nuls en D_2 et E_2.

Le maximum positif se produit en F_2 pour $x = \frac{R_g}{p}$ et ce maximum a pour valeur $F_2F_3 = \frac{\overline{R_g}^2}{2p} + \mu_g$.

Efforts tranchants. — De A en C, la formule qui donne l'effort tranchant est :

$$T_{A-C} = R_g - px.$$

Cet effort tranchant est positif tant que : $x < \frac{R_g}{p}$,

pour $$x = \frac{R_g}{p},$$

point où le moment fléchissant positif est maximum, il est égal à 0.

A l'appui A :

$$T_A = R_g \text{ (positif)};$$

Au point C :

$$T_C = R_g - p\alpha \text{ (négatif)}.$$

De C en B, l'effort tranchant est constant, négatif et égal à :

$$R_g - p\alpha = - R_d.$$

La ligne représentative des efforts tranchants se compose de deux droites $A'_1C'_1$ et $C'_1B'_1$, pour lesquelles on a :

$$A'A'_1 = R_g, \qquad C'C'_1 = B'B'_1 = - R_d.$$

Digitized by Google

La droite $A'_1C'_1$ passe par F', point où le moment fléchissant est maximum.

De A' en F', les efforts tranchants sont positifs, et de F' en B' ils sont négatifs.

143 *a*. Application à une poutre de 6 mètres de portée, soumise à l'action d'une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant et sur une longueur de 2 mètres à partir de l'appui de gauche. — On a :

$$l = 6^{\mathrm{m}}, \quad p = 2^{\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad a = 2^{\mathrm{m}}.$$

Réactions :

$$R_g = \frac{pa}{2l^3}(a^3 + 2l^3 - 2la^2) = \frac{2^{\mathrm{T}} \times 2^{\mathrm{m}}}{2 \times 6^3}(2^3 + 2 \times 6^3 - 2 \times 6 \times 2^2)$$
$$= 3^{\mathrm{T}},63$$
$$R_d = \frac{pa}{2l^3}(2la^2 - a^3) = \frac{2^{\mathrm{T}} \times 2^{\mathrm{m}}}{2 \times 6^3}(2 \times 6 \times 2^2 - 2^3)$$
$$= 0^{\mathrm{T}},37.$$

Vérification : $R_g + R_d = pa$;

$$R_g + R_d = 3^{\mathrm{T}},63 + 0^{\mathrm{T}},37 = 4^{\mathrm{T}},$$
$$pa = 2^{\mathrm{T}} \times 2^{\mathrm{m}} = 4^{\mathrm{T}}.$$

Moments fléchissants sur les appuis :

$$\mu_g = -\frac{pa^2}{12l^2}(6l^2 - 8al + 3a^2) = -\frac{2^{\mathrm{T}} \times 2^2}{12 \times 6^2}(6 \times 6^2 - 8 \times 2 \times 6 + 3 \times 2^2)$$
$$= -2^{\mathrm{Tm}},44$$
$$\mu_d = -\frac{pa^2}{12l^2}(4la - 3a^2) = -\frac{2^{\mathrm{T}} \times 2^2}{12 \times 6^2}(4 \times 6 \times 2 - 3 \times 2^2)$$
$$= -0^{\mathrm{Tm}},66.$$

Moment fléchissant maximum dans la travée. — Il se produit pour $x = \frac{R_g}{p} = \frac{3^{\mathrm{T}},63}{2^{\mathrm{T}}} = 1^{\mathrm{m}},815,$

Digitized by Google

et sa valeur est :

$$M_m = \frac{\overline{R_g}^2}{2p} + \mu_g = \frac{\overline{3,63}^2}{2 \times 2} - 2^{Tm},44 = 0^{Tm},85.$$

Ligne représentative des moments fléchissants et des efforts tranchants (*fig.* 157) :

Echelles :
Longueur..... 1 centimètre par mètre.
Efforts ..... 1 centimètre pour 1 tonne.
Moments fléchissants. 1 centimètre par tonne-mètre.

D'après le n° 116, pour une poutre posée librement sur deux appuis, on a :

$$EF = \frac{p\alpha^2}{4l}(2l - \alpha) = \frac{2^T \times \overline{2}^2}{4 \times 6}(2 \times 6 - 2) = 3^{Tm},333,$$

soit à l'échelle $3^{cm},33$.

On mènera la verticale CC_1 et la droite AC_1.

On divisera F'F en deux parties égales, ce qui donnera le point F" ; on pourra alors tracer l'arc de parabole $AF''C_1$ et sa tangente C_1B.

On portera ensuite sur les verticales des appuis, à l'échelle des moments :

$$AA_1 = -2^{Tm},44 \quad \text{soit} \quad 2^{cm},44.$$
$$BB_1 = -0^{Tm},66 \quad \text{soit} \quad 0^{cm},66.$$

On réunira les deux points obtenus A_1 et B_1 par une droite A_1B_1.

On relèvera ensuite les ordonnées comprises entre $AF''C_1B$ et A_1B_1, en tenant compte des signes, et on les portera sur la droite A_2B_2.

Quatre points de la ligne représentative sont immédiatement connus, ce sont les points A_3, D_2, E_2, B_3.

Un cinquième M_3 est celui où le moment fléchissant dans la travée est maximum.

Sa valeur est $0^{Tm},85$, soit $0^{cm},85$, et le point M_2 est à une

Digitized by Google

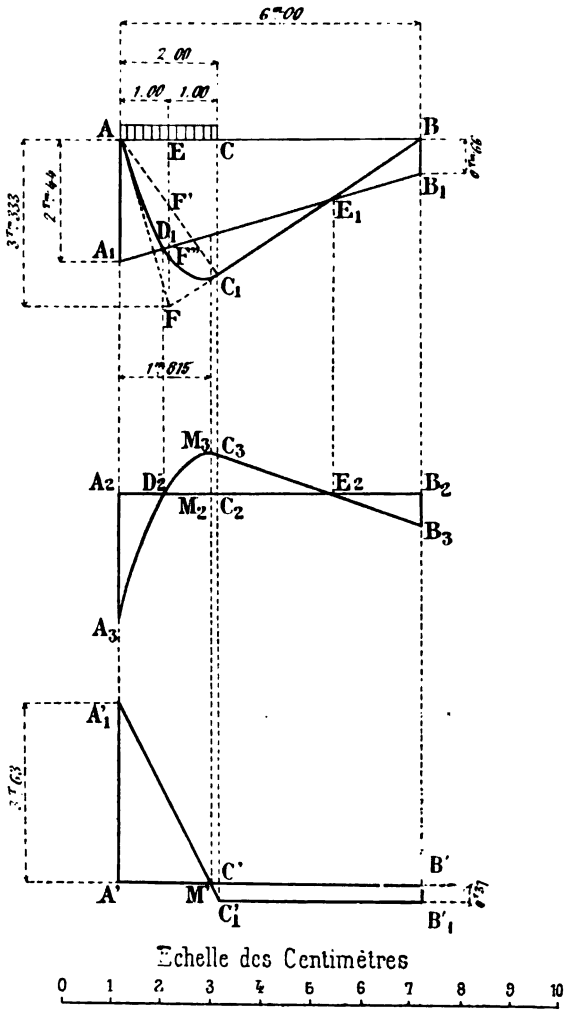


Fig. 157.

Digitized by Google

distance de l'appui de gauche de $1^m,815$, soit à l'échelle $1^{cm},815$.

La ligne représentative se compose d'une courbe $A_3D_2M_3C_3$ et d'une droite C_3B_3.

Les ordonnées sont à relever entre cette ligne et la droite A_2B_2.

Efforts tranchants. — On portera :

$$A'A'_1 = 3^T,63,$$

soit à l'échelle $3^{cm},63$;

et $$B'B'_1 = 0^T,37,$$

soit à l'échelle $0^{cm},37$.

On mènera $B'_1C'_1$ parallèle à $A'B'$ jusqu'à la rencontre C'_1 de la verticale de l'extrémité de la charge, et on joindra $A'_1C'_1$.

Cette droite doit passer par le point M', correspondant au moment fléchissant maximum dans la travée.

La ligne représentative sera donc $A'_1C'_1B'_1$. Les ordonnées sont à compter à partir de la ligne A'B'.

§ 2. — CHARGES CONCENTRÉES

144. Charge unique placée en un point quelconque de la poutre (*fig.* 158). — Données :

Portée de la poutre l;
Charge P, située à des distances a et b des appuis.

Moments fléchissants sur appuis :

On a : $\mu_g = -\frac{Pab^2}{l^2}$ ou bien $-\frac{Pa}{l^2}(l-a)^2$;

$\mu_d = -\frac{Pba^2}{l^2}$ ou bien $-\frac{Pa^2}{l^2}(l-a)$;

Ces deux moments sont toujours négatifs.

Digitized by Google

Réactions sur appuis. — Les réactions sur appui sont :

$$R_g = \frac{P(3a+b)b^2}{l^3} \quad \text{ou bien} \quad \frac{P}{l^3}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l);$$

$$R_d = \frac{P(a+3b)a^2}{l^3} \quad \text{ou bien} \quad \frac{Pa^2}{l^3}(3l - 2a).$$

Moments fléchissants dans la travée. — De A en C, la formule qui donne le moment fléchissant en un point quelconque est :

$$(1) \qquad M_{A-C} = R_g x + \mu_g,$$

et de C en B la formule est :

$$(2) \qquad M_{C-B} = R_g x + \mu_g - P(x-a).$$

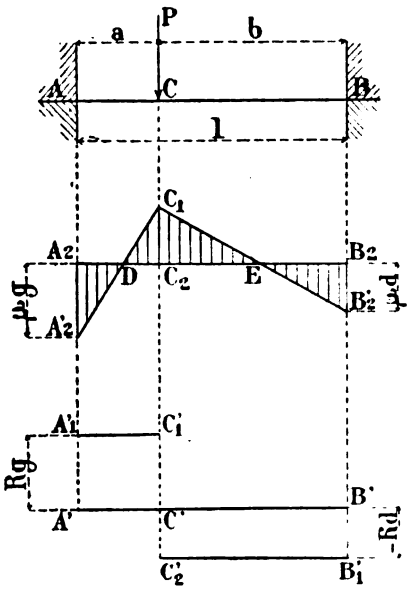


Fig. 158.

Il est entendu que, dans l'application des formules (1) et (2), le moment fléchissant sur appui doit être pris avec son signe.

Le moment maximum dans la travée se produit au droit de la charge, et il a pour valeur :

$$M_m = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}.$$

Ce moment est toujours positif.

Ligne représentative des moments fléchissants.—Pour tracer cette ligne, on portera sur les verticales des appuis et négativement,

Digitized by Google

c'est-à-dire de haut en bas, les moments fléchissants sur ces appuis :

$$A_2A_2' = -\mu_g \quad \text{et} \quad B_2B_2' = -\mu_d.$$

Sur la verticale du point où agit la charge, en C, on portera positivement $C_2C_1 = M_m = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$.

On joindra ensuite ce point C_1 aux points A_2' et B_2' par des droites, et la ligne $A_2'C_1B_2'$ donnera les ordonnées des moments fléchissants qui devront être mesurées entre cette ligne et la droite A_2B_2 ainsi que l'indique la partie hachurée.

La figure montre que, dans les régions A_2D et EB_2, les moments fléchissants sont négatifs, qu'en D et en E ils sont nuls, et que, dans la région DE, ils sont positifs.

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont constants dans chaque région à droite ou à gauche de la charge.

Dans la région AC, ils sont positifs et égaux à :

$$T_{A-C} = + R_g,$$

et, dans la région CB, ils sont négatifs et égaux à :

$$T_{C-B} = - R_d.$$

La ligne représentative des efforts tranchants se compose donc de deux droites parallèles à A'B' : l'une $A_1'C_1'$ pour les efforts positifs et l'autre $C_2'B_1'$ pour les efforts négatifs :

$$A'A_1' = R_g,$$
$$B'B_1' = - R_d.$$

Au point C, application de la charge, les efforts changent brusquement de sens.

Les ordonnées sont à mesurer de la droite A'B' aux droites $A_1'C_1'$ et $C_2'B_1'$.

145. Charge unique au milieu de la poutre. — Quand la charge P se trouve au milieu de la portée, on a alors (*fig.* 139) :

$$a = b = \frac{l}{2}$$

et les formules se simplifient beaucoup.

Digitized by Google

Réaction des appuis :

$$R_g = R_d = \frac{P}{2}.$$

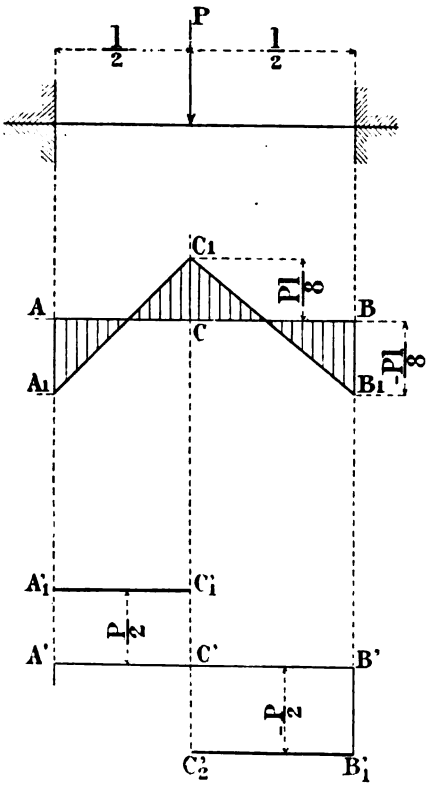


Fig. 159.

Moments fléchissants sur appuis. — Ces moments sont égaux et ont pour valeur :

$$\mu_g = \mu_d = -\frac{Pl}{8}.$$

Moment fléchissant maximum dans la travée. — Il se produit au milieu de la portée, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{Pl}{8}.$$

Les moments fléchissants sur appuis et dans la travée ont donc même valeur absolue.

La ligne représentative des moments fléchissants est $A_1C_1B_1$, pour laquelle :

$$AA_1 = CC_1 = BB_1 = \frac{Pl}{8}.$$

Efforts tranchants. — De A en C, constant, positif et égal à $R_g = \frac{P}{2}$, et de C en B, constant, négatif et égal à $-R_d = -\frac{P}{2}$.

Digitized by Google

La ligne représentative est :

$A'_1C'_1$ et $C'_2B'_1$

telle que :

$$A'A'_1 = C'C'_1 = +\frac{P}{2},$$

$$C'C'_2 = B'B'_1 = -\frac{P}{2}.$$

Flèche. — La flèche maxima se produit au milieu ; sa valeur est :

$$f = -\frac{Pl^3}{192EI}.$$

146. Cas particulier de deux charges égales et situées à égale distance des appuis (*fig.* 160).

Données :

Portée de la poutre l ;

Deux charges P situées à la distance a des appuis.

Réaction des appuis:

$$R_g = R_d = P.$$

Moments fléchissants sur les appuis :

$$\mu_g = \mu_d = -\frac{Pa(l-a)}{l}.$$

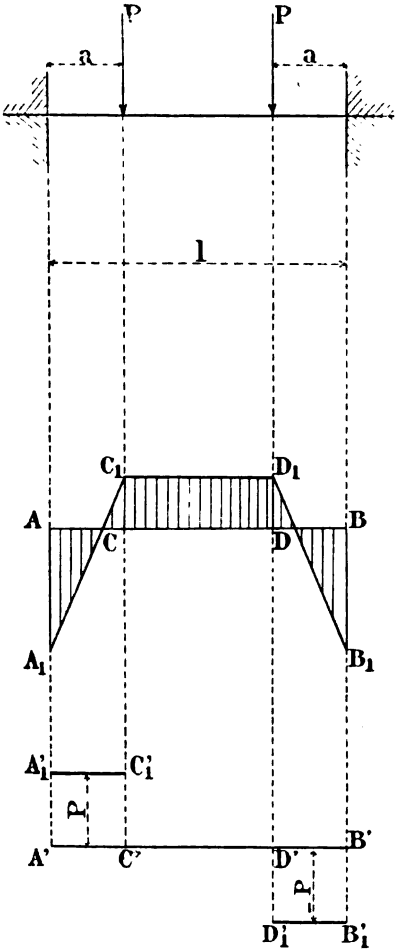


Fig. 160.

Moments fléchissants dans la travée. — Les formules générales sont :

Digitized by Google

De A en C :

$$M = R_g x + \mu_g = Px - \frac{Pa(l-a)}{l};$$

De C en D :

$$M = \frac{Pa^2}{l} \text{ (constant)};$$

De D en B :

$$M = -Px - \frac{Pa(l-a)}{l} + Pl.$$

Le moment fléchissant maximum positif est constant entre les deux charges, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{Pa^2}{l}.$$

Ligne représentative des moments fléchissants. — On portera négativement :

$$AA_1 = BB_1 = \mu_g = \mu_d = -\frac{Pa(l-a)}{l},$$

et au droit des charges :

$$CC_1 = DD_1 = \frac{Pa^2}{l}.$$

La ligne représentative sera alors :

$$A_1C_1D_1B_1.$$

Les ordonnées sont à compter à partir de la droite AB.

Efforts tranchants. — De A en C, ils sont constants, positifs et égaux à $R_g = P$;

De C en D, ils sont nuls ;

Et de D en B, ils sont constants, négatifs et égaux à $-R_d = -P$.

La ligne représentative des efforts tranchants se présente comme l'indique la figure : $A'_1C'_1CD'D'_1B'_1$, pour laquelle :

$$A'A'_1 = C'C'_1 = P;$$
$$D'D'_1 = B'B'_1 = -P.$$

Digitized by Google

147. Application à une poutre de 5 mètres de portée chargée d'un poids unique de 10 tonnes situé à 2 mètres de l'appui de droite. — On a (*fig.* 161) :

$$l = 5^{m},\ a = 3^{m},\ \text{et}\ b = 2^{m}.$$

Réactions des appuis :

$$R_g = \frac{P(3a+b)b^2}{l^3} = \frac{10^T(3\times 3+2)\overline{2}^2}{\overline{5}^3} = 3^T,52.$$

$$R_d = \frac{P(a+3b)a^2}{l^3} = \frac{10^T(3+3\times 2)\overline{3}^2}{\overline{5}^3} = 6^T,48.$$

Vérification $R_g + R_d = P$:

$$R_g + R_d = 3^T,52 + 6,48 = 10^T,00.$$

Moments fléchissants sur les appuis :

$$\mu_g = -\frac{Pab^2}{l^2} = -\frac{10^T\times 3\times\overline{2}^2}{\overline{5}^2} = -4^{Tm},8.$$

$$\mu_d = -\frac{Pba^2}{l^2} = -\frac{10^T\times 2\times\overline{3}^2}{\overline{5}^2} = -7^{Tm},2.$$

Moment fléchissant maximum positif au droit de la charge :

$$M_m = \frac{2Pa^2b^2}{l^3} = \frac{2\times 10^T\times\overline{3}^2\times\overline{2}^2}{\overline{5}^3} = 5^{Tm},76.$$

Ligne représentative des moments fléchissants :

Échelles : { Longueurs..... 1^{cm} pour 1^{m}.
{ Moments..... 1^{cm} pour 2^{Tm}.

$AB = 5^{cm}$, $AC = 3^{cm}$ et $CD = 2^{cm}$,

$AA_1 = -4^{Tm},8$ soit $2^{cm},4$,

$BB_1 = -7^{Tm},2$ soit $3^{cm},6$,

$CC_1 = +5^{Tm},76$ soit $2^{cm},88$.

Digitized by Google

La ligne représentative sera donc $A_1C_1B_1$.

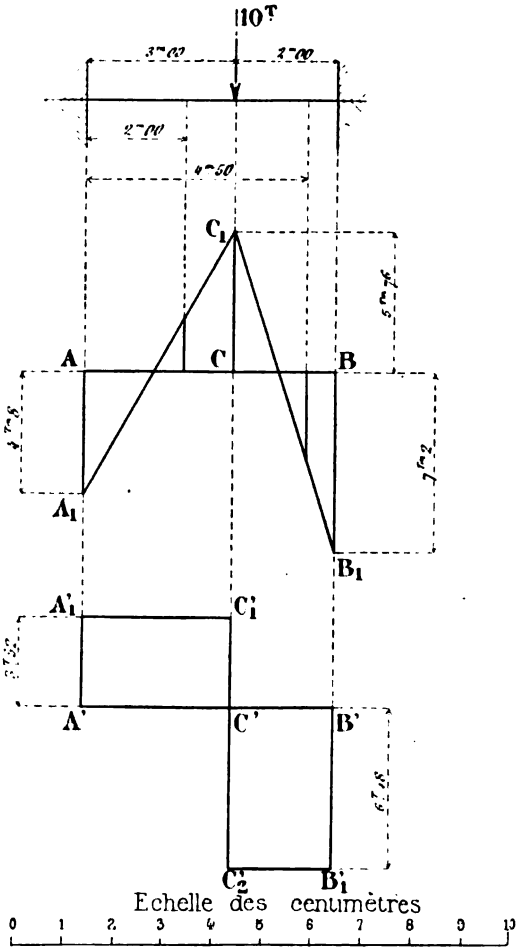


Fig. 161.

Pour un point quelconque situé à 2 mètres de l'appui

Digitized by Google

de gauche :

$$M_{2^m} = R_g x + \mu_g = 3^T,52 \times 2^m - 4^{Tm},8 = + 2^{Tm},24.$$

Pour un point situé à $4^m,50$ de l'appui de gauche :

$$\begin{aligned} M_{4,5} &= R_g x + \mu_g - P(x - a) \\ &= 3^T,52 \times 4,5 - 4^{Tm},8 - 10^T(4,5 - 3) = - 3^{Tm},96. \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces deux points relevés sur l'épure mesurent $1^{cm},1$ et $1^{cm},95$:

Soit à l'échelle de 1 centimètre pour 2 tonnes-mètres,

$$\begin{aligned} M_{2^m} &= 1,1 \times 2^{Tm} = 2^{Tm},2, \\ M_{4,5} &= 1^{cm},95 \times 2^{Tm} = 3^{Tm},9. \end{aligned}$$

Efforts tranchants. — De A en C, positif, constant et égal à :

$$T = R_g = 3^T,52;$$

de C en B, négatif, constant et égal à :

$$T = - R_d = - 6^T,48.$$

Si on les porte à l'échelle de 1 centimètre pour 2 tonnes, on aura la ligne $A'_1C'_1C'C'_2B'_1$ pour laquelle :

$$\begin{aligned} A'A'_1 = C'C'_1 &= 3^T,52, \quad \text{soit à l'échelle} \quad 1^{cm},76; \\ C'C'_2 = B'B'_1 &= - 6^T,48, \quad \text{—} \quad 3^{cm},24. \end{aligned}$$

148. Cas de plusieurs charges concentrées. — Pour ce cas, il suffira de déterminer les réactions et les moments fléchissants sur appuis pour chacune des forces, considérée comme agissant seule sur la poutre, et de faire ensuite la somme des réactions partielles et des moments fléchissants partiels pour obtenir les réactions et les moments fléchissants sur appuis pour toutes les charges réunies.

D'après les notations adoptées dans le n° 144, on aurait (*fig.* 162) :

Digitized by Google

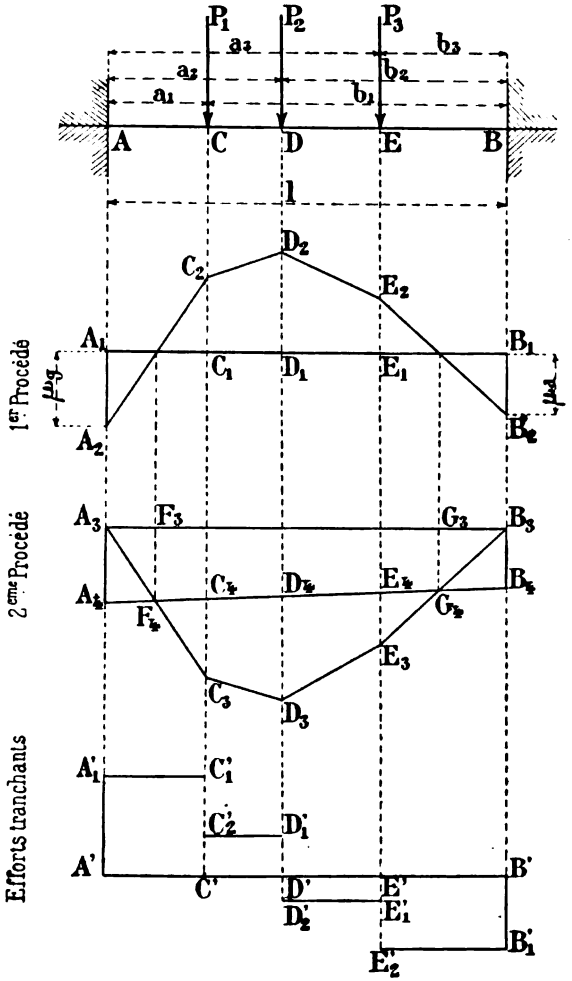


Fig. 162.

Digitized by Google

Réactions sur appuis :

$$R_g = \frac{P_1(3a_1 + b_1)\,b_1^2 + P_2(3a_2 + b_2)\,b_2^2 + P_3(3a_3 + b_3)\,b_3^2}{l^3};$$

$$R_d = \frac{P_1(a_1 + 3b_1)\,a_1^2 + P_2(a_2 + 3b_2)\,a_2^2 + P_3(a_3 + 3b_3)a_3^2}{l^3}.$$

Moments fléchissants sur appuis :

$$\mu_g = -\frac{P_1a_1b_1^2 + P_2a_2b_2^2 + P_3a_3b_3^2}{l^2};$$

$$\mu_d = -\frac{P_1b_1a_1^2 + P_2b_2a_2^2 + P_3b_3a_3^2}{l^2}.$$

Ces moments sont négatifs.

Moments fléchissants dans la travée. — De A en C, on a :

$$(1) \qquad M = R_g x + \mu;$$

De C en D :

$$(2) \qquad M = R_g x + \mu - P_1(x - a_1);$$

De D en E :

$$(3) \qquad M = R_g x + \mu - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2);$$

De E en B :

$$(4) \qquad M = R_g x + \mu - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3)$$

Pour $x = a_1$, (1) donne le moment au point C :

$$M_C = R_g a_1 + \mu.$$

Pour $x = a_2$, (2) donne le moment au point D :

$$M_D = R_g a_2 + \mu - P_1(a_2 - a_1).$$

Pour $x = a_3$, (3) donne le moment au point E :

$$M_E = R_g a_3 + \mu - P_1(a_3 - a_1) - P_2(a_3 - a_2).$$

Digitized by Google

Ligne représentative des moments fléchissants. — Premier procédé. — La ligne représentative des moments fléchissants peut se tracer en portant sur les verticales des appuis et des points d'application des charges, les valeurs des différents moments fléchissants déterminés, et en joignant ces points par des droites.

Ainsi on porterait :

$$A_1A_2 = \mu_g, \quad B_1B_2 = \mu_d;$$
$$C_1C_2 = M_C, \quad D_1D_2 = M_D \quad \text{et} \quad E_1E_2 = M_E.$$

La ligne représentative serait $A_2C_2D_2E_2B_2$.

Les ordonnées sont à compter à partir de la droite A_1B_1.

Deuxième procédé. — On déterminera la ligne représentative des moments fléchissants pour la poutre supposée libre aux appuis ; on obtiendra ainsi $A_3C_3D_3E_3B_3$.

On portera sur la verticale des appuis les valeurs de μ_g et de μ_d ; soient A_3A_1 et B_3B_1, et on joindra les points A_1 et B_1 par une droite.

Les moments fléchissants déterminés dans la poutre encastrée seront représentés, à l'échelle convenue, par les ordonnées comprises entre $A_3C_3D_3E_3B_3$ et A_1B_1.

Le moment fléchissant au point D, par exemple, serait représenté par l'ordonnée D_1D_3.

D'après la figure, les moments fléchissants seraient positifs de F_3 en G_3 et négatifs de A_3 en F_3 et de G_3 en B_3.

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont constants entre chaque charge.

De A en C :

$$T = R_g;$$

De C en D :

$$T = R_g - P_1;$$

De D en E :

$$T = R_g - P_1 - P_2;$$

et de E en B :

$$T = R_g - P_1 - P_2 - P_3 = - R_d.$$

La ligne représentative est une série de droites parallèles à A'B' et disposées en escalier.

Digitized by Google

Soit :

$$A'_1C'_1,\ C'_2D'_1,\ D'_2E'_1,\ E'_2B'_1.$$

149. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme complète de p par mètre et d'une charge isolée P en un point quelconque (*fig.* 163). — Pour les réactions des appuis et les moments fléchissants sur ces appuis, il suffira de les déterminer séparément pour chaque charge et de faire ensuite leur somme.

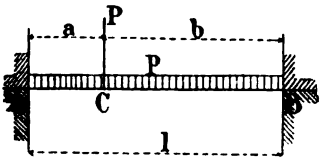


Fig. 163.

Réactions des appuis. — Pour la charge uniforme (142) :

$$R'_g = R'_d = \frac{pl}{2};$$

Pour la charge isolée (144) :

$$R''_g = \frac{P(3a + b)b^2}{l^3};$$

$$R''_d = \frac{P(a + 3b)a^2}{l^3}.$$

Soit pour les deux charges réunies :

$$R_g = R'_g + R''_g = \frac{pl}{2} + \frac{P(3a + b)b^2}{l^3};$$

$$R_d = R'_d + R''_d = \frac{pl}{2} + \frac{P(a + 3b)a^2}{l^3}.$$

Moments fléchissants sur appuis.— Pour la charge uniforme :

$$\mu'_g = \mu'_d = -\frac{pl^2}{12};$$

Pour la charge isolée :

$$\mu''_g = -\frac{Pab^2}{l^2};$$

$$\mu''_d = -\frac{Pba^2}{l^2}.$$

Digitized by Google

Soit pour les deux charges réunies :

$$\mu_g = + \mu_g' + \mu_g'' = - \frac{pl^2}{12} - \frac{Pab^2}{l^2};$$

$$\mu_d = + \mu_d' + \mu_d'' = - \frac{pl^2}{12} - \frac{Pba^2}{l^2}.$$

Moments fléchissants dans la travée. — De A en C, la formule du moment fléchissant est :

$$(1) \qquad M = R_g x + \mu_g - \frac{px^2}{2}$$

et de C en D :

$$(2) \qquad M = R_g x + \mu_g - \frac{px^2}{2} - P(x - a).$$

Le moment fléchissant maximum positif dans la travée aura lieu dans le premier tronçon AC, lorsque :

$$R_g < pa.$$

Sa valeur serait alors :

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p} + \mu_g,$$

et il se produira à une distance de l'appui de gauche $= \frac{R_g}{p}$.

La condition pour que le moment fléchissant maximum positif ait lieu dans le deuxième tronçon CD est la suivante :

$$R_g - P > pa.$$

Dans ce cas, le moment fléchissant maximum positif se produit à une distance de l'appui de gauche égale à $\frac{R_g - P}{p}$, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{(R_g - P)^2}{2p} + \mu_g + Pa.$$

Si les deux conditions ci-dessus ne sont pas remplies,

Digitized by Google

c'est que le maximum positif se produit au droit de la charge.

Efforts tranchants. — De A en C :

$$T = R_g - px$$

et de C en B :

$$T = R_g - px - P.$$

Pour l'appui A :

$$T = R_g.$$

Pour le point C (2 valeurs) :

$$T = R_g - pa\,;$$
$$T = R_g - pa - P.$$

Pour l'appui B :

$$T = -R_d.$$

Ligne représentative des moments fléchissants. — Cette ligne peut se tracer en portant sur des verticales les différentes valeurs de M déterminées par le calcul, ou bien encore en procédant comme dans le n° 148, c'est-à-dire en construisant d'abord la ligne représentative, la poutre supposée sur deux appuis libres, et en traçant ensuite la droite qui joint les extrémités des segments sur appuis dus aux moments fléchissants en ces points.

Ligne représentative des efforts tranchants. — Il suffira de porter en ordonnées, avec leurs signes, les valeurs des efforts tranchants et de réunir les points obtenus.

Ces deux tracés n'offrent aucune difficulté.

§ 3. — CHARGES VARIABLES

150. Charge uniforme de p kilogrammes par mètre. — C'est le cas du n° 143, dans lequel la longueur de la charge α varie de 0 à l (*fig.* 164).

Pour une position déterminée de la charge, les moments

Digitized by Google

fléchissants sur appuis sont :

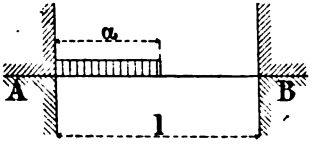


Fig. 164.

$$\mu_g = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(6l^2 - 8\alpha l + 3\alpha^2);$$

$$\mu_d = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(4l\alpha - 3\alpha^2).$$

et ces moments seront maxima lorsque la charge couvrira toute la travée; leur valeur est alors égale à $\mu_m = -\frac{pl^2}{12}$.

Moments fléchissants dans la travée. — Pour une position déterminée de la charge, le moment maximum positif se produit au point d'abscisse :

$$x = \frac{R_g}{p},$$

et sa valeur est :

$$M_m = \frac{\overline{R_g}^2}{2p} + \mu_g.$$

Le moment fléchissant maximum positif se produit au milieu de la poutre lorsque toute la travée est chargée.

Ce moment a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{24}pl^2.$$

Efforts tranchants. — Pour une charge qui se meut de A vers B, l'effort tranchant à droite du point C (*fig.* 165) est toujours maximum négatif; il est constant de C en B, et sa valeur est (n° 143) :

$$T_C = R_g - p\alpha = -R_d.$$

Pour l'appui A et pour

$$\alpha = 0, \qquad T = 0;$$

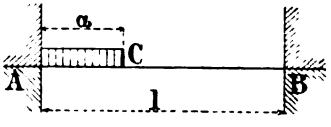


Fig. 165.

Pour l'appui B et pour

$$\alpha = l, \qquad T = -\frac{1}{2}pl.$$

Digitized by Google

La ligne représentative des efforts tranchants négatifs est une courbe du quatrième degré qui devra être tracée par points, en donnant à α différentes valeurs.

La formule dont il faudra se servir est :

$$T = -\frac{p\alpha^2}{2l^3}(2l\alpha - \alpha^2).$$

Si la charge se meut de B vers A, l'effort tranchant à gauche du point C, extrême de la charge, est toujours maximum positif; il est constant de C en A, et sa valeur est la même, en valeur absolue, que celle de l'effort tranchant négatif, mais en comptant les valeurs de α à partir de l'appui de droite.

La courbe représentative des efforts tranchants maxima positifs partira donc de l'appui B et découpera sur l'appui A un segment égal à $\frac{pl}{2}$.

La figure 166 donne les deux courbes avec des ordonnées calculées pour huit divisions égales de la portée l.

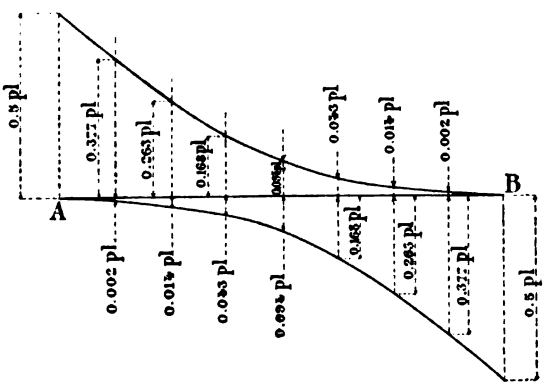


Fig. 166.

Pour une poutre quelconque, il suffira donc, pour tracer ces courbes, d'effectuer le calcul de ces ordonnées en remplaçant p et l par leurs valeurs numériques.

Digitized by Google

Ainsi donc, pour un point C de la poutre (*fig.* 167), l'effort tranchant maximum positif sera obtenu lorsque la charge variable s'étendra de l'appui de droite B jusqu'au point C, et l'effort tranchant maximum négatif sera obtenu lorsque la charge s'étendra de l'appui de gauche A jusqu'en C.

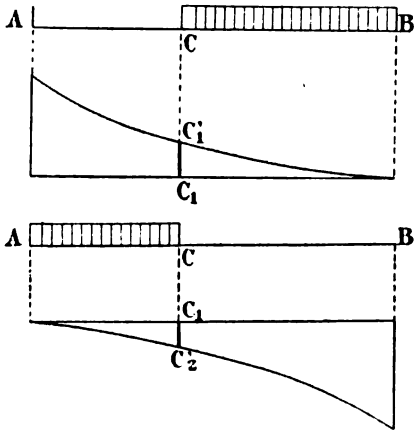


Fig. 167.

L'effort positif sera $C_1C'_1$, et l'effort négatif $C_1C'_2$.

151. Application à une poutre de 8 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniforme variable de 2 tonnes par mètre courant. — *Moments fléchissants maxima sur les appuis.* — Ces moments sont maxima lorsque la charge couvre toute la travée ; ils sont négatifs et ont pour valeur :

$$\mu_g = \mu_d = -\frac{pl^2}{12} = -\frac{2^{\mathrm{T}} \times \overline{8}^2}{12} = -10^{\mathrm{Tm}},667.$$

Moment fléchissant maximum dans la travée. — Il se produit au milieu de la poutre pour la charge complète ; sa valeur est :

$$\mathrm{M}_m = \frac{1}{24}\, pl^2 = \frac{1}{24} \times 2^{\mathrm{T}} \times \overline{8}^2 = 5^{\mathrm{Tm}},333.$$

Ligne représentative des efforts tranchants positifs et négatifs. — On remplacera, dans les valeurs des ordonnées de la courbe type, p par 2 tonnes et l par 8 mètres.

Sur les appuis, la valeur des efforts tranchants est :

$$0,5pl = 0,5 \times 2^{\mathrm{T}} \times 8^{\mathrm{m}} = 8 \text{ tonnes.}$$

Digitized by Google

Au milieu de la travée on a :

$$T = 0{,}094pl = 0{,}094 \times 2^T \times 8^m = 1^T{,}504.$$

On calculera ainsi toutes les ordonnées que l'on reportera sur les verticales des huit divisions correspondantes de la poutre.

Si l'on prend comme échelles :

Longueur..... 1 centimètre par mètre,
Forces ..... 1 centimètre pour 2 tonnes,

les courbes seront celles de la figure 168.

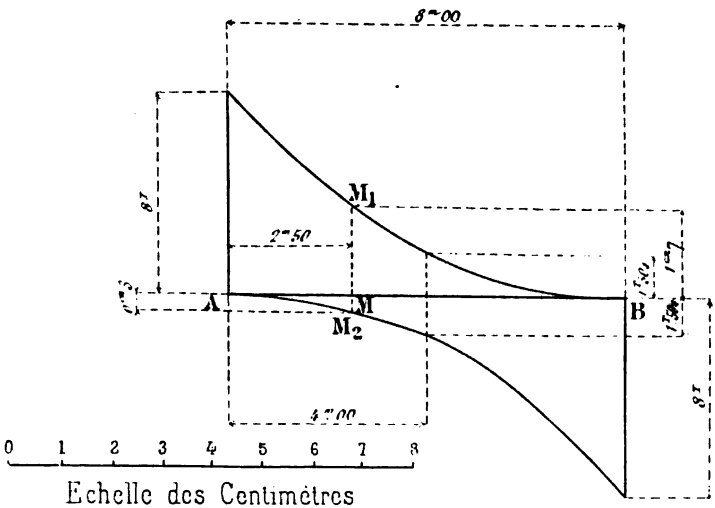


Fig. 168.

Pour le point M, par exemple, l'effort tranchant positif sera obtenu en chargeant la poutre de B en M ; l'ordonnée MM_1 de la courbe, qui mesure $1^{cm},7$, représentera un effort tranchant égal à :

$$T_M = 1{,}7 \times 2^T = 3^T{,}4.$$

Digitized by Google

L'effort tranchant négatif en ce même point sera obtenu en chargeant la poutre de A en M ; l'ordonnée MM_2, qui mesure $0^{cm},3$, représentera un effort tranchant égal à :

$$T_M = -0,3 \times 2^T = -0^T,6.$$

Si, pour la position de la charge couvrant la poutre de A en M, on voulait avoir le moment fléchissant sur l'appui de gauche, on relèverait la distance AM, qui mesure $2^{cm},5$, soit à l'échelle des longueurs $2^m,50$; cette longueur représente α que l'on porterait dans la formule du n° 149, qui donnerait :

$$\mu_g = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(6l^2 - 8\alpha l + 3\alpha^2) = -\frac{2^T \times \overline{2,5}^2}{12 \times \overline{8}^2}(6 \times \overline{8}^2 - 8 \times 2,5 \times 8 + 3 \times \overline{2,5}^2)$$

$$\mu_g = -3^{Tm},951.$$

152. Charge unique mobile. — A. *Moments fléchissants sur appuis.* — C'est le cas du n° 144 lorsque a varie. Si on remplace, dans les formules données page 197, a par la variable α, les moments fléchissants sur appuis sont :

$$(1) \qquad \mu_g = -\frac{P\alpha}{l^2}(l - \alpha)^2,$$

$$(2) \qquad \mu_d = -\frac{P\alpha^2}{l^2}(l - \alpha).$$

Lorsque la charge parcourt la poutre, les moments fléchissants sur appuis changent de valeur, et leur maximum se produit :

1° Pour l'appui de gauche, lorsque $\alpha = \frac{l}{3}$, c'est-à-dire lorsque la charge se trouve à une distance de cet appui égale à $\frac{l}{3}$;

2° Pour l'appui de droite, lorsque $\alpha = \frac{2l}{3}$.

Les moments fléchissants maxima ont pour valeur :

$$\mu_m = -\frac{4}{27}Pl = 0,148Pl.$$

Digitized by Google

La ligne représentative pour chacun de ces moments fléchissants sur appui est une courbe du troisième degré qui passe par les deux appuis et qui atteint son maximum à $\frac{1}{3}\,l$ à partir de l'appui correspondant.

Les deux courbes sont symétriques.

Les ordonnées doivent être calculées par les formules (1) et (2), en donnant à α différentes valeurs.

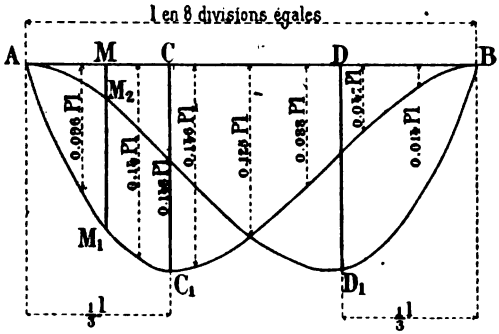


Fig. 169.

Les courbes types de la figure 169, qui pourront servir dans tous les cas, ont été déterminées pour 8 divisions égales de la portée, et pour $\frac{l}{3}$ et $\frac{2l}{3}$ qui correspondent aux moments fléchissants maxima.

Pour une poutre quelconque, il suffira de remplacer P et l par leurs valeurs numériques.

La courbe AC_1B donne les moments fléchissants à l'appui de gauche, et la courbe AD_1B, ceux de l'appui de droite.

Ainsi, pour une position M de la charge, le moment fléchissant sur l'appui de gauche sera donné par l'ordonnée MM_1, et le moment fléchissant sur l'appui de droite par l'ordonnée MM_2, en tenant compte, bien entendu, de l'échelle adoptée pour les moments fléchissants.

La figure montre que, pour obtenir le moment fléchissant maximum sur l'appui de gauche, il faut placer la charge au

Digitized by Google

point C, et, pour l'appui de droite, il faut la placer au point D.

B. *Moment fléchissant maximum positif dans la travée.* — Le moment fléchissant maximum *positif* se produit toujours au droit de la charge. Pour une position quelconque de cette charge, le moment a pour valeur :

$$M = \frac{2P\alpha^2(l-\alpha)^2}{l^3}.$$

Il est maximum maximorum positif lorsque la charge se trouve au milieu de la portée, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{Pl}{8}.$$

La ligne représentative du moment fléchissant maximum positif, lorsque la charge varie de position, est une courbe du quatrième degré qui passe par les appuis; elle est symétrique par rapport à l'ordonnée du milieu de la poutre et atteint son maximum à ce point.

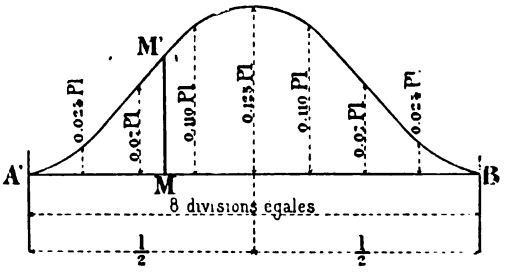


Fig. 170.

La figure 170 représente cette courbe, dont les ordonnées ont été calculées pour huit divisions égales de la poutre.

Pour une poutre quelconque, il suffira donc, pour tracer cette courbe, de remplacer P et l par leurs valeurs numériques.

Cette courbe tracée, on pourra déterminer, pour une position quelconque M de la charge, le moment fléchissant maximum positif en ce point de la poutre; ce moment se produisant

Digitized by Google

au droit de la charge, il suffira de mesurer l'ordonnée MM', que l'on devra multiplier par le coefficient correspondant à l'échelle des moments adoptée dans le tracé de la courbe.

C. *Efforts tranchants.* — L'effort tranchant à gauche de la charge est positif et constant jusqu'à l'appui de gauche, il est égal à :

$$T = \frac{P}{l^3}(2\alpha^3 + l^3 - 3l\alpha^2),$$

et l'effort tranchant à droite de la charge, qui est négatif et constant jusqu'à l'appui de droite, est égal à :

$$T = -\frac{P\alpha^2}{l^3}(3l - 2\alpha).$$

Lorsque la charge parcourt la poutre, la ligne représentative des efforts tranchants se compose de deux courbes, l'une A_1B pour les efforts tranchants positifs, et l'autre AB_1 pour les efforts négatifs (*fig.* 171).

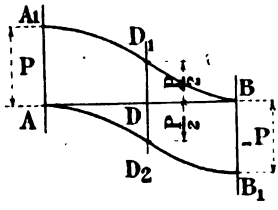


Fig. 171.

Sur les appuis, les deux efforts ont même valeur absolue :

$$AA_1 = BB_1 = P;$$

au milieu de la poutre, les deux efforts tranchants ont encore même valeur absolue :

$$DD_1 = DD_2 = \frac{P}{2}.$$

Les deux courbes donnent les mêmes valeurs absolues pour des distances égales comptées pour la courbe A_1B à partir de l'appui A, et pour la courbe AB_1, à partir de l'appui B.

La figure 172 donne les deux courbes types calculées par huit divisions égales de la portée l.

Pour une poutre quelconque, il suffira donc, pour tracer

Digitized by Google

ces courbes, d'effectuer le calcul de ces ordonnées en remplaçant P par sa valeur.

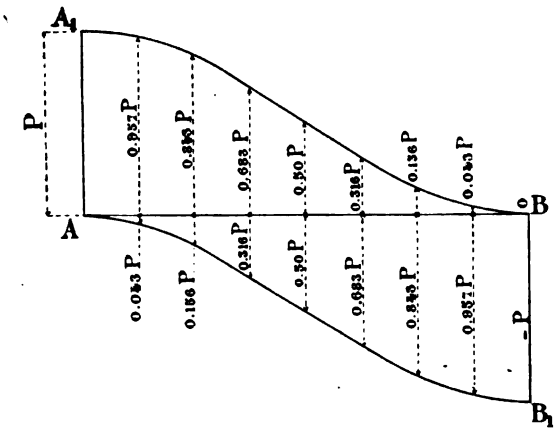


Fig. 172.

Au moyen de ces deux courbes, on peut donc déterminer, pour une position quelconque de la charge, les efforts tranchants maxima positifs et négatifs, et les réactions sur appuis.

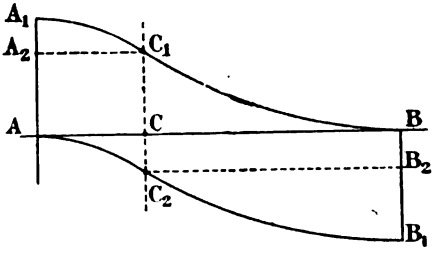


Fig. 173.

Ainsi, lorsque la charge est au point C par exemple (*fig.* 173), on déduit de cette figure que :

1° CC_1 est l'effort tranchant maximum positif dans la sec-

Digitized by Google

tion C ; que cet effort tranchant est constant jusqu'à l'appui A et que $AA_2 = CC_1$ est la réaction de gauche ;

2° CC_2 serait l'effort tranchant maximum négatif, et $BB_2 = CC_2$, la réaction de gauche, mais affectée du signe contraire à celui de l'effort tranchant ;

3° La ligne représentative des efforts tranchants pour la position C de la charge serait $A_2C_1CC_2B_2$.

Il est entendu que ces ordonnées devront être multipliées par le coefficient correspondant à l'échelle des efforts adoptée dans le tracé des courbes.

Le tracé de toutes ces courbes n'offre aucune difficulté, et elles trouveront leur application dans les cas suivants.

153. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges mobiles, mais liées invariablement entre elles. — Le procédé analytique pour déterminer les efforts tranchants et les moments fléchissants maxima est très laborieux.

La méthode développée ci-après permet de résoudre le problème d'une manière assez simple.

Soient deux forces P_1 et P_2 inégales, à une distance fixe a l'une de l'autre et se mouvant sur la poutre de portée l (*fig.* 174).

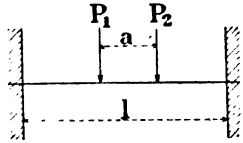


Fig. 174.

1° *Moments fléchissants sur appui.* — On déterminera le moment fléchissant maximum sur les appuis, au moyen des courbes types du n° 152-A, mais pour *une charge unique égale à l'unité* (soit 1 tonne, soit 10 tonnes). Ces courbes prennent alors le nom de *lignes d'influence des moments fléchissants sur appui.*

Ces lignes étant tracées (*fig.* 175), soit à déterminer le moment fléchissant maximum sur l'appui de gauche.

On commencera par placer les deux charges, en conservant leur écartement a, de manière que les verticales des charges paraissent donner au juger les plus grandes ordonnées sur la courbe de gauche, en trait plein, qui est la ligne d'influence des moments fléchissants de l'appui de gauche.

Pour cette position des charges, le moment fléchissant

Digitized by Google

sur l'appui de gauche sera, si l'unité de charge choisie est de 1 tonne :

$$M_{g1} = M_1M_1' \times P_1 + N_1N_1' \times P_2.$$

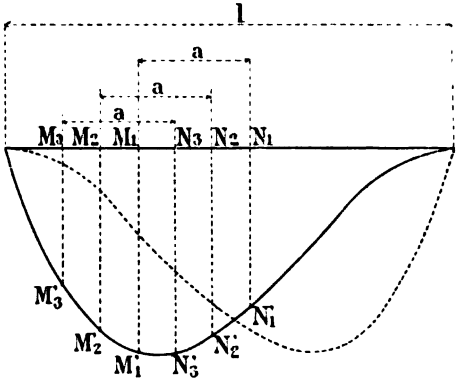


Fig. 175.

Il est bien entendu que M_g ainsi obtenu aura sa valeur exacte en tenant compte de l'échelle adoptée pour ces moments.

Ainsi, si la courbe était tracée à l'échelle de 1 centimètre pour 10 tonnes-mètres, si $P_1 = 5$ tonnes et $P_2 = 7$ tonnes,

$$M_1M_1' = 5 \text{ centimètres} \qquad \text{et} \qquad N_1N_1' = 4 \text{ centimètres}$$

Le moment fléchissant M_g aurait pour valeur exacte :

$$M_{g1} = (5^{cm} \times 5^{T} + 4^{cm} \times 7^{T})\, 10^{Tm} = 530 \text{ tonnes-mètres.}$$

On essaiera ensuite une deuxième position des charges, assez voisine de la première position, mais en avant.

On déterminera à nouveau, comme précédemment, le moment fléchissant sur appui :

$$M_{g2} = M_2M_2' \times P_1 + N_2N_2' \times P_2.$$

Digitized by Google

Deux cas se présentent alors, suivant que M_{g2} est plus grand ou plus petit que M_{g1}.

Premier cas. — Si M_{g2} est $> M_{g1}$, il faudra prendre une troisième position encore en avant de la deuxième et déterminer M_{g3}. Si $M_{g3} > M_{g2}$, on continuera à prendre des positions en avant jusqu'à ce que la dernière valeur trouvée soit plus petite que la précédente.

Soit $M_{g4} < M_{g3}$, alors on peut dire que le moment fléchissant maximum sur l'appui de gauche se produit entre les positions qui donnent M_{g4} et M_{g2}, et, si les différentes positions choisies sont à peu de distance les unes des autres, M_{g3} sera le maximum cherché.

Deuxième cas : $M_{g2} < M_{g1}$. — Il faudra prendre de nouvelles positions des charges, mais en arrière de la première, et, comme les valeurs de M vont en augmentant, on poussera la recherche jusqu'à ce que l'on trouve une de ces valeurs plus petite que la précédente. Dans ce cas, cette valeur précédente sera le maximum cherché.

Pour l'appui de droite, on procéderait de la même manière que pour l'appui de gauche.

Moment fléchissant maximum positif. — La recherche de ce moment maximum positif est un peu plus laborieuse que celle du moment sur appui. On se sert de trois courbes, savoir :

1° Les deux lignes d'influence des moments sur appui qui sont déjà tracées ;

2° La courbe des moments fléchissants maxima positifs définie n° 152-B. Cette courbe devra être tracée pour la même charge unique de 1 tonne ou 10 tonnes, adoptée pour les lignes d'influence des moments sur appui, et à la même échelle.

On supposera que l'unité choisie est de 1 tonne et que l'échelle des moments est de 1 centimètre par 10 tonnes-mètres.

On disposera les épures comme dans la figure 176, et on choisira un certain nombre de sections de la poutre qui seront à essayer.

Par exemple, le milieu de la poutre C et deux sections E et D, situées à gauche et à droite de C et à une distance égale à

Digitized by Google

celle qui sépare les deux charges, enfin des sections intermédiaires F et G.

Première position : Section C. — On placera P_1 en C, et P_2 se trouvera en D.

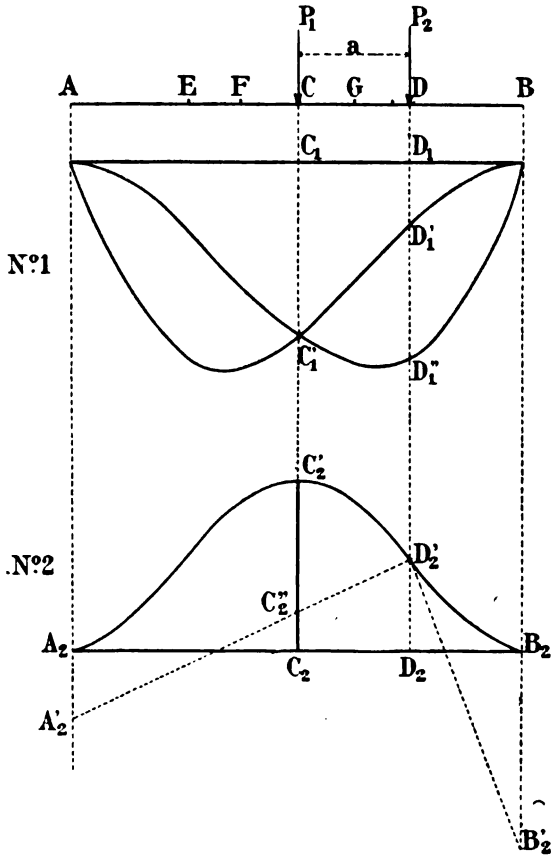


Fig. 176.

L'épure n° 2 donne immédiatement, pour la section C, le moment fléchissant maximum positif dû à la charge P_1

Digitized by Google

(évaluée en tonnes) :

$$M_{P_1} = C_2C_2'^{cm} \times P_1 \times 10 \text{ tonnes-mètres.}$$

Quant au moment positif déterminé par la charge P_2 dans la section C, il faudra, pour le déterminer, porter sur les verticales des appuis, dans l'épure n° 2, les ordonnées représentant les moments fléchissants sur appuis obtenus dans l'épure n° 1, mais pour la charge P_2 seulement.

Toutefois une seule de ces ordonnées est nécessaire, savoir : celle relative à l'appui de gauche, lorsque la charge est à droite de la section considérée, et réciproquement.

Dans le cas présent, on portera $A_2A_2' = D_1D_1'$ et on joindra A_2' à D_2'. — La droite $A_2'D_2'$ rencontre la verticale de la section considérée en C_2''. On aurait alors comme valeur du moment fléchissant déterminé en C par la charge P_2 :

$$M_{P_2} = C_2C_2''^{cm} \times P_2 \times 10 \text{ tonnes-mètres.}$$

C_2C_2'' se trouve au-dessus de A_2B_2, le moment est positif; si cette ordonnée était au-dessous, le moment serait négatif.

Le moment fléchissant total déterminé dans la section C pour la première position des charges sera donc de :

$$M = M_{P_1} \pm M_{P_2} = C_2'C_2^{cm} \times P_1 \times 10^{Tm} \pm C_2C_2''^{cm} \times P_2 \times 10^{Tm}$$

ou encore :

$$M = (C_2C_2'^{cm} \times P_1 \pm C_2C_2''^{cm} \times P_2)\ 10^{Tm}.$$

Deuxième position : Section C. — On placera P_2 en C et alors P_1 se trouvera en E.

On rechercherait les moments fléchissants en C, comme il a été fait ci-dessus.

De ces deux positions des charges pour une même section, on choisira la plus grande, que l'on notera à part.

On procédera ensuite en opérant de la même manière à l'examen d'une autre section E ou D, et finalement F et G.

La valeur la plus grande trouvée dans ces différentes sections sera le maximum cherché.

Digitized by Google

Ce procédé n'est évidemment qu'approximatif, mais on peut augmenter encore l'approximation en choisissant d'autres sections intermédiaires, et le choix de ces sections sera guidé par les valeurs obtenues précédemment.

Les ordonnées de l'épure n° 1, portées dans l'épure n° 2, serviront dans la plupart des cas pour plusieurs sections, si la division a été faite comme ci-dessus.

En outre, il suffira de placer dans une section quelconque la plus lourde des deux charges pour avoir le moment fléchissant maximum positif dans cette section.

Efforts tranchants et réactions des appuis. — Pour les déterminer, on tracera les courbes définies (n° 152-C), mais pour une charge unique de 1 tonne (*fig.* 177).

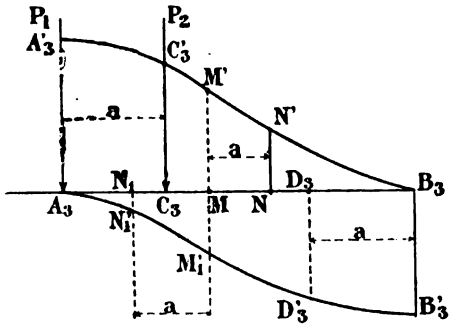


Fig. 177.

Réaction maxima. — Pour celle de l'appui de gauche, on placera la charge P_1 sur l'appui A_3 et P_2 à la distance a de cet appui.

Si l'échelle des forces est de 1 centimètre pour 2 tonnes, par exemple, la réaction maxima sur l'appui de gauche aura pour valeur :

$$R_g = (A_3A'^{cm}_3 \times P_1 + C_3C'^{cm}_3 \times P_2)\,2 \text{ tonnes.}$$

Pour l'appui de droite, on placerait P_2 en B_3 et P_1 à la distance a de cet appui.

Digitized by Google

La réaction maxima sur cet appui, quoique relevée par des ordonnées négatives, serait positive et égale à :

$$R_d = (B_3B_3'^{cm} \times P_2 + D_3D_3'^{cm} \times P_1)\ 2 \text{ tonnes.}$$

Efforts tranchants. — L'effort tranchant maximum *positif* dans une section quelconque M s'obtiendra en plaçant la première charge P_1 en ce point, la seconde se trouvant alors en N, et la valeur de cet effort maximum positif sera :

$$T_M = (MM'^{cm} \times P_1 + NN'^{cm} \times P_2)\ 2 \text{ tonnes.}$$

L'effort tranchant maximum négatif dans la même section M s'obtiendra en plaçant la deuxième charge P_2 en ce point, la première P_1 étant en N_1, et la valeur de cet effort négatif sera :

$$T_M = -\ (MM_1'^{cm} \times P_2 + N_1N_1'^{cm} \times P_1)\ 2 \text{ tonnes.}$$

Les efforts tranchants maxima sur les appuis auront même valeur absolue que les réactions, soit :

$$T_g = +\ R_g, \qquad T_d = -\ R_d.$$

Remarque. — Si le nombre de charges mobiles était de trois et plus, la recherche des moments et efforts se ferait d'une façon analogue et, dans le cas particulier de trois charges variant peu d'intensité, le moment fléchissant maximum positif dans une section quelconque se produira souvent lorsque la charge du milieu se trouvera dans la section même.

154. Application à une poutre de 24 mètres de portée soumise à l'action de trois charges roulantes de 5, 8 et 4 tonnes, espacées de 2 et 3 mètres (*fig.* 178).

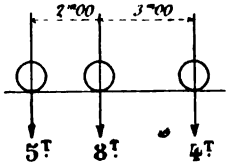


Fig. 178.

Moments fléchissants maxima sur appuis. — Les lignes d'influence des moments sur appui seront tracées pour une charge unique de 10 tonnes. L'échelle des longueurs sera 1 centimètre pour 3 mètres, et celle des moments, 1 centimètre pour 10 tonnes-mètres.

Digitized by Google

Les ordonnées de ces lignes seront obtenues en remplaçant P par 10 tonnes et l par 24 mètres dans les courbes (n° 152-A).

Ainsi l'ordonnée maxima située au $\frac{1}{3}$ et aux $\frac{2}{3}$ de la portée dont la valeur est $0,148Pl$ donnera un moment de :

$$0,148 \times 10^{T} \times 24^{m} = 35^{Tm},52,$$

lequel, porté à l'échelle de 1 centimètre pour 10 tonnes-mètres, devra être représenté par une ordonnée égale à $\frac{35^{Tm},52}{10} = 3^{cm},55$, ce qui revient à dire que, pour cette échelle des moments, il suffira, pour avoir les ordonnées réelles au centimètre, de multiplier les coefficients numériques des courbes types par 24.

Ainsi, pour le milieu de la portée, l'ordonnée deviendrait

$$0,125 \times 24 = 3 \text{ centimètres.}$$

On calculera donc ces ordonnées pour les huit divisions de la poutre.

Recherche du moment fléchissant maximum sur l'appui de gauche (fig. 179). — Première position. — On placera la charge 2 (8 tonnes) au droit de l'ordonnée maxima, c'est-à-dire au 1/3 de la portée ; la position des deux autres charges sera définie par les distances à la charge 2.

Les ordonnées de la courbe de gauche correspondantes à ces charges sont :

$$M_1M'_1 = 3^{cm},31, \quad N_1N'_1 = 3^{cm},55 \quad \text{et} \quad O_1O'_1 = 3^{cm},25.$$

Le moment sur appui, relatif à cette position, sera donc, en tenant compte que la ligne d'influence a été tracée pour une charge de 10 tonnes :

$$\mu_{g1} = \left(3,31 \times \frac{5^{T}}{10^{T}} + 3,55 \times \frac{8^{T}}{10^{T}} + 3,25 \times \frac{4^{T}}{10^{T}}\right) 10^{Tm} = 57^{Tm},95,$$

Digitized by Google

Deuxième position. — A 1 mètre à gauche de la première. Ordonnées :

$$M_2M_2' = 3^{cm},05$$
$$N_2N_2' = 3^{cm},50$$
$$O_2O_2' = 3^{cm},45$$

$$\mu_{g2} = \left(3,05 \times \frac{5}{10} + 3,50 \times \frac{8}{10} + 3,45 \times \frac{4}{10}\right) 10^{Tm} = 57^{Tm},05.$$

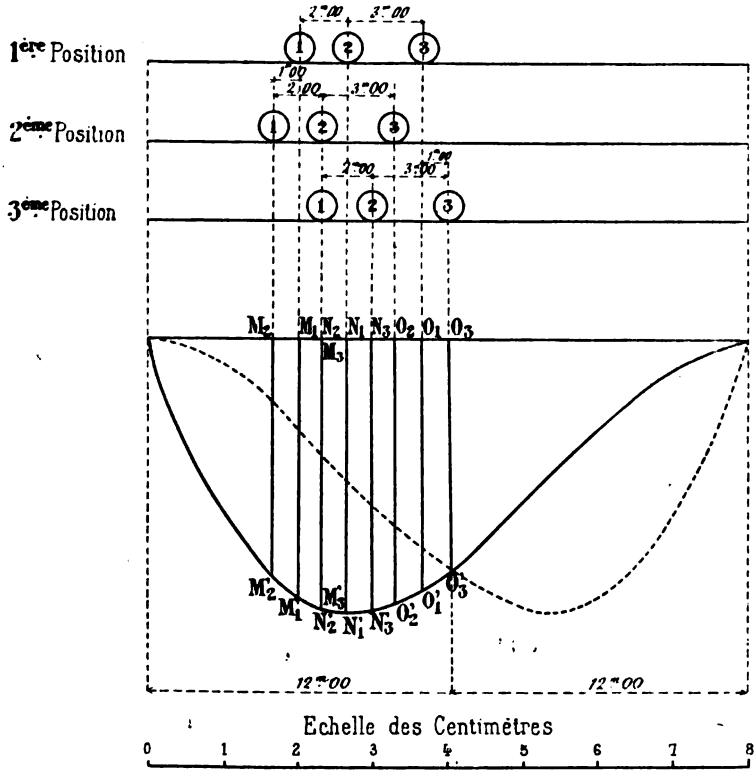


FIG. 179.

Troisième position. — μ_{g2} étant plus petit que μ_{g1}, la troisième position devra être prise en arrière de la première position, soit à 1 mètre.

Digitized by Google

Pour cette position, les ordonnées sont :

$$M_3M_3' = 3^{cm},50$$
$$N_3N_3' = 3^{cm},50$$
$$O_3O_3' = 3^{cm},00$$

$$\mu_{g3} = \left(3,50 \times \frac{5}{10} + 3,50 \times \frac{8}{10} + 3,00 \times \frac{4}{10}\right) 10^{Tm} = 57^{Tm},5.$$

μ_{g3} étant plus petit que μ_{g1} et plus grand que μ_{g2}, le moment fléchissant maximum se produira entre la deuxième et la troisième position, et probablement très près de l'ordonnée maxima. On choisira donc le résultat donné par la première position :

$$\mu_{g\,max} = 57^{Tm},95.$$

On pourrait pousser plus loin l'approximation en choisissant deux autres positions intermédiaires entre les trois positions déjà vérifiées, soit à $0^m,50$ à gauche et à droite de l'ordonnée maxima.

Dans la pratique, le résultat obtenu ci-dessus est suffisant.

Moment fléchissant maximum sur l'appui de droite. — On opérerait avec la courbe de droite de la même manière que ci-dessus.

Moment fléchissant maximum positif. — On tracera à la même échelle que celle de la ligne d'influence des moments sur appui la ligne représentative des moments fléchissants maxima positifs (n° 152-B).

L'ordonnée maxima qui a pour valeur $0,125Pl$ devra être représentée par :

$$0,125 \times 24 = 3 \text{ centimètres.}$$

Première section à considérer (fig. 180). — On prendra le milieu de la poutre a, et on placera dans cette section la charge 2.

Le moment fléchissant positif dû à la charge 2 est donné immédiatement par l'ordonnée maxima aa_2, qui mesure 3 centimètres :

$$M_2^a = 3^{cm} \times \frac{8^T}{10} \times 10^{Tm} = 24 \text{ tonnes-mètres.}$$

Digitized by Google

Le moment fléchissant dans la section a dû à la charge 1

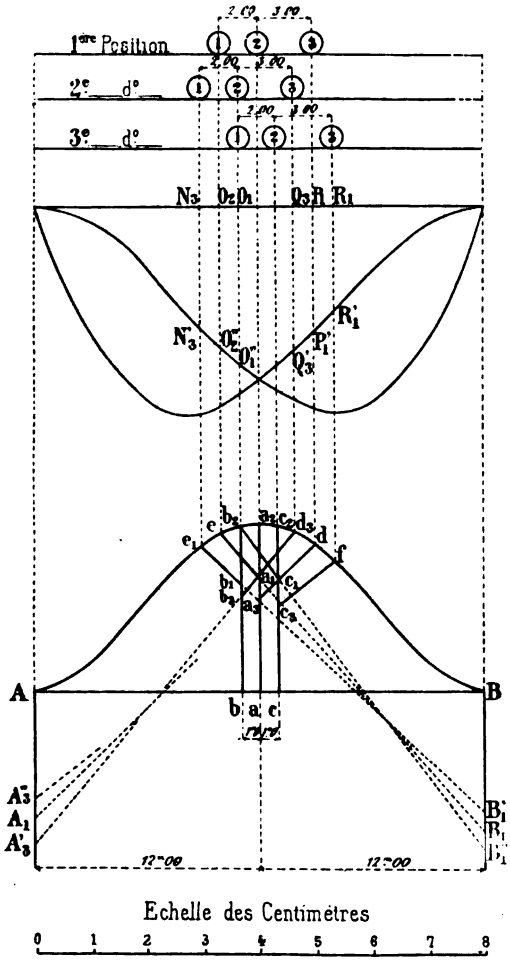


Fig. 180.

s'obtiendra en portant l'ordonnée $O_2O''_2$, déterminée sur la

Digitized by Google

verticale de cette charge par la ligne d'influence de droite, sur l'appui de droite de B en B_1.

On joindra le point B_1 au point de rencontre c de la verticale de la charge 1 avec la ligne des moments positifs.

L'ordonnée aa_1, qui mesure $2^{cm},15$, représentera le moment fléchissant (dans ce cas positif) déterminé par la charge 1 dans la section a.

Ce moment est égal à :

$$M_1^a = 2^m,15 \times \frac{5^T}{10} \times 10^{Tm} = 10^{Tm},75.$$

Pour la charge 3, on portera sur l'appui de gauche, de A en A_1, l'ordonnée $P_1P'_1$ découpée sur la ligne d'influence de gauche par la verticale de la charge. On joindra A_1d qui découpe sur la verticale de la section a l'ordonnée $aa_3 = 1^{cm},65$, qui représentera le moment fléchissant (également positif) dû à la charge 3.

Sa valeur est :

$$M_3^a = 1^m,65 \times \frac{4}{10} \times 10^{Tm} = 6^{Tm},60.$$

Le moment fléchissant positif dans la section a pour la première position est donc finalement :

$$M_a = 24^{Tm},00 + 10^{Tm},75 + 6^{Tm},60 = 41^{Tm},35.$$

Deuxième section b située à 1 mètre en avant de la première. — On placera la charge 2 au droit de cette section.

Moment fléchissant positif pour cette charge 2. — Ordonnée, bb_2 qui mesure $2^{cm},95$:

$$M_2^b = 2^m,95 \times \frac{8^T}{10^T} \times 10^{Tm} = 23^{Tm},60.$$

Moment fléchissant dû à la charge 1. — On portera $BB'_1 = N_3N''_3$ et on joindra B'_1 à c_1; l'ordonnée bb_1, qui mesure 2 centimètres, représentera le moment cherché (positif) :

$$M_1^b = 2^m,00 \times \frac{5}{10} \times 10^{Tm} = 10 \text{ tonnes-mètres.}$$

Digitized by Google

Moment fléchissant dû à la charge 3. — On portera $AA'_3 = Q_3Q'_3$, et on joindra A'_3 à d_3 ; l'ordonnée bb_3, qui mesure $1^{cm},7$, représentera le moment cherché (positif) :

$$M''_3 = 1^m,70 \times \frac{4^T}{10^T} \times 10^{Tm} = 6^{Tm},80.$$

Le moment total dans la section b est donc :

$$M_b = 23^{Tm},60 + 10^{Tm},00 + 6^{Tm},80 = 40^{Tm},40.$$

Troisième section. — Le moment fléchissant dans la section b étant plus petit que celui de la section a, on choisira une troisième section c, située à 1 mètre en arrière de la section a, et on placera la charge 2 au droit de cette section.

Moment fléchissant positif pour la charge 2.

Ordonnée : $cc_2 = 2^{cm},9$ $\quad M^c_2 = 2^m,9 \times \frac{8}{10} \times 10^{Tm} = 23^{Tm},20.$

Moment fléchissant dû à la charge 1. — On portera :

$$BB''_1 = O_1O''_1$$

et on joindra B''_1b_2.

Moment fléchissant : ordonnée $cc_1 = 2^{cm},08$.

$$M^c_1 = 2^m,08 \times \frac{5}{10} \times 10^T = 10^{Tm},40 \text{(positif)}.$$

Moment fléchissant pour la charge 3. — On portera $AA''_3 = R_1R'_1$, et on joindra A''_3f.

Moment fléchissant : ordonnée $cc_3 = 1^{cm},5$.

$$M^c_3 = 1^m,5 \times \frac{4}{10} \times 10^{Tm} = 6^{Tm},00 \text{ (positif)}.$$

Le moment fléchissant total dans la section c est :

$$M_c = 23^{Tm},20 + 10^{Tm},40 + 6^{Tm},00 = 39^{Tm},60.$$

Digitized by Google

Des trois sections vérifiées, c'est dans la première, *a*, que se produit le moment fléchissant maximum; on pourra donc dire que le moment fléchissant maximum positif est situé entre les deux sections *b* et *c* et probablement très près de *a*.

Dans la pratique, on prendra comme moment fléchissant maximum positif celui produit dans cette dernière section, soit :

$$M_m = 41^{Tm},35.$$

On pourrait pousser l'approximation plus loin en vérifiant des sections intermédiaires.

Réactions et efforts tranchants. — On tracera les courbes relatives aux efforts tranchants d'après les courbes types (nos 151-C), en prenant comme charge unique 10 tonnes et comme échelle des efforts : 1 centimètre pour 5 tonnes.

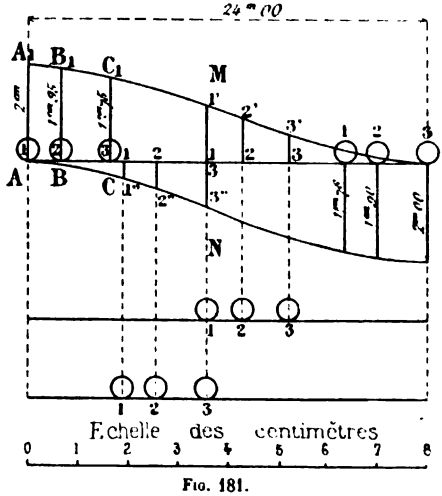


Fig. 181.

Les coefficients numériques des courbes types seront à multiplier par 2 pour les obtenir en centimètres.

On aura donc, sur les appuis, 2 centimètres, et, au milieu de la portée : $0,5 \times 2 = 1$ centimètre.

Digitized by Google

Réaction sur l'appui de gauche. — On placera la charge 1 sur cet appui, et les autres à la suite (*fig.* 181).

Les ordonnées découpées par les verticales des charges sont :

$$AA_1 = 2^{cm}, \qquad BB_1 = 1^{cm},95 \qquad \text{et} \qquad CC_1 = 1^{cm},75.$$

La réaction maxima sur l'appui de gauche sera alors :

$$R_g = \left(2^{cm} \times \frac{5^T}{10^T} + 1^{cm},95 \times \frac{8^T}{10^T} + 1^{cm},75 \times \frac{4^T}{10^T}\right) 5^T = 16^T,3.$$

Réaction sur l'appui de droite. — On placera la charge 3 sur cet appui, et les autres à leur position respective.

Les trois ordonnées découpées par les verticales des charges sont : 2 centimètres, $1^{cm},90$ et $1^{cm},78$.

La réaction maxima sur l'appui de droite sera alors :

$$R_d = \left(1^{cm},78 \times \frac{5^T}{10^T} + 1^{cm},90 \times \frac{8^T}{10^T} + 2^{cm} \times \frac{4^T}{10^T}\right) 5^T = 16^T,05.$$

Efforts tranchants. — A. *Sur les appuis.* — A l'appui de gauche, positif et égal à :

$$R_g = + 16^T,3;$$

à l'appui de droite, négatif et égal à :

$$- R_d = - 16^T,05.$$

B. *Dans une section* MN. — *L'effort tranchant maximum positif* s'obtiendra en plaçant la première charge sur la section.

Ordonnées correspondantes aux charges :

$$1.1' = 1^{cm},2; \qquad 2.2' = 0^{cm},9; \qquad 3.3' = 0^{cm},55;$$

$$T_M = + \left(1^{cm},2 \times \frac{5^T}{10^T} + 0^{cm},9 \times \frac{8^T}{10^T} + 0^{cm},55 \times \frac{4^T}{10^T}\right) 5^T = + 7^T,70.$$

L'effort tranchant maximum négatif dans cette section s'obtiendra en plaçant la troisième charge sur la section.

Digitized by Google

Ordonnées correspondantes :

$$1.1^{\text{m}} = 0^{\text{cm}},35\,; \qquad 2.2^{\text{m}} = 0^{\text{cm}},55\,; \qquad 3.3^{\text{m}} = 0^{\text{cm}},85\,;$$

$$T_M = -\left(0^{\text{cm}},35 \times \frac{5^T}{10^T} + 0^{\text{cm}},55 \times \frac{8^T}{10^T} + 0^{\text{cm}},85 \times \frac{4^T}{10^T}\right) 5^T = -4^T,775.$$

Lignes représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants. — Pour tracer ces lignes, on rechercherait pour différentes sections de la poutre les moments fléchissants et les efforts tranchants, que l'on porterait en ordonnées à une échelle convenue, et on relierait, pour chaque catégorie d'efforts, les points obtenus par une courbe continue.

Si, en plus des charges mobiles, la poutre était soumise à l'action de charges fixes, on chercherait les moments et efforts tranchants pour ces charges et on combinerait les résultats trouvés avec ceux des charges mobiles pour en déduire les moments et efforts maxima maximora.

Digitized by Google

CHAPITRE X

POUTRES ENCASTRÉES SUR UN APPUI ET LIBRES SUR L'AUTRE

§ 1. — CHARGES FIXES

A. — Charges uniformes

155. Soit une poutre AB de portée l, encastrée sur l'appui de gauche A, libre sur l'appui de droite B et soumise à l'action d'une charge uniforme p par mètre (*fig.* 182).

Réaction des appuis. — Les réactions des appuis sont :

$$R_g = \frac{5}{8} pl;$$

$$R_d = \frac{3}{8} pl.$$

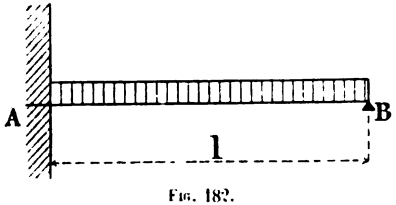


Fig. 182.

Moments fléchissants sur les appuis. — Il n'existe qu'un moment fléchissant; il se produit sur l'appui A qui forme l'encastrement; sur l'appui B, le moment fléchissant est nul.

Le moment fléchissant à l'encastrement est toujours négatif; il a pour valeur :

$$\mu_A = -\frac{pl^2}{8}.$$

Digitized by Google

Moments fléchissants dans la travée. — La formule qui donne le moment fléchissant en un point quelconque de la travée d'abscisse x est :

$$M_x = R_g x + \mu_A - \frac{px^2}{2},$$

soit, en remplaçant R_g et μ_A par leurs valeurs :

$$M_x = \frac{p}{8}(5lx - l^2 - 4x^2).$$

Ce moment est maximum pour $x = \frac{R_g}{p} = \frac{5}{8}l = 0{,}625l$, et sa valeur est :

$$M_m = \frac{R_g^2}{2p} + \mu_A = \frac{9pl^2}{128} = 0{,}07pl^2.$$

Il est toujours positif.

Ligne représentative des moments fléchissants (*fig.* 183). — La ligne représentative des moments fléchissants est une parabole A_1C_1B, qui découpe sur la verticale de l'appui encastré un segment égal à $-\frac{pl^2}{8}$, qui a son sommet sur la verticale située à $\frac{5}{8}l$ de l'appui encastré, la hauteur de ce sommet étant de $0{,}07pl^2$, enfin qui passe par l'appui libre B.

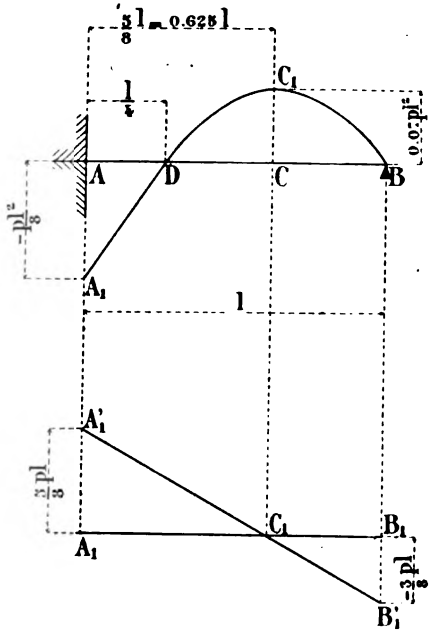


Fig. 183.

Digitized by Google

Les moments fléchissants sont à prendre entre la ligne représentative et la droite AB.

Ils sont négatifs de A en D; au point D situé à une distance $\frac{l}{4}$ de l'appui encastré, le moment est nul ; enfin, de D en B, les moments fléchissants sont positifs.

Efforts tranchants. — La formule qui donne l'effort tranchant en un point quelconque d'abscisse x est :

$$T_x = R_g - px = \frac{p}{8}(5l - 8x).$$

Il est positif sur l'appui encastré, et sa valeur est :

$$T_A = \frac{5}{8}pl.$$

Il est nul pour le point C où se produit le moment fléchissant maximum positif.

Enfin, il est négatif sur l'appui libre, et sa valeur est :

$$T_B = -R_d = -\frac{3}{8}pl.$$

La ligne représentative des efforts tranchants est la droite $A'_1B'_1$.

Les efforts tranchants sont positifs de A en C, et ils sont négatifs de C en B.

Les ordonnées sont à prendre entre cette ligne et la droite A_1B_1.

L'application de ces formules n'offre rien de particulier.

B. — Charges concentrées

156. Charge unique. — Soit la poutre de portée l encastrée en A, libre en B, soumise à l'action d'une charge concentrée P située à la distance a de l'appui encastré et b de l'autre appui (*fig.* 184).

Digitized by Google

Réactions des appuis. — Sur l'appui de gauche :

$$R_g = \frac{P(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3} = \frac{P(l-a)}{2l^3}(2l^2 + 2al - a^2);$$

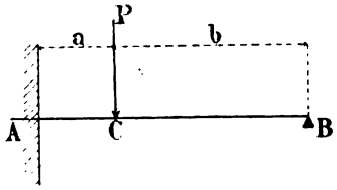


Fig. 184.

sur l'appui de droite :

$$R_d = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3} = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a).$$

Moment d'encastrement sur l'appui de gauche A. — Sa valeur est :

$$\mu_A = -\frac{Pa}{2l^2}(2l^2 - 3ab - 2a^2);$$

$$= -\frac{Pa}{2l^2}(2l^2 - 3al + a^2).$$

Ce moment est toujours négatif.

Sur l'appui libre, le moment est nul.

Moments fléchissants dans la travée. — Les formules qui donnent l'expression de ces moments sont :

De l'appui encastré au point d'application C de la charge :

$$M_{A-C} = R_g x + \mu_A,$$

et du point d'application de la charge à l'appui libre :

$$M_{C-B} = R_g x + \mu_A - P(x - a).$$

Le moment fléchissant maximum positif se produit au point d'application de la charge, et il a pour valeur :

$$M_m = R_g a + \mu_A$$

$$= \frac{Pa^2}{2l^3}(3l^2 - 4al + a^2).$$

Digitized by Google

Ligne représentative des moments fléchissants (*fig.* 185). — La ligne représentative des moments fléchissants se compose de deux droites A_1C_1 et C_1B, pour lesquelles :

$$AA_1 = \mu_A,$$
$$CC_1 = M_m.$$

Les ordonnées sont à prendre à partir de la droite AB.

Les moments fléchissants sont négatifs de A en D et positifs de D en B ; en D le moment est nul.

Efforts tranchants. — L'effort tranchant est positif et constant de A en C ; il a pour valeur $T_{A-C} = R_g$; de C en B, il est négatif et constant ; sa valeur est :

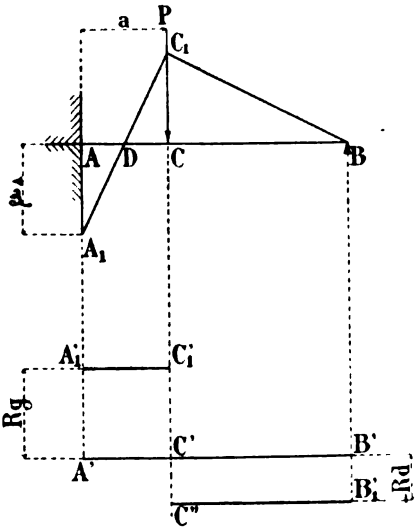


Fig. 185.

$$T_{C-B} = -R_d.$$

La ligne représentative des efforts tranchants se compose de deux droites parallèles à AB : $A'_1C'_1$ et $C'B'_1$, qui découpent sur les verticales des appuis des segments égaux à R_g et $-R_d$.

157. Charge médiane. — Si la charge unique se trouve au *milieu* de la portée, on a, en faisant dans les formules ci-dessus :

$$a = b = \frac{l}{2},$$

$$R_g = \frac{11}{16}P, \qquad R_d = \frac{5}{16}P.$$

Digitized by Google

Moment d'encastrement :

$$\mu = -\frac{3}{16} Pl.$$

Moment maximum positif au milieu de la travée :

$$M = \frac{5}{32} Pl.$$

La flèche maxima de la poutre est donnée par la formule :

$$f = 0{,}00932 \frac{Pl^3}{EI}.$$

158. Cas de plusieurs charges concentrées (*fig.* 186). — *Réactions et moment fléchissant sur l'appui encastré.* — On cherchera pour chacune des charges les réactions et moments fléchissants sur l'appui encastré et on additionnera les résultats obtenus.

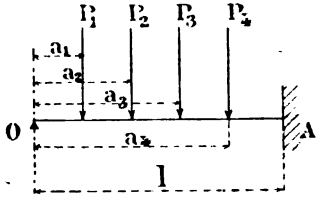


Fig. 186.

Le moment fléchissant positif maximum dans la travée se produira toujours sous l'une des charges.

Après avoir déterminé les réactions, il suffira d'appliquer les formules ci-après pour rechercher sous quelle charge se produit le moment fléchissant maximum positif.

Pour éviter l'emploi du moment d'encastrement, on prendra l'origine sur l'appui libre O et, si la réaction en cet appui est R_0, on aura :

Au droit de P_1 :

$$M_1 = R_0 a_1;$$

Au droit de P_2 :

$$M_2 = R_0 a_2 - P_1(a_2 - a_1);$$

Digitized by Google

Au droit de P_3 :

$$M_3 = R_0 a_3 - P_1(a_3 - a_1) - P_2(a_3 - a_2);$$

Au droit de P_4 :

$$M_4 = R_0 a_4 - P_1(a_4 - a_1) - P_2(a_4 - a_2) - P_3(a_4 - a_3).$$

De toutes ces valeurs on choisira la plus grande.

Ligne représentative des moments fléchissants (*fig.* 187). — Avec les valeurs déterminées ci-dessus, il sera facile de tracer la ligne représentative des moments fléchissants.

On portera de A en A_1 le moment d'encastrement total calculé, et, sur les verticales des charges, les moments fléchissants M_1, M_2, M_3 et M_4; soient 1, 2, 3, 4 et A_1 les points obtenus. Le moment fléchissant sur l'appui O étant nul, on joindra les points O, 1, 2, 3, 4 et A_1 par des lignes droites.

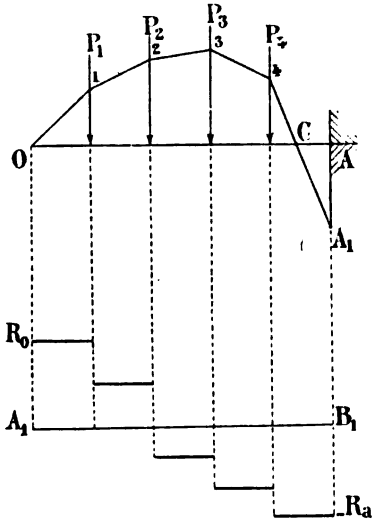


Fig. 187.

Les ordonnées seront à compter à partir de la ligne AO.

Pour l'exemple de la figure, les moments fléchissants seraient positifs de O en C et négatifs de C en A.

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont constants entre deux charges; leurs valeurs s'obtiendraient de la manière suivante, toujours en partant de l'appui libre :

De O à P_1 :

$$T = R_0;$$

Digitized by Google

De P_1 à P_2 :

$$T = R_0 - P_1;$$

De P_2 à P_3 :

$$T = R_0 - P_1 - P_2;$$

De P_3 à P_4 :

$$T = R_0 - P_1 - P_2 - P_3;$$

De P_4 à A :

$$T = R_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = - R_A.$$

La ligne représentative des efforts tranchants est une série de droites parallèles à A_1B_1 disposées en escalier, comme le montre la figure.

Il est bien entendu que, si l'on prenait comme origine l'appui A, le sens des efforts serait l'inverse.

159. Remarque. — Si la poutre en question recevait en même temps l'action d'une charge uniforme, il faudrait rechercher les réactions, moments fléchissants et efforts tranchants pour chaque catégorie de charges ; on tracerait les lignes représentatives correspondantes et on ferait leur somme. On obtiendrait ainsi les éléments nécessaires pour déterminer, à l'échelle convenue, le moment fléchissant maximum positif dans la travée, ainsi que la variation des efforts tranchants.

§ 2. — CHARGES VARIABLES

A. — Charges uniformes

160. Charge uniforme mobile. — La charge variable part de l'appui encastré A et s'avance vers l'appui libre B.

Digitized by Google

Soit α la longueur de cette charge pour une position quelconque C, et p son intensité par mètre courant (*fig.* 188).

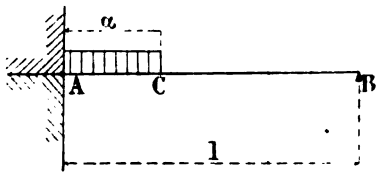


Fig. 188.

Réactions. — La réaction sur l'appui encastré est :

$$R_g = \frac{p\alpha}{8l^3}(8l^3 - 4l\alpha^2 + \alpha^3).$$

La réaction sur l'appui libre est :

$$R_d = \frac{p\alpha^2}{8l^3}(4l\alpha - \alpha^2).$$

Moment fléchissant sur appui. — Le moment est nul sur l'appui libre B ; en A, le moment d'encastrement a pour valeur :

$$\mu_A = -\frac{p\alpha^2}{8l^2}(4l^2 \quad 4l\alpha + \alpha^2).$$

Ce moment est toujours négatif.

Le maximum se produit lorsque la surcharge couvre toute la travée ; sa valeur est (n° 154) :

$$\mu_A = -\frac{pl^2}{8}.$$

Moments fléchissants dans la travée. — Pour une position quelconque, on a :

De A en C :

$$M = R_g x - \frac{px^2}{2} + \mu_A$$

Digitized by Google

et de C en B :

$$M = R_g x - p\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \mu_A.$$

Le moment fléchissant maximum dans la travée, pour une valeur déterminée de α, est toujours positif; il se produit à une distance de l'appui encastré égale à :

$$x = \frac{R_g}{p}$$

et sa valeur est :

$$M = \frac{\overline{R_g}^2}{2p} + \mu_A.$$

Le moment fléchissant maximum maximorum positif dans la travée se produit, lorsque toute la travée est chargée, à une distance $\frac{5}{8}\,l$ de l'appui encastré (n° 155), et sa valeur est :

$$M_m = \frac{9pl^2}{128} = 0{,}07pl^2.$$

Efforts tranchants. — Pour une charge qui se meut de A vers B, l'effort tranchant au point C est toujours maximum négatif; il est constant de C en B, et sa valeur est donnée par la formule :

$$T = R_g - p\alpha = -R_d.$$

Pour l'appui A :

$$\alpha = 0, \qquad T = 0;$$

Pour l'appui B :

$$\alpha = l, \qquad T = -\frac{3}{8}\,pl.$$

La ligne représentative des efforts tranchants maxima *négatifs* est une courbe du 4e degré, qui devra être tracée par points en donnant à α différentes valeurs.

Digitized by Google

La formule à employer est :

$$T = -\frac{p\alpha^2}{8l^3}(4l\alpha - \alpha^2).$$

Si la charge se meut de B vers A (*fig.* 189) et si β représente la distance de l'appui de gauche à l'extrémité C de la charge, la réaction à l'appui encastré est :

$$R_A = \frac{p}{8l^3}(5l^4 - 4l^3\beta - \beta^4).$$

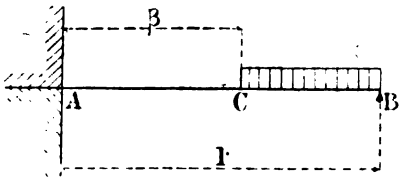


Fig. 189.

Le moment d'encastrement a pour valeur :

$$\mu_A = -\frac{p}{8l^2}(l^4 - 4l^2\beta^2 + 4l^3\beta - \beta^4).$$

L'effort tranchant en C est maximum positif, et sa valeur est toujours égale à R_A.

Pour l'appui A, lorsque la charge couvre toute la travée :

$$\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad T_A = \frac{5}{8}pl.$$

Pour l'appui B :

$$\beta = l, \qquad T_B = 0.$$

La ligne représentative des efforts tranchants maxima positifs est une courbe du 4e degré qui devra être tracée par points en donnant à β différentes valeurs.

La formule à employer est :

$$T = \frac{p}{8l^3}(5l^4 - 4l^3\beta - \beta^4).$$

Digitized by Google

Les deux courbes types pour les efforts tranchants positifs et négatifs ont été tracées (*fig.* 190) pour huit divisions de la poutre. Il suffira, pour une poutre quelconque, de remplacer p et l par leurs valeurs numériques.

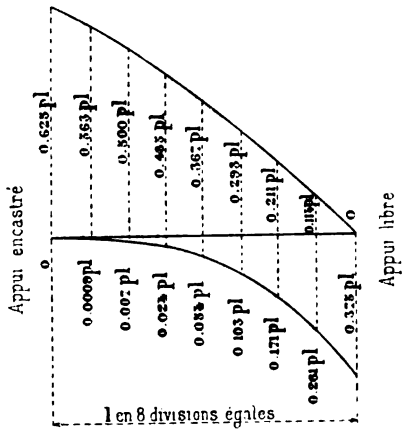


Fig. 190.

Les deux courbes obtenues ne sont pas symétriques.

Pour un point de la poutre, il faudra étendre la charge de l'appui de droite jusqu'à ce point pour avoir l'effort tranchant maximum positif, et de l'appui de gauche à ce même point pour obtenir l'effort maximum négatif.

B. — Charges concentrées

161. Charge unique mobile. — A. *Moment fléchissant sur l'appui encastré.* — C'est le cas du n° 156, lorsque a varie. Si l'on remplace dans les formules, données page 240, a par la variable α, le moment fléchissant sur l'appui encastré est obtenu par la formule :

$$\mu = -\frac{P\alpha}{2l^2}(2l^2 - 3l\alpha + \alpha^2).$$

Lorsque la charge parcourt la poutre, le moment fléchissant sur l'appui change de valeur et le maximum se produit lorsque $\alpha = l\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, c'est-à-dire quand la charge se trouve à la distance : $l\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0{,}423l$ de l'appui encastré.

Digitized by Google

Ce moment maximum a pour valeur :

$$\mu = 0{,}1925 Pl.$$

La ligne représentative des moments fléchissants sur l'appui encastré, lorsque la charge varie, est une courbe du troisième degré qui passe par les deux appuis et qui atteint son maximum à $0{,}423l$ à partir de l'appui encastré.

La courbe type de la figure 191, qui peut servir dans tous les cas, a été calculée pour 8 divisions égales de la poutre en fonction des données P et l.

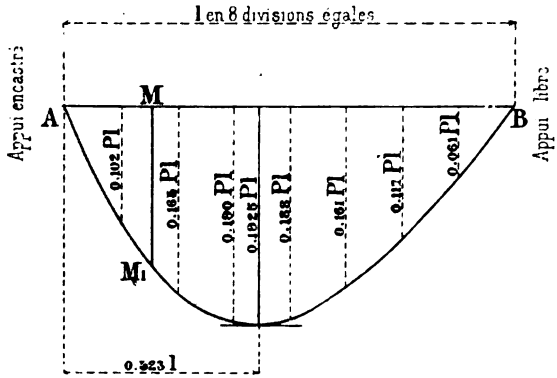


Fig. 191.

Ainsi, pour une position M de la charge, le moment fléchissant sur l'appui encastré sera donné par l'ordonnée MM_1, en tenant compte de l'échelle adoptée [Voir, à cet effet, les indications pour un cas analogue (152-A)].

B. *Moment fléchissant maximum positif dans la travée.* — Le moment fléchissant maximum positif se produit toujours au droit de la charge. Pour une position quelconque de cette charge, ce moment a pour valeur :

$$M_m = \frac{P\alpha}{2l^3}(3l^2\alpha - 4l\alpha^2 + \alpha^3).$$

Digitized by Google

Il est maximum maximorum pour :

$$\alpha = \frac{l}{2}(3 - \sqrt{3}) = 0{,}634l,$$

et sa valeur est :

$$M = 0{,}174Pl.$$

La ligne représentative du moment fléchissant maximum positif, lorsque la charge se déplace, est une courbe du 4e degré qui passe par les appuis.

La figure 192 donne la courbe type calculée pour 8 divisions de la poutre.

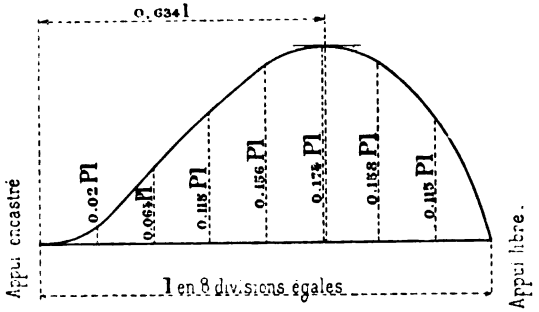


Fig. 192.

Le maximum se produit sensiblement à la 5e division.

Pour une poutre quelconque, P et l devront être remplacées par leurs valeurs numériques.

C. *Efforts tranchants.* — L'effort tranchant à gauche de la charge est positif, constant et égal à :

$$T_g = \frac{P(l - \alpha)}{2l^3}(2l^2 + 2l\alpha - \alpha^2).$$

L'effort tranchant à droite de la charge est négatif, constant et égal à :

$$T_d = -\frac{P\alpha^2}{2l^3}(3l - \alpha).$$

Digitized by Google

Lorsque la charge parcourt la poutre, la ligne représentative des efforts tranchants se compose de deux courbes (*fig.* 193), l'une A_1B pour les efforts positifs, et l'autre AB_1 pour les efforts négatifs.

Sur les appuis, les deux efforts ont même valeur absolue

$$AA_1 = BB_1 = P.$$

Au milieu de la portée, l'effort tranchant positif a pour valeur $T = \frac{9}{16} Pl$, et l'effort tranchant négatif : $T = -\frac{5}{16} Pl$.

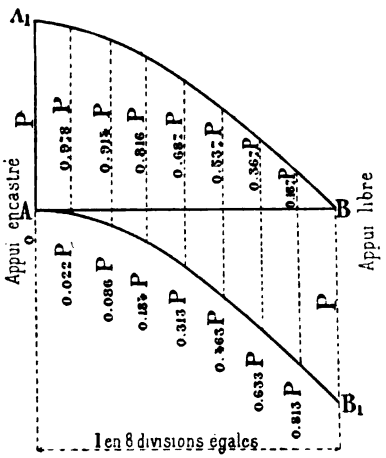


FIG. 193.

La figure donne les courbes types pour 8 divisions de la poutre.

(Voir, pour les indications, celles du cas analogue n° 152-C.)

162. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges mobiles, mais liées invariablement entre elles. — Pour déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants, on se servira des lignes d'influence, comme il a été procédé dans le n° 153 pour la poutre encastrée à ses deux appuis.

Les lignes d'influence sont tracées avec les courbes types en prenant une charge unique comme unité (1 tonne ou 10 tonnes).

Il est à remarquer qu'il n'y a qu'une ligne d'influence pour le moment d'encastrement, puisqu'un seul appui est encastré.

Lorsqu'on voudra rechercher les moments positifs dans

Digitized by Google

une section, il faudra tenir compte, pour mener les droites qui déterminent les ordonnées sur la verticale de la section, que, pour l'appui libre, ces droites doivent partir de cet appui même.

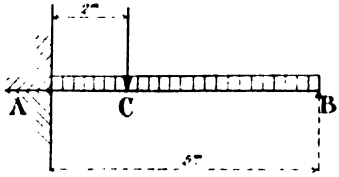


FIG. 194.

Tous les développements portés à l'article 153 s'appliquent au cas présent.

163. Application. — Une poutre de 5 mètres de portée, encastrée sur un appui et libre à l'autre, est soumise à l'action d'une charge uniforme fixe de 2 tonnes par mètre et d'une charge isolée fixe de 5 tonnes située à 2 mètres de l'appui encastré (*fig.* 194).

RÉACTION DES APPUIS

Appui de gauche encastré. — Charge uniforme (n° 155) :

$$R_g = \frac{5}{8}\,pl = \frac{5}{8}\,2^T \times 5^m = 6^T,25\,;$$

Charge concentrée unique (n° 156) :

$$R_g = \frac{P(l-a)}{2l^3}(2l^2+2al-a^2) = \frac{5^T(5-2)}{2\times\overline{5}^3}(2\times\overline{5}^2+2\times2\times5-\overline{2}^2) = 3^T,96.$$

$$R_g \text{ total} = 6^T,25 + 3^T,96 = 10^T,21.$$

Appui de droite libre

Charge uniforme :

$$R_d = \frac{3}{8}\,pl = \frac{3}{8} \times 2^T \times 5^m = 3^T,75\,;$$

Charge concentrée :

$$R_d = 5^T - 3,96 = 1^T,04.$$

$$R_d \text{ total} = 3,75 + 1,04 = 4^T,79.$$

Digitized by Google

Moment d'encastrement

Charge uniforme :

$$\mu = -\frac{pl^2}{8} = -\frac{2^{\mathrm{T}} \times \overline{5}^2}{8} = -6^{\mathrm{Tm}},25$$

Charge concentrée :

$$\mu = -\frac{Pa}{2l^2}(2l^2 - 3al + a^2) = -\frac{5^{\mathrm{T}} \times 2}{2 \times \overline{5}^2}(2 \times \overline{5}^2 - 3 \times 2 \times 5 + \overline{2}^2) = -4^{\mathrm{Tm}},80.$$

Moment d'encastrement total :

$$\mu = -6^{\mathrm{Tm}},25 - 4^{\mathrm{Tm}},80 = -11^{\mathrm{Tm}},05.$$

Moment fléchissant positif maximum dans la travée. — Pour le déterminer, on tracera les deux lignes représentatives des moments fléchissants.

Celle de la charge uniforme est une parabole dont le maximum se produit à $0,625l$ de l'appui encastré, soit :

$$0,625 \times 5^{\mathrm{m}} = 3^{\mathrm{m}},125,$$

et sa valeur est :

$$\mathrm{M} = 0,07pl^2 = 0,07 \times 2^{\mathrm{T}} \times \overline{5}^2 = 3^{\mathrm{Tm}},50.$$

Celle de la charge unique se compose de deux droites ; le maximum se produit au droit de la charge ; sa valeur est :

$$\mathrm{M} = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l^2 - 4al + a^2) = \frac{5^{\mathrm{T}} \times \overline{2}^2}{2 \times \overline{5}^3}(3 \times \overline{5}^2 - 4 \times 2 \times 5 + 2^2) = 3^{\mathrm{Tm}},12.$$

Avec tous ces éléments on tracera les deux lignes représentatives à l'échelle suivante :

1 centimètre par mètre pour les longueurs ;
1 centimètre pour 2 tonnes-mètres pour les moments ;
1 centimètre pour 2 tonnes pour les efforts.

Digitized by Google

A cet effet on portera (*fig.* 195) :

$$AA_1 = -\frac{6^{Tm},25}{2^{Tm}} = -3^{cm},125 \text{ (charge uniforme)};$$

$$AA_2 = -\frac{4^{Tm},8}{2^{Tm}} = -2^{cm},4 \text{ (charge concentrée)}.$$

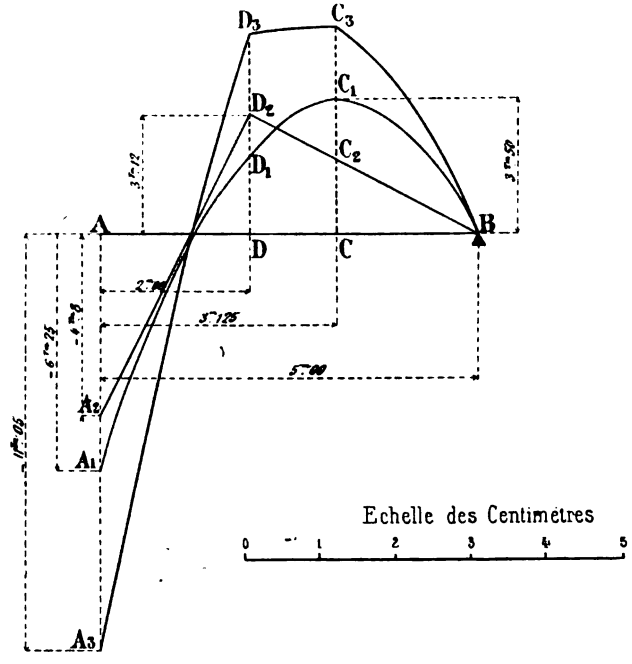


Fig. 195.

A $3^m,125$ de l'appui A, soit à l'échelle des longueurs : $3^{cm},125$, on portera $CC_1 = \frac{3^{Tm},5}{2^{Tm}} = 1^{cm},75$, et à 2 mètres de l'appui A on portera $DD_2 = \frac{3^{Tm},12}{2^{Tm}} = 1^{cm},56$.

Par les points A_1, C_1, B, on fera passer une parabole, et on joindra par des droites les points A_2, D_2, B.

Digitized by Google

On fera ensuite la somme des ordonnées de ces deux lignes représentatives, en tenant compte des signes, que l'on portera au-dessus ou au-dessous de la ligne AB.

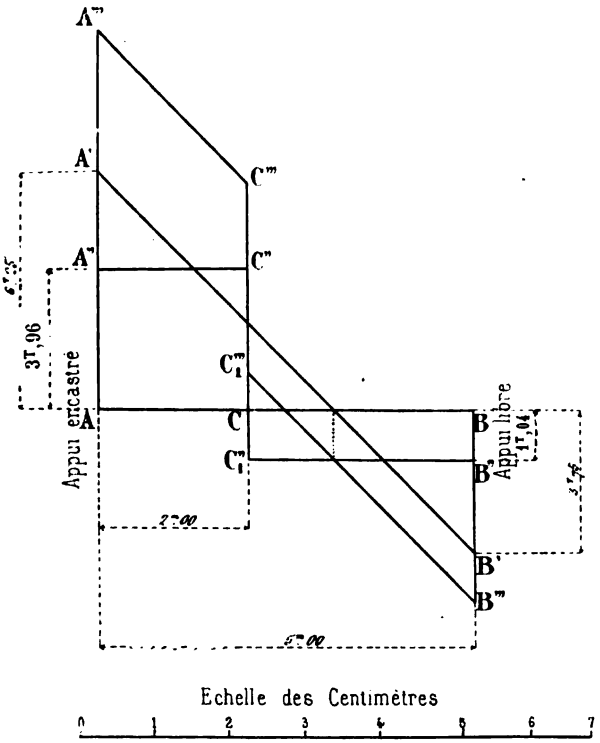


Fig. 196.

On obtiendra ainsi la ligne représentative totale $A_3D_3C_3B$, sur laquelle on recherchera le maximum qui se produit en C Il est représenté par l'ordonnée CC_3, qui mesure $2^{cm},7$.

Ce moment, pris à l'échelle, a pour valeur :

$$M = 2^{cm},7 \times 2^{Tm} = 5,4 \text{ tonnes-mètres}$$

Digitized by Google

Ligne représentative des efforts tranchants. — La charge uniforme donne la ligne A'B', pour laquelle :

$$AA' = 6^T,25, \quad \text{soit à l'échelle} \quad \frac{6^T,25}{2} = 3^{cm},125\,;$$

$$BB' = 3^T,75, \quad » \quad » \quad \frac{3^T,75}{2} = 1^{cm},875.$$

La charge concentrée donne les lignes A"C" et C''_1B'' pour lesquelles :

$$AA'' = 3^T,96, \quad \text{soit à l'échelle} \quad \frac{3^T,96}{2} = 1^{cm},98\,;$$

$$BB'' = 1^T,04, \quad » \quad » \quad \frac{1^T,04}{2} = 0^{cm},52.$$

En faisant la somme des ordonnées et en tenant compte des signes, on obtient finalement la ligne représentative (*fig.* 196) :

$$A''C''C''_1B''.$$

Les ordonnées sont à compter à partir de la droite AB.

Digitized by Google

CHAPITRE XI

POUTRES ENCASTRÉES SUR UN APPUI ET EN PORTE-A-FAUX

---

§ 1. — CHARGES FIXES

164. Charge uniforme. — La poutre de portée l est encastrée en A, et de A en B elle est en porte-à-faux. Elle soutient une charge uniforme de p^k par mètre courant (*fig.* 197).

Réaction sur l'appui A :

$$R_A = pl.$$

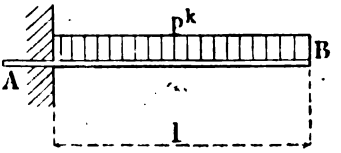


Fig. 197.

Moment d'encastrement en A. — Ce moment a pour valeur :

$$\mu = -\frac{pl^2}{2};$$

il est toujours négatif.

Moments fléchissants dans le corps de la poutre. — La formule qui donne la valeur du moment fléchissant en un point quelconque de la poutre d'abscisse x à partir de l'appui A est :

$$M_x = -\frac{p}{2}(l - x)^2.$$

Ces moments sont toujours négatifs.

La ligne représentative des moments fléchissants est une parabole tangente en B et qui découpe sur la verticale de

Digitized by Google

l'appui un segment égal au moment d'encastrement, soit :

$$\mu = -\frac{pl^2}{2}.$$

Cette ligne serait A_1C_1B (*fig.* 198).

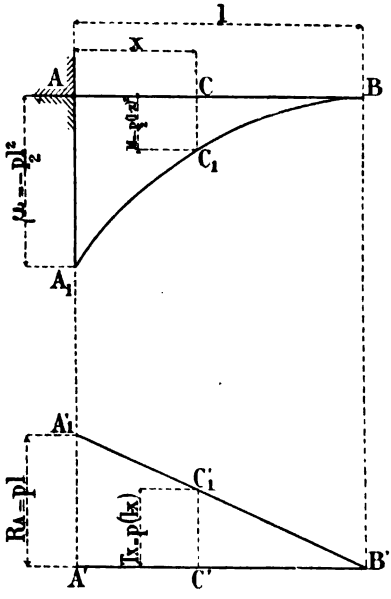


Fig. 198.

Le moment fléchissant maximum se produit toujours sur l'appui, et le moment fléchissant à l'extrémité de la charge en B est toujours nul.

Efforts tranchants. — La formule qui donne l'effort tranchant en un point quelconque d'abscisse x est :

$$T_x = R_A - px$$
$$= pl - px = p(l - x).$$

Il est toujours positif.

Sur l'appui, il est égal à $R_A = pl$ et, à l'extrémité de la charge en B, il est nul.

La ligne représentative serait la droite A'_1B'.

La *flèche maxima* se produit à l'extrémité de la charge et a pour valeur, dans le cas d'une section constante :

$$f = -\frac{1}{8}\frac{pl^4}{EI}.$$

165. Charge concentrée unique. — Soit P la charge appliquée à une distance a de l'appui (*fig.* 199).

Digitized by Google

Réaction :

$$R_A = P.$$

Moment d'encastrement :

$$\mu = -Pa.$$

Il est toujours négatif.

Moment fléchissant de A *en* B. — La formule qui donne le moment fléchissant en un point C d'abscisse x est :

$$M_x = -P(a - x).$$

Il est toujours négatif.

Au point d'application de la charge, il est nul.

La ligne représentative des moments fléchissants est une droite A'_1B_1, qui part de zéro au point d'application de la charge et qui découpe sur l'appui un segment égal à $-Pa$.

Efforts tranchants. — L'effort tranchant est toujours positif; il est constant et égal à : $T = P$.

La ligne représentative est une droite A"B" parallèle à A'B' pour laquelle :

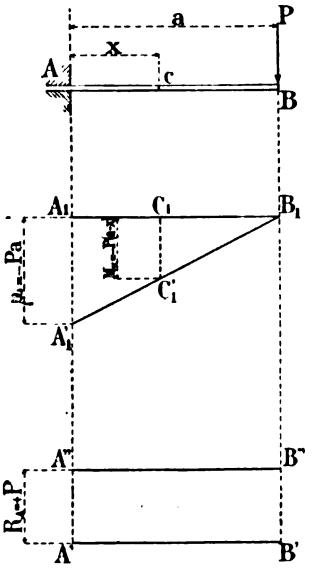


Fig. 199.

$$A'A'' = P.$$

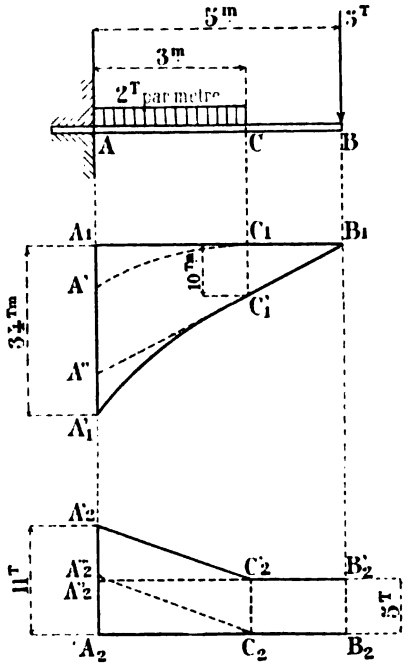
Flèche. — La flèche maxima se produit au droit de la charge et a pour valeur, dans le cas d'une section constante :

$$f = -\frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI}.$$

166. Application. — Une poutre en porte-à-faux de 5 mètres de longueur est soumise à son extrémité à l'action

Digitized by Google

d'une charge de 5 tonnes et, sur une longueur de 3 mètres à partir de l'appui, à l'action d'une charge de 2 tonnes par mètre courant (*fig.* 200).



Echelles des centimètres

0 1 2 3 4 5 6 7

FIG. 200.

Réaction :

$$R_A = pl + P = 2^T \times 3^m + 5^T = 11 \text{ tonnes.}$$

Moment d'encastrement :

$$\mu = -\frac{pl^2}{2} - Pa = -\frac{2^T \times 3^2}{2} - 5^T \times 5^m$$
$$= -34 \text{ tonnes-mètres.}$$

Digitized by Google

Moment fléchissant au point C :

$$M = 0 - P(a - x) = 0 - 5^T(5^m - 3^m)$$
$$= -10 \text{ tonnes-mètres.}$$

La ligne représentative des moments fléchissants sera $B_1C_1'A_1'$ pour laquelle B_1C_1', est une droite et $C_1'A_1'$ un arc de parabole, $A_1A_1' = -34$ tonnes-mètres.

Il est à remarquer que $A_1A_1' = A_1A' + A_1A''$.

A_1A' est le moment d'encastrement dû à la charge uniforme et A_1A'' celui dû à la charge concentrée.

$$C_1C_1' = -10 \text{ tonnes-mètres.}$$

Échelles :

Longueur..... 1 centimètre pour 1 mètre.
Moments fléchissants. 1 centimètre pour 10 tonnes-mètres.
Forces..... 1 centimètre pour 2 tonnes.

Efforts tranchants. — Sur l'appui, cet effort tranchant est égal à la réaction, soit $T_A = 11$ tonnes.

De B en C, il est constant et égal à $P = 5^T$, ligne $B_2'C_2'$; à partir de C, il est représenté par une droite $C_2'A_2'$ telle que $A_2A_2' = T_A = 11$ tonnes.

A noter que C_2A_2''' est la ligne représentative pour la charge uniforme, et $B_2'A_2''$ celle de la charge concentrée :

$$A_2A_2''' = 6 \text{ tonnes} \qquad \text{et} \qquad A_2A_2'' = 5 \text{ tonnes}$$
$$A_2A_2' = 6^T + 5^T = 11 \text{ tonnes.}$$

La ligne représentative totale sera donc :

$$B_2'C_2'A_2'.$$

187. Cas de plusieurs charges concentrées. — La poutre est soumise à l'action de plusieurs charges concentrées P_1, P_2, P_3 (*fig.* 201).

Réaction sur l'appui :

$$R_A = P_1 + P_2 + P_3.$$

Digitized by Google

Moment d'encastrement :

$$\mu = -P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3.$$

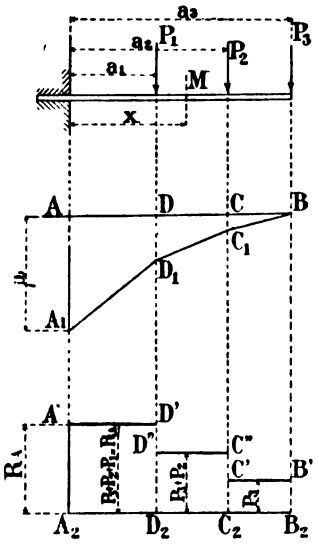


Fig. 201.

Moments fléchissants dans la poutre. — Au point d'application de la dernière charge P_3, le moment est nul.

En C il a pour valeur :

$$M_C = -P_3 (a_3 - a_2);$$

En D il a pour valeur :

$$M_D = -P_3(a_3 - a_1) - P_2(a_2 - a_1).$$

En un point quelconque M d'abscisse x, le moment fléchissant a pour valeur :

$$M_x = -P_3(a_3 - x) - P_2(a_2 - x).$$

La ligne représentative des moments fléchissants est une série de droites BC_1, C_1D_1 et D_1A_1, telles que :

$$CC_1 = M_C$$
$$DD_1 = M_D$$
$$AA_1 = \mu$$

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants sont positifs et constants entre deux charges.

De B_2 en C_2 :

$$T = P_3;$$

De C_2 en D_2 :

$$T = P_3 + P_2;$$

De D_2 en A_2 :

$$T = P_3 + P_2 + P_1 = R_A.$$

Digitized by Google

La ligne représentative des efforts tranchants est une série de droites parallèles à A_2B_2 et disposées en escalier. Soit :

$$B'C'C''D''D'A',$$

pour lesquelles :

$$B_2B' = P_3, \quad C_2C'' = P_3 + P_2$$

et

$$D_2D' = A_2A' = P_3 + P_2 + P_1 = R_A.$$

§ 2. — CHARGES VARIABLES

168. Charge uniforme. — La charge de p^k par mètre part de l'extrémité du porte-à-faux et s'avance vers l'appui (*fig.* 202).

Pour une position quelconque C, soit α la longueur de la charge.

Réaction sur l'appui :

$$R_A = p\alpha.$$

Cette réaction atteindra son maximum quand la charge couvrira toute la travée ; sa valeur sera alors pour $\alpha = l$:

$$R_m = pl.$$

Moment d'encastrement :

Il a pour expression :

$$\mu = -p\alpha\left(l - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Il atteint son maximum quand la charge couvre toute la travée ; sa valeur est alors pour $\alpha = l$:

$$\mu_m = -\frac{pl^2}{2}.$$

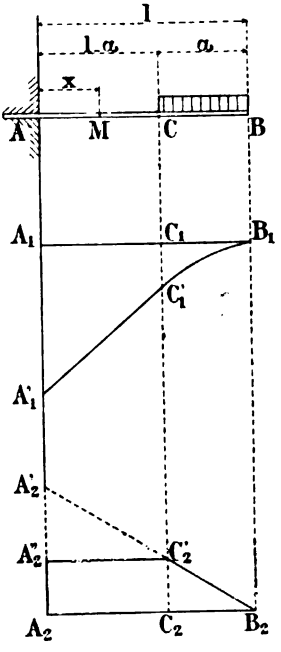


FIG. 202.

Moment fléchissant dans la poutre. — De A en C, le moment

Digitized by Google

fléchissant est donné par la formule :

$$M = p\alpha x + \mu = -p\alpha\left(l - x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

De C en B :

$$M = -\frac{p}{2}(l - x)^2.$$

Cette valeur est indépendante de α.

En C, le moment fléchissant a pour expression :

$$M_C = -\frac{p\alpha^2}{2}.$$

Le moment fléchissant maximum en un point donné s'obtiendra donc en chargeant la poutre de l'extrémité jusqu'à ce point.

La ligne représentative des moments fléchissants, pour une position *donnée* de la charge, est composée d'un arc de parabole tangent en B_1 et se terminant à l'extrémité de la charge en C'_1 ; on a :

$$C_1C'_1 = -\frac{p\alpha^2}{2}.$$

La ligne représentative se continue par la tangente $A'_1C'_1$ à la parabole.

Sur l'appui on a :

$$A_1A'_1 = \mu = -p\alpha\left(l - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Efforts tranchants. — L'effort tranchant est constant de A en C; il a pour valeur :

$$T_{A-C} = +p\alpha.$$

De C en B, son expression est :

$$T_{C-B} = p(l - x);$$

au point C pour $x = l - \alpha$:

$$T_C = p\alpha;$$

Digitized by Google

en B pour $x = l$:

$$T_B = 0.$$

La ligne représentative des efforts tranchants, lorsque α varie, est une droite B_2A_2' pour laquelle :

$$A_2A_2' = pl.$$

Lorsque la charge ira de B en C, l'effort tranchant en C sera maximum positif et sera le même que si l'on chargeait toute la poutre.

Dans la position particulière où la charge s'étend de B en C, la ligne représentative est :

$$B_2C_2'A_2''.$$

169. Charge unique mobile (*fig.* 203). — Lorsqu'une charge unique se meut sur une poutre en porte-à-faux, la réaction sur l'appui est toujours égale à cette charge P.

Le moment d'encastrement est négatif et a toujours pour valeur la charge multipliée par sa distance à l'appui, soit :

$$M_x = -P\alpha.$$

Les moments fléchissants pour les points de la poutre situés entre la charge et l'appui sont négatifs et ont pour valeur :

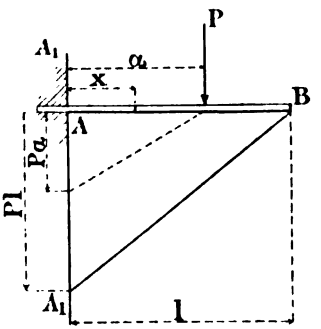


Fig. 203.

$$M_x = -P(\alpha - x),$$

x étant la distance de l'appui au point considéré.

Enfin, les efforts tranchants sont constants positifs entre la charge et l'appui et ont pour valeur P.

Le moment fléchissant maximum en un point quelconque de la poutre, y compris le moment d'encastrement, s'obtient en mettant la charge à l'extrémité du porte-à-faux B.

La ligne représentative des moments fléchissants maxima

Digitized by Google

est une droite BA_1, qui part de l'extrémité du porte-à-faux où le moment est nul, et qui découpe sur la verticale de l'appui un segment égal au moment d'encastrement maximum, soit :

$$\mu_m = -Pl.$$

170. Plusieurs charges mobiles liées invariablement. — Si plusieurs charges P_1, P_2, P_3 se meuvent sur la poutre, le moment d'encastrement maximum est obtenu lorsque la dernière charge P_3 est placée à l'extrémité du porte-à-faux (*fig.* 204).

Ce moment maximum a pour valeur :

$$\mu_m = -P_3 l - P_2(l-b) - P_1(l-a-b).$$

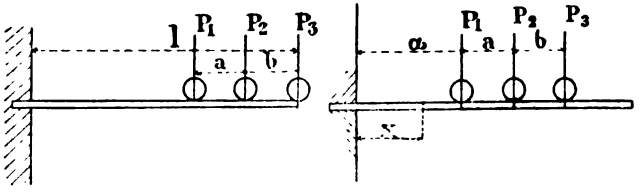


Fig. 204. Fig. 205.

Pour une position quelconque (*fig.* 205), le moment d'encastrement a pour valeur :

$$\mu = -P_1\alpha - P_2(\alpha + a) - P_3(\alpha + a + b).$$

Le moment fléchissant en un point quelconque de la poutre, d'abscisse x, situé entre les charges et l'appui, a pour valeur :

$$M_x = -P_3(\alpha + a + b - x) - P_2(\alpha + a - x) - P_1(\alpha - x).$$

Pour avoir le moment fléchissant maximum dans une section située entre l'appui et la première charge P_1, il faut placer les charges à l'extrémité du porte-à-faux comme dans la figure 204.

Aux points d'application des charges, les moments fléchis-

Digitized by Google

sants sont :

$$M_1 = - P_3 (a + b) - P_2 a$$
$$M_2 = - P_3 b$$
$$M_3 = 0$$

Enfin, ces formules montrent que, lorsque les charges se déplacent, les moments fléchissants au droit de ces charges sont toujours les mêmes.

Efforts tranchants. — L'effort tranchant est constant entre deux charges, et positif.

De P_3 à P_2	il a pour valeur		P_3
de P_2 à P_1	—	—	$P_2 + P_3$
de P_1 à l'appui	—	—	$P_1 + P_2 + P_3$

Digitized by Google

CHAPITRE XII

POUTRES REPOSANT SUR DEUX APPUIS ET SE CONTINUANT EN PORTE-A-FAUX APRÈS LES APPUIS

§ 1. — CHARGES FIXES

171. Charge uniforme. — *Soit la poutre* ABCD *reposant sur les deux appuis* A *et* B, *se prolongeant en porte-à-faux* AC *et* BD, *et soumise à l'action d'une charge uniforme p par mètre* (*fig.* 206).

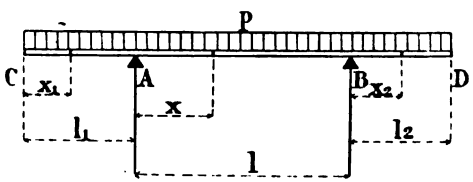


Fig. 206.

Les porte-à-faux produisent sur les appuis des moments fléchissants, qui ont même valeur que ceux d'une poutre encastrée sur un appui et en porte-à-faux (chap. XI, n° 164).

Soit alors :

Appui A :

$$\mu_A = -\frac{pl_1^2}{2};$$

Appui B :

$$\mu_B = -\frac{pl_2^2}{2}.$$

Digitized by Google

Les moments fléchissants dans les parties en porte-à-faux ont également même valeur que ceux de la poutre encastrée et en porte-à-faux (chap. XI, n° 164).

Soit alors, en prenant toujours comme origine l'extrémité de gauche :

De C en A :

$$M_{x_1} = -\frac{px_1^2}{2};$$

De B en D :

$$M_{x_2} = -\frac{p}{2}(l_2 - x_2)^2.$$

Ces moments sont toujours négatifs.

La ligne représentative des moments fléchissants pour chaque porte-à-faux est une parabole tangente à l'extrémité du porte-à-faux et qui découpe sur la verticale de l'appui un segment égal au moment sur appui, soit :

Pour CA : $$\mu_A = -\frac{pl_1^2}{2};$$

Pour BD : $$\mu_B = -\frac{pl_2^2}{2}.$$

Efforts tranchants et réactions des appuis. — De C *en* A. — L'effort tranchant en un point quelconque x_1 est donné par la formule :

$$Tx_1 = -px_1 \text{ (négatif)}.$$

Sur l'appui A et à gauche, il a pour valeur :

$$T_A' = -pl_1 \text{ (négatif)}.$$

De A *en* B. — L'effort tranchant en un point quelconque x est donné par la formule :

$$T_{A-B} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{\mu_B - \mu_A}{l}.$$

Sur l'appui A et à droite, il a pour valeur :

$$T_A = \frac{pl}{2} + \frac{\mu_B - \mu_A}{l};$$

Digitized by Google

Sur l'appui B et à gauche, il a pour valeur :

$$T'_B = T_A - pl.$$

De B *en* D. — L'effort tranchant en un point quelconque d'abscisse x_2 est donné par la formule :

$$T_{x_2} = p\,(l_2 - x_2)\ \text{(positif)}.$$

Sur l'appui B et à droite :

$$T_B = pl_2.$$

Réaction des appuis :

Appui A :

$$R_A = T_A - T'_A\,;$$

Appui B :

$$R_B = T_B - T'_B.$$

Il y aura lieu de tenir compte des signes propres aux efforts tranchants.

Moments fléchissants entre les appuis. — Le moment fléchissant en un point quelconque d'abscisse x à partir de l'extrémité de gauche est égal à :

$$M_x = T_A x - \frac{px^2}{2} + \mu_A.$$

Ce moment devient maximum positif ou minimum négatif entre les deux appuis pour :

$$x = \frac{T_A}{p},$$

et sa valeur est :

$$M_m = \frac{T_A^2}{2p} + \mu_A.$$

La ligne représentative des moments fléchissants est une parabole qui a son sommet à une distance de l'appui de gauche égale à $x = \frac{T_A}{p}$ et dont l'ordonnée est égale à M_m.

Digitized by Google

Ligne représentative totale des moments fléchissants (*fig.* 207). — Pour la déterminer rapidement, on tracera d'abord la parabole des moments fléchissants AM_1B de la poutre supposée sur deux appuis libres et sans porte-à-faux.

On sait que l'ordonnée maxima au milieu de la poutre est $\frac{1}{8}\,pl^2$.

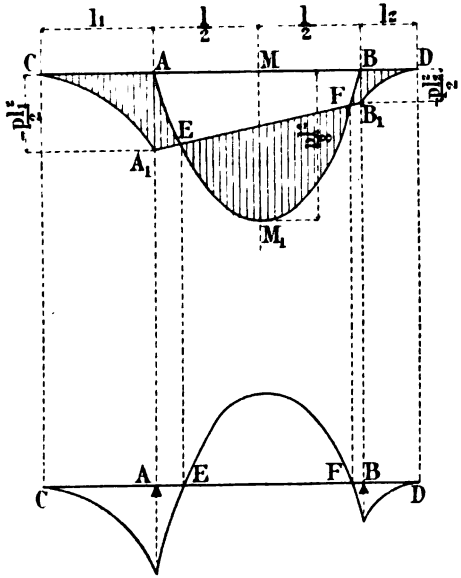


Fig. 207.

On portera ensuite sur les appuis les moments dus aux porte-à-faux, savoir :

$$AA_1 = -\frac{pl_1^2}{2};$$

$$BB_1 = -\frac{pl_2^2}{2},$$

et on joindra les deux points A_1, B_1 par une droite.

Dans les porte-à-faux, on tracera les arcs de parabole CA_1 et DB_1.

Digitized by Google

Les ordonnées des moments fléchissants sont comprises dans les parties hachurées; on pourra les relever sur une droite, et on obtiendra le tracé qui est au bas de la figure.

De C en E et de F en D ils sont négatifs, et de E en F ils sont positifs.

Il pourrait se faire que la longueur des porte-à-faux fût grande par rapport à la partie AB; la courbe se présenterait alors comme celle de la figure 208.

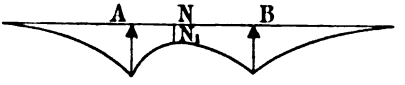


Fig. 208.

Tous les moments fléchissants sont négatifs; l'ordonnée NN_1 sera un minimum négatif entre les appuis.

Ligne représentative des efforts tranchants (*fig.* 209). — Cette ligne se compose de trois droites CA″, A′B″ et B′D. La première, CA″, part de l'extrémité du porte-à-faux et découpe sur la verticale de l'appui :

$$AA'' = T'_A = -pl_1 \text{ (négatif).}$$

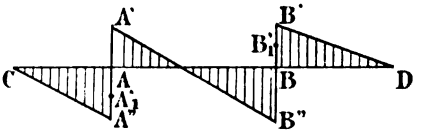


Fig. 209.

La deuxième, A′B″, découpe sur les appuis des segments :

$$AA' = T_A \text{ (positif ou négatif)}$$

et

$$BB'' = T'_B \text{ (positif ou négatif).}$$

Si T_A est négatif, il faudra le porter de A en A'_1; la même remarque est à faire pour T_B.

La troisième, B′D, découpe sur la verticale de l'appui B un

Digitized by Google

segment égal à $T_B = pl_2$ toujours positif, et se termine à l'extrémité D du porte-à-faux.

172. Charges concentrées. — Si la poutre porte un certain nombre de charges concentrées, distribuées comme l'indique

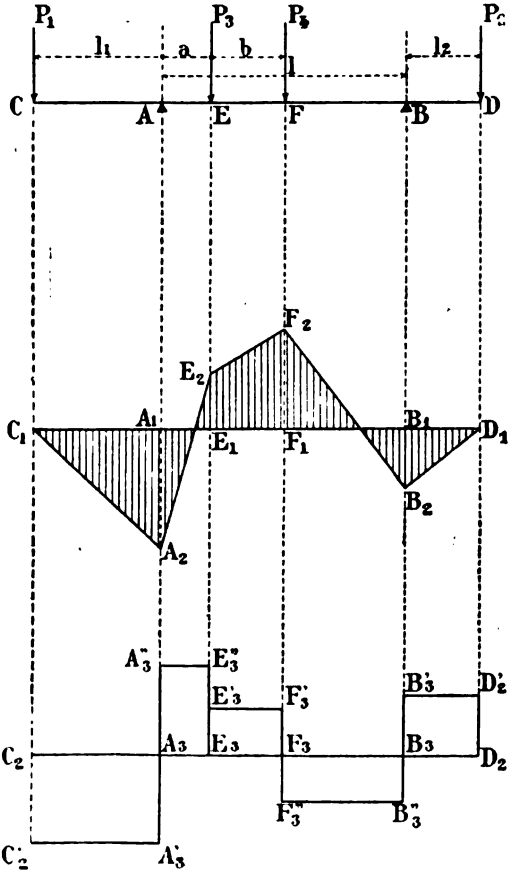


Fig. 210.

la figure 210, les moments fléchissants sur les appuis sont

Digitized by Google

(chap. XI, 165) :

$$\mu_A = -P_1 l_1, \qquad \mu_B = -P_2 l_2.$$

Efforts tranchants et réactions des appuis. — *De* C *en* A :

$$T = -P_1 \text{ (constant négatif)};$$
$$T'_A = -P_1.$$

De A *en* B. — Ils sont variables suivant la position du point considéré ; mais ils sont constants entre les charges ; ainsi :

De A en E :

$$T_{A-E} = \frac{P_3(l-a) + P_4(l-a-b)}{l} + \frac{\mu_B - \mu_A}{l};$$

De E en F :

$$T_{E-F} = T_{A-E} - P_3;$$

De F en B :

$$T_{F-B} = T_{E-F} - P_4.$$

Sur l'appui A :

$$T_A = \frac{P_3(l-a) + P_4(l-a-b)}{l} + \frac{\mu_B - \mu_A}{l};$$

Sur l'appui B :

$$T'_B = T_A - P_3 - P_4.$$

De B *en* D. — L'effort tranchant est positif, constant et égal à :

$$T = P_2.$$

En B :

$$T_B = P_2.$$

Réaction des appuis. — Comme pour la charge uniforme :

$$R_A = T_A - T'_A;$$
$$R_B = T_B - T'_B.$$

Digitized by Google

Moments fléchissants entre les appuis. — Les formules qui donnent la valeur des moments fléchissants sont pour un point d'abscisse x :

De A en E :

$$M_x = T_A x + \mu_A ;$$

De E en F :

$$M_x = T_A x - P_3 (x - a) + \mu_A ;$$

De F en B :

$$M_x = T_A x - P_3 (x - a) - P_4 (x - a - b) + \mu_A .$$

Aux points d'application des charges, où se produisent les moments maxima positifs ou minima négatifs, ils ont pour valeur :

$$M_E = T_A a + \mu_A ;$$
$$M_F = T_A (a + b) - P_3 b + \mu_A .$$

Ligne représentative des moments fléchissants. — On portera sur les verticales des appuis et négativement :

$$A_2A_1 = \mu_A, \qquad B_2B_1 = \mu_B ;$$

sur les verticales des charges, positivement ou négativement suivant les résultats obtenus :

$$E_2E_1 = M_E \qquad \text{et} \qquad F_2F_1 = M_F .$$

On joindra ensuite les points obtenus par des droites en partant des extrémités des porte-à-faux où les moments sont nuls.

On aura ainsi la ligne représentative $C_1A_2E_2F_2B_2D_1$.

Les ordonnées seront à prendre dans les parties hachurées.

Ligne représentative des efforts tranchants. — Elle se compose d'une série de droites parallèles à AB et disposées en escaliers.

Cette ligne affecte la forme représentée sur la figure.

De C *en* A : $C'_2A'_3$ telle que $A_3A'_3 = C_2C'_2$ négatif et égal à :

$$T'_A = - P_1 ;$$

Digitized by Google

De A *en* B. — Ligne disposée en escalier :

$$A_3A_3'' = T_A, \qquad B_3B_3'' = T_B';$$

De B *en* D : $B_3'B_2'$ telle que $B_3B_3' = D_2D_2'$ positif et égal à :

$$T_B = P_2.$$

173. Application. — Poutre de 5 mètres de portée entre appuis continuée par deux porte-à-faux, l'un de 2 mètres et l'autre de 1 mètre, et soumise à l'action d'une charge uniforme de 1 tonne par mètre courant (*fig.* 211).

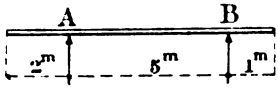


Fig. 211.

Moments fléchissants sur appuis :

$$\mu_A = -\frac{pl_1^2}{2} = -\frac{1^T \times \overline{2}^2}{2} = -2 \text{ tonnes-mètres.}$$

$$\mu_B = -\frac{pl_2^2}{2} = -\frac{1^T \times \overline{1}^2}{2} = -0^{Tm},5.$$

Efforts tranchants et réactions des appuis :

$$T_A' = -pl_1 = -1^T \times 2^m = -2 \text{ tonnes};$$

$$T_A = \frac{pl}{2} + \frac{\mu_B - \mu_A}{l} = \frac{1^T \times 5^m}{2} + \frac{-0^{Tm},5 - (-2^{Tm})}{5^m}$$

$$T_A = +2^T,8.$$

$$T_B' = T_A - pl = +2^T,8 - 1^T \times 5^m = -2^T,2;$$

$$T_B = +pl_2 = +1^T \times 1^m = +1 \text{ tonne.}$$

Réactions des appuis :

$$R_A = T_A - T_A' = +2^T,8 - (-2^T,0) = +4^T,8;$$

$$R_B = T_B - T_B' = 1^T - (-2^T,2) = +3^T,2.$$

Vérification : charge totale :

$$(2^m + 5^m + 1^m)\ 1^T = 8 \text{ tonnes.}$$

Digitized by Google

Somme des réactions :

$$R_A + R_B = 4^T,8 + 3^T,2 = 8 \text{ tonnes.}$$

Moments fléchissants entre les appuis. — Le maximum positif ou le minimum négatif se produit pour :

$$x = \frac{T_A}{p} = \frac{2^T,8}{1^T} = 2^m,8.$$

Sa valeur est :

$$M_m = \frac{\overline{T_A}^2}{2p} + \mu_A$$
$$= \frac{\overline{2^T,8}^2}{2 \times 1^T} - 2^{Tm} = + 1^{Tm},92.$$

C'est donc un maximum positif.

Ligne représentative des moments fléchissants et efforts tranchants (*fig.* 212). — On prendra comme échelles :

Longueurs..... 1 centimètre par mètre.
Forces..... 1 centimètre par tonne.
Moments fléchissants. 2 centimètres pour 1 tonne-mètre.

On pourrait tracer la ligne représentative des moments fléchissants comme il a été dit au n° 171 ; mais, le moment maximum entre les appuis étant calculé, on peut la déterminer directement.

On portera :

$$AA_1 = - 2^{Tm} \times 2^{cm} = - 4 \text{ centimètres,}$$
$$BB_1 = - 0^{Tm},5 \times 2^{cm} = - 1 \text{ centimètre,}$$

et on tracera les arcs de parabole CA_1 et DB_1.

Sur la verticale de M située à $2^m,8$ de l'appui A, soit à l'échelle $2^{cm},8$, on portera positivement :

$$MM_1 = 1^{Tm},92 \times 2^{cm} = 3^{cm},84,$$

et, par les trois points A_1, M_1, B_1, on fera passer une parabole tangente à l'horizontale en M_1.

Digitized by Google

On prendra comme base la ligne A_1N_1 parallèle à AB, et telle que :

$$M_2N_1 = A_1M_2.$$

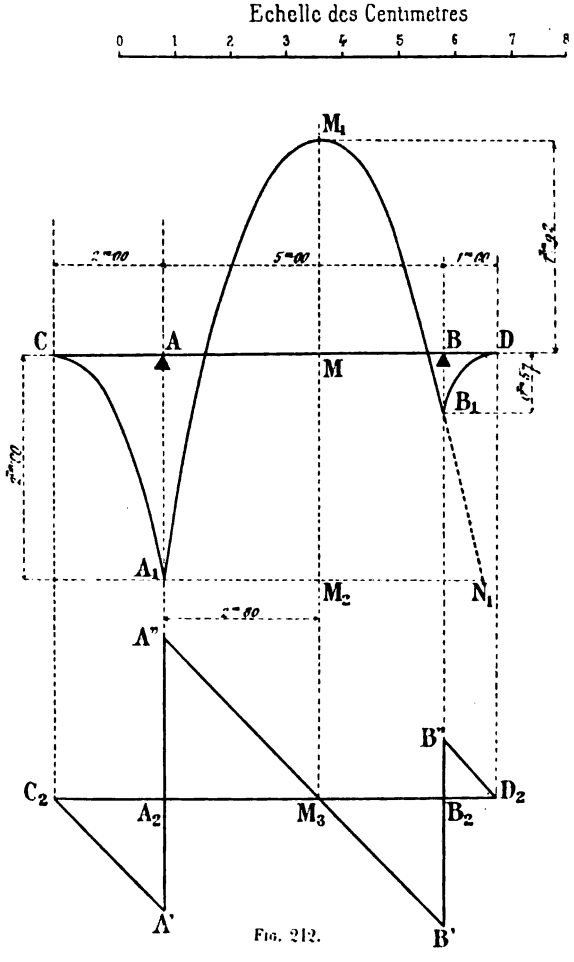


Fig. 212.

En ce qui concerne la ligne représentative des efforts tranchants, on portera :

Digitized by Google

Négativement :

$A_2A' = T'_A = -2^T,0$, soit à l'échelle $2^{cm},0$

Positivement :

$A_2A'' = T_A = 2^T,8$ — $2^{cm},8$

Négativement :

$B_2B' = T'_B = -2^T,2$ — $2^{cm},2$

Positivement :

$B_2B'' = T_B = 1^T$ — 1^{cm}.

On joindra ensuite les points obtenus par des droites, en partant de l'extrémité des porte-à-faux.

On aura ainsi la ligne $C_2A'A''B''B'D_2$.

$A''B''$ doit passer par le point M_3 où le moment fléchissant est maximum dans la travée AB.

§ 2. — CHARGES MOBILES

174. Principes généraux. — Les moments fléchissants et les efforts tranchants, que les charges soient uniformes ou concentrées, se déterminent dans une position quelconque, comme il vient d'être expliqué au paragraphe 1 pour les charges fixes.

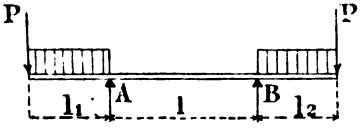


Fig. 213.

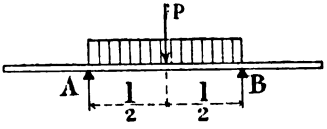


Fig. 214.

Mais, suivant la position de ces charges, les moments fléchissants et efforts tranchants subissent des variations qu'il est bon de fixer par des principes généraux.

Digitized by Google

Les moments fléchissants sur les appuis, qui sont toujours négatifs, sont maxima lorsqu'on charge complètement les porte-à-faux (*fig.* 213).

Les moments fléchissants maxima positifs, qui se produisent entre les deux appuis, s'obtiennent en chargeant toute la poutre entre ces deux appuis et en déchargeant les porte-à-faux (*fig.* 214).

Les efforts tranchants maxima dans les parties en porte-à-faux s'obtiennent en chargeant tout le porte-à-faux.

L'effort tranchant maximum *positif*, dans une section M de la partie entre les appuis, s'obtient en chargeant la poutre dans le porte-à-faux de gauche jusqu'en A, et du point considéré M jusqu'à l'appui de droite B (*fig.* 215).

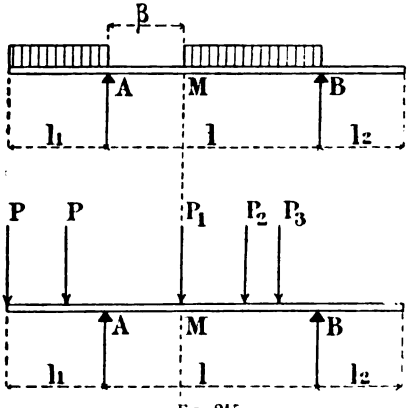


Fig. 215.

Pour une charge uniformément répartie :

$$T_M \text{ (positif)} = \frac{p\,(l-\beta)^2 - 2\mu_A}{2l}.$$

Pour des charges concentrées quelconques, en posant la première dans la section M et si T'_g est l'effort tranchant en A pour la poutre coupée aux appuis, c'est-à-dire sans tenir compte des porte-à-faux, on a :

$$T_M \text{ (positif)} = T'_g - \frac{\mu_A}{l}.$$

Digitized by Google

L'effort tranchant maximum *négatif*, pour la même section M, s'obtient en chargeant la poutre dans le porte-à-faux de droite et du point considéré M jusqu'à l'appui de gauche A (*fig.* 216).

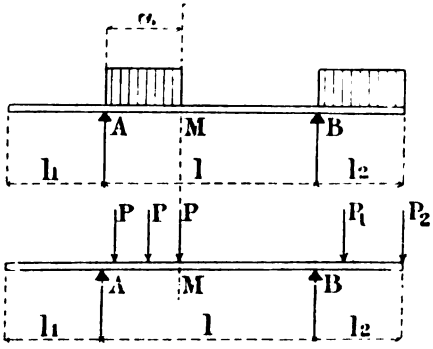


Fig. 216.

Pour une charge uniformément répartie :

$$T_M \text{ (négatif)} = -\frac{pa^2 + 2\mu_B}{2l}.$$

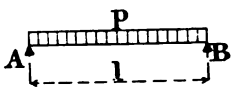
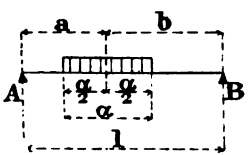
Pour des charges concentrées, si T'_d est l'effort tranchant en B pour la poutre coupée sur les appuis :

$$T_M \text{ (négatif)} = \frac{\mu_B}{l} - T'_d.$$

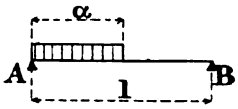
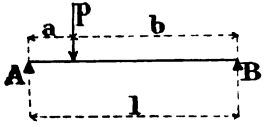
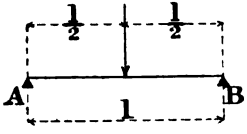
Avec ces éléments, on pourra toujours, en se servant des indications du paragraphe 1, suivant le cas, déterminer, pour chaque section, les moments fléchissants maxima positifs ou négatifs, ainsi que les efforts tranchants maxima positifs ou négatifs.

Digitized by Google

175. I. — TABLEAU RÉCAPITULATIF DES POUTRES POSÉES SUR DEUX APPUIS LIBRES.

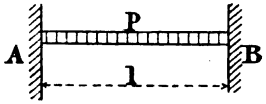
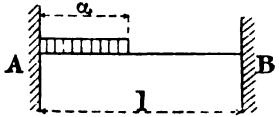
CAS CONSIDÉRÉS	EFFORTS TRANCHANTS et RÉACTIONS DES APPUIS	MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM	FLÈCHE MAXIMA
Charge uniforme complète 	$T_A = R_A = \frac{pl}{2}$ $T_B = -R_B = -\frac{pl}{2}$	Au milieu de la portée $M = \frac{1}{8} pl^2$	$f = -\frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}$
Charge uniforme incomplète 	$T_A = R_A = \frac{pb\alpha}{l}$ $T_B = -R_B = -\frac{pa\alpha}{l}$	pour $x = a + \alpha\left(\frac{b}{l} - \frac{1}{2}\right)$ $M_m = \frac{pab\alpha}{2l^2}(2l - \alpha)$	Voir chap. XVII. *Déformation des poutres*

Digitized by Google

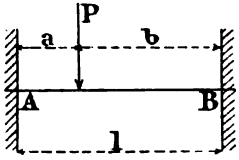
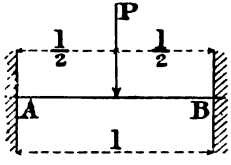
Charge uniforme incomplète  	$T_A = R_A = \frac{p\alpha(2l-\alpha)}{2l}$ $T_B = -R_B = -\frac{p\alpha^2}{2l}$	Pour $x = \frac{R_A}{p}$ $M_m = \frac{\overline{R_A}^2}{2p}$	
Charge concentrée en un point quelconque  	$T_A = R_A = \frac{Pb}{l}$ $T_B = -R_B = -\frac{Pa}{l}$	Au droit de la charge $M_m = \frac{Pab}{l}$	
Charge concentrée au milieu  	$T_A = R_A = \frac{P}{2}$ $T_B = -R_B = -\frac{P}{2}$	Au milieu $M_m = \frac{Pl}{4}$	$f = -\frac{Pl^3}{48EI}$

Digitized by Google

175. II. — TABLEAU RÉCAPITULATIF DES POUTRES ENCASTRÉES AUX DEUX APPUIS

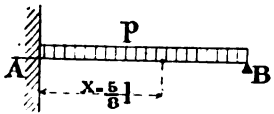
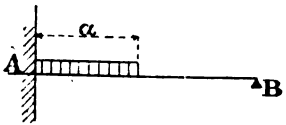
CAS CONSIDÉRÉS	EFFORTS TRANCHANTS et réactions des appuis	MOMENTS D'ENCASTREMENT	MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM dans la travée	FLÈCHE MAXIMA
Charge uniforme complète 	$T_A = R_A = \frac{pl}{2}$ $T_B = -R_B = -\frac{pl}{2}$	$\mu_A = \mu_B = -\frac{pl^2}{12}$	Au milieu $M_m = \frac{1}{24} pl^2$	$f = -\frac{pl^4}{384 . EI}$
Charge uniforme incomplète 	$T_A = R_A = + \frac{p\alpha}{2l^3}(\alpha^3 + 2l^3 - 2l\alpha^2)$ $T_B = -R_B = -\frac{p\alpha}{2l^3}(2l\alpha^2 - \alpha^3)$	$\mu_A = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(6l^2 - 8\alpha l + 3\alpha^2)$ $\mu_B = -\frac{p\alpha^2}{12l^2}(4l\alpha - 3\alpha^2)$	Pour $x = \frac{R_A}{p}$ $M_m = \frac{R_A^2}{2p} + \mu_A$	

Digitized by Google

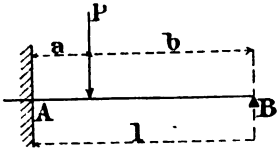
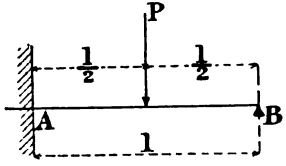
Charge concentrée 	$T_A = R_A = + \frac{P(3a+b)b^2}{l^3}$ $T_B = -R_B = -\frac{P(a+3b)a^2}{l^3}$	$\mu_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $\mu_B = -\frac{Pba^2}{l^2}$	Au droit de la charge $M_m = +\frac{2Pa^2b^2}{l^3}$	
Charge concentrée au milieu 	$T_A = R_A = \frac{P}{2}$ $T_B = -R_B = -\frac{P}{2}$	$\mu_A = \mu_B = -\frac{Pl}{8}$	Au milieu de la portée $M_m = +\frac{Pl}{8}$	$f = -\frac{Pl^3}{192EI}$

Digitized by Google

175. III. — Tableau récapitulatif des poutres sur deux appuis, encastrées a un bout et libres a l'autre

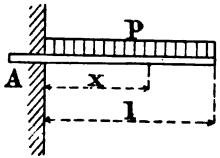
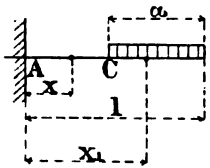
CAS CONSIDÉRÉS	EFFORTS TRANCHANTS et réactions des appuis	MOMENT A L'APPUI ENCASTRÉ	MOMENT MAXIMUM DANS LA TRAVÉE	FLÈCHE MAXIMA
Charge uniforme complète 	$T_A = R_A = \frac{5}{8} pl$ $T_B = -R_B = -\frac{3}{8} pl$	$\mu_A = -\frac{pl^2}{8}$	Se produit pour $x = \frac{5}{8} l$ $M_m = \frac{9}{128} pl^2$ $= 0.07 pl^2$	$f = -\frac{pl^4}{192 EI}$
Charge incomplète 	$T_A = R_A = + \frac{p\alpha}{8l^3}(8l^3 - 4l\alpha^2 + \alpha^3)$ $T_B = -R_B = -\frac{p\alpha^2}{8l^3}(4l\alpha - \alpha^2)$	$\mu_A = -\frac{p\alpha^2}{8l^2}(4l^2 - 4l\alpha + \alpha^2)$	Se produit pour $x = \frac{R_A}{p}$ $M_m = \frac{R_A^2}{2p} + \mu_A$	

Digitized by Google

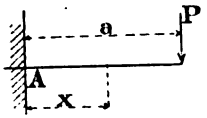
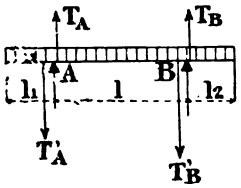
Charge concentrée  	$T_A = R_A = + \frac{P(3a^2+6ab+2b^2)b}{2l^3}$ $T_B = -R_B = -\frac{Pa^2(2a+3b)}{2l^3}$	$\mu_A = -\frac{Pa}{2l^2}(2l^2 - 3ab - 2a^2)$	Se produit au droit de la charge $M_m = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l^2 - 4al + a^2)$	
Charge concentrée au milieu  	$T_A = R_A = \frac{11}{16} P$ $T_B = -R_B = -\frac{5}{16} P$	$\mu_A = -\frac{3}{16} Pl$	Au milieu de la portée $M = \frac{5}{32} Pl$	$f = -0{,}00932 \frac{Pl^3}{EI}$

Digitized by Google

175. IV. — TABLEAU RÉCAPITULATIF DES POUTRES EN PORTE-A-FAUX

CAS CONSIDÉRÉS	EFFORTS TRANCHANTS et réactions des appuis	MOMENT D'ENCASTREMENT	MOMENT FLÉCHISSANT en UN POINT QUELCONQUE	FLÈCHE MAXIMA
Charge uniforme 	$T_A = R_A = pl$	$M_A = -\frac{pl^2}{2}$	En un point d'abscisse x $M_x = -\frac{p}{2}(l-x)^2$	$f = -\frac{1}{8}\frac{pl^4}{EI}$
Charge uniforme incomplète 	$T_A = R_A = p\alpha$	$\mu_A = -p\alpha\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)$	Pour x $M_x = -p\alpha\left(l-x-\frac{\alpha}{2}\right)$ Pour x_1 $M_{x_1} = -\frac{p}{2}\left(l-x_1\right)^2$ Au point C $M_C = -\frac{p\alpha^2}{2}$	

Digitized by Google

Charge concentrée  	$T_A = R_A = P$	$\mu_A = -Pa$	Pour x $M_x = -P(a-x)$	$f = -\frac{1}{3}\frac{Pa^3}{EI}$
Charge uniforme  	$T'_A = -pl_1$ $T_A = \frac{pl}{2} + \frac{\mu_A - \mu_B}{l}$ $T'_B = T_A - pl$ $T_B = pl_2$ $R_A = T_A - T'_A$ $R_B = T_B - T'_B$	$\mu_A = -\frac{pl_1^2}{2}$ $\mu_B = -\frac{pl_2^2}{2}$	Maximum positif ou minimum négatif pour $x = \frac{T_A}{p}$ $M_m = \frac{T_A^2}{2p} + \mu_A$	

Digitized by Google

Remarque. — Les résultats des tableaux précédents ont été mis en évidence dans les chapitres respectifs suivants :

Tableau	I. —	Chapitre	VIII
—	II. —	—	IX
—	III. —	—	X
—	IV. —	—	XI et XII

La colonne 5 relative à la flèche maxima donne la formule de cette flèche, lorsque celle-ci est susceptible d'être pratiquement exprimée.

Le chapitre XVII, relatif aux déformations des poutres, comporte les méthodes pratiques applicables à la détermination des flèches dans les cas autres que ceux indiqués dans la colonne 5 des tableaux précités.

Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE DANS L'ÉTUDE DES POUTRES POSÉES SUR DEUX APPUIS LIBRES

CHAPITRE XIII

EMPLOI DU POLYGONE FUNICULAIRE DANS LA RECHERCHE DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS

§ 1. — CHARGES FIXES

176. Cas général. — Soit une poutre AB posée sur deux appuis et soumise à l'action de plusieurs charges verticales P_1, P_2, P_3 (*fig.* 217).

On construira le polygone des forces en les portant bout à bout sur une verticale ; on choisira un pôle quelconque *o* et on tracera le polygone funiculaire correspondant M-I-II-III-B_1.

Par les appuis A et B, on mènera des verticales qui rencontrent les côtés extrêmes aux points A_1 et B_1 que l'on joindra par une droite A_1B_1.

Cette droite s'appelle la ligne de fermeture du polygone funiculaire.

Réactions des appuis. — Les réactions des appuis sont verticales; elles sont données en grandeur, direction et sens dans le polygone des forces en menant par le pôle *o* une parallèle *oc* à la ligne de fermeture A_1B_1 (n° 81).

Digitized by Google

Cette droite *oc* découpe sur la résultante *ab* deux segments : $ac = R_A$ et $cb = R_B$.

Le sens de ces deux forces est positif et dirigé de bas en haut.

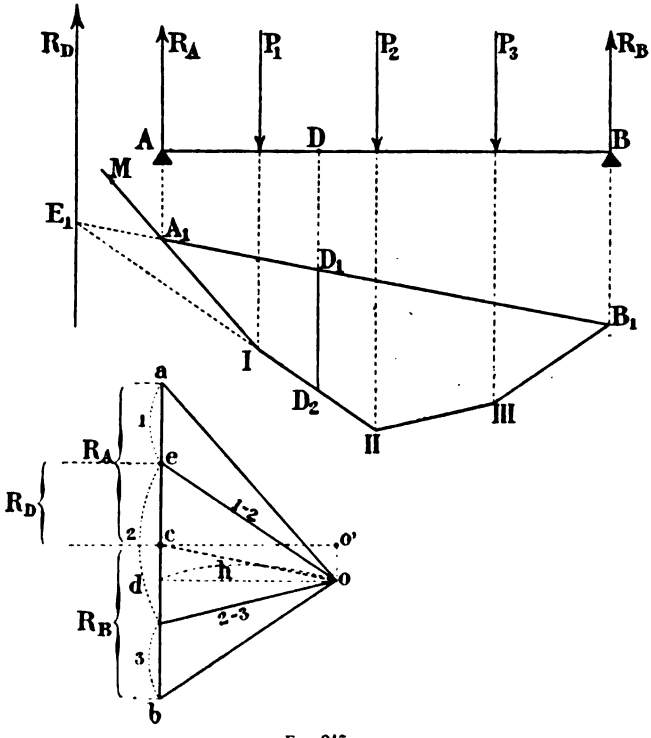


Fig. 217.

Moments fléchissants. — Les moments fléchissants sont donnés dans le polygone funiculaire par les ordonnées verticales comprises entre les côtés de ce polygone funiculaire et la ligne de fermeture A_1B_1, ces ordonnées étant multipliées par la distance polaire $od = h$.

Ainsi le moment fléchissant au point D aura pour valeur

$$M_D = D_1D_2 \times h.$$

Digitized by Google

Cette propriété découle du problème sur le moment de plusieurs forces par rapport à un point (n° 97).

Les réactions des appuis faisant équilibre aux forces agissant sur la poutre, le polygone des forces et le polygone funiculaire sont fermés (n° 78); par conséquent A_1B_1 devient un des côtés extrêmes du nouveau polygone funiculaire.

En outre, la force extérieure à la section D, qui est la résultante de toutes les forces situées à gauche de cette section, est donnée en position par la droite E_1R_D; elle est verticale et passe par le point de rencontre des deux côtés extrêmes du polygone funiculaire relatif aux forces R_A et P_1 considérées pour cette section D, c'est-à-dire B_1A_1 prolongée et I-II prolongé (n° 75).

Or, le moment fléchissant dans la section D est le moment statique de la force extérieure par rapport au point D qui a pour valeur (n° 97) : $D_1D_2 \times h$.

La force extérieure R_D est donnée en grandeur et en sens dans le polygone des forces.

Sa grandeur est le segment déterminé sur *ab* par les parallèles *oc* et *oc* aux côtés du polygone funiculaire coupés par la verticale de la section considérée.

Ces côtés sont, ici, la ligne de fermeture et I-II ; les rayons polaires correspondants sont *oc* et 1-2.

Le sens est positif lorsque le segment se trouve au-dessus du point *c* correspondant à la ligne de fermeture et négatif au-dessous.

Efforts tranchants. — Les efforts tranchants ne sont, en somme, que les forces extérieures; on pourra donc les déterminer pour différents points, comme il vient d'être expliqué pour la section D.

Pour toute section comprise entre deux forces, les côtés du polygone funiculaire restent les mêmes, ce qui prouve que l'effort tranchant entre ces deux forces est *constant*.

Redressement du polygone funiculaire. — Il y a souvent intérêt, pour pouvoir composer plusieurs lignes représentatives des moments fléchissants, à ce que la ligne de fermeture soit parallèle à la droite AB.

Pour que cela ait lieu, il suffira de changer le pôle en conservant la même distance polaire (n° 88).

Digitized by Google

A cet effet, par le point *c* on mènera *co'* parallèle à AB et par le pôle *o* une parallèle *oo'* à *ab*. Le point *o'* sera le nouveau pôle cherché, et il suffira de tracer par ce point le polygone funiculaire correspondant, ce qui résoudra le problème.

Échelle des moments fléchissants. — L'évaluation des moments fléchissants se fera de la même manière que celle qui a été fixée dans la recherche des moments statiques (n° 95).

177. Application à une poutre de 5 mètres de portée soumise à l'action de deux charges concentrées de 10 et 15 tonnes (*fig.* 218).

Échelles :

Longueurs.....	$0^m,01$ par mètre.
Efforts.....	$0^m,01$ pour 5 tonnes.
Distance polaire.....	2 mètres.
Échelle des moments	1^{cm} pour $2^m \times 5^T = 10$ tonnes-mètres.

On portera AB = 5 centimètres, et on déterminera les points C et D.

Le polygone des forces se composera de deux forces :

$$ab = \frac{10^T}{5} = 2 \text{ centimètres,}$$

et

$$bc = \frac{15^T}{5} = 3 \text{ centimètres.}$$

Le pôle *o* sera situé à une distance de *ab* :

$$od = 2 \text{ centimètres.}$$

On tracera le polygone funiculaire A_1-I-II-B_1.

La ligne de fermeture est A_1B_1 et par le pôle *o* on mènera *oe* parallèle à cette ligne de fermeture.

Réactions :

$$R_A = ae^{cm} \times 5^T = 2^{cm},6 \times 5^T = 13 \text{ tonnes.}$$
$$R_B = ce^{cm} \times 5^T = 2^{cm},4 \times 5^T = 12 \quad —$$

Digitized by Google

Moments fléchissants. — Au droit de la charge de 10 tonnes :

$$M_C = C_1 I^{cm} \times 10^{Tm} = 1^{cm},95 \times 10^{Tm} = 19^{Tm},5.$$

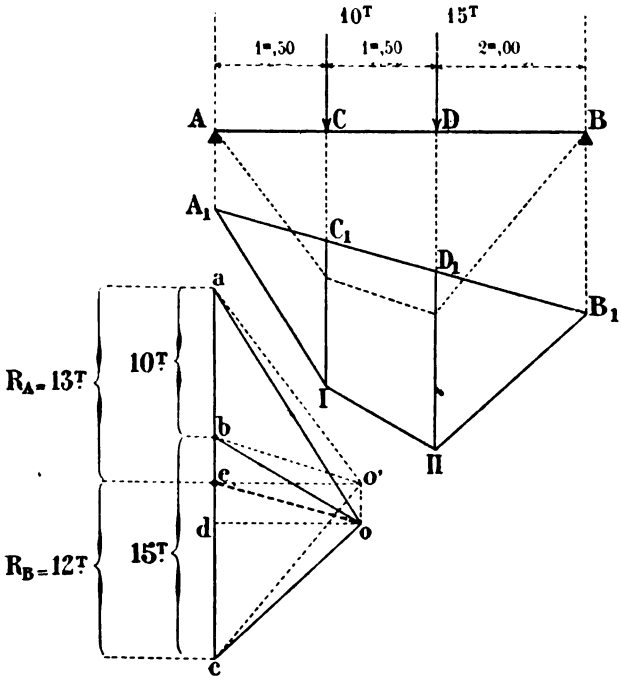


Fig. 218.

Au droit de la charge de 15 tonnes :

$$M_D = D_1 II^{cm} \times 10^{Tm} = 2^{cm},4 \times 10^{Tm} = 24 \text{ tonnes-mètres.}$$

Efforts tranchants. — De A en C :

$$T = ea^{cm} \times 5^T = + 2^{cm},6 \times 5^T = + 13 \text{ tonnes;}$$

Digitized by Google

De C en D :

$$T = eb^{cm} \times 5^T = + 0^{cm},6 \times 5^T = + 3 \text{ tonnes};$$

De D en B :

$$T = cc^{cm} \times 5^T = - 2^{cm},4 \times 5^T = - 12 \text{ tonnes}.$$

La ligne représentative des efforts tranchants serait celle de la figure 219, A'C'C''D''D'B'.

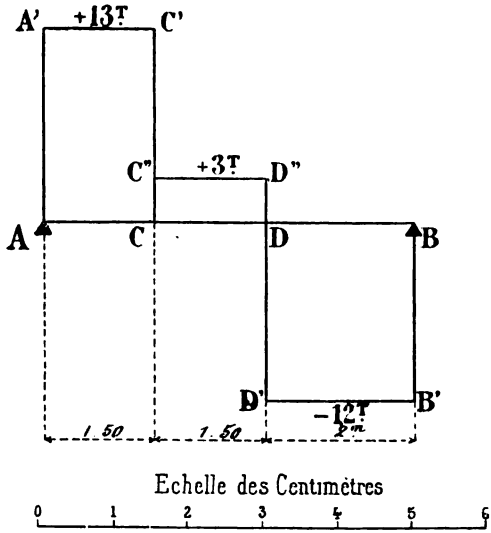


Fig. 219.

Dans laquelle les efforts, étant portés à la même échelle que celle du polygone des forces, seraient :

AA' = CC' = $2^{cm},6$,	soit	13	tonnes;
CC'' = DD'' = $0^{cm},6$,	soit	3	—
DD' = BB' = $2^{cm},4$,	soit	12	—

Pour le redressement du polygone funiculaire (*fig.* 218), le nouveau pôle se trouverait, en *o'*, au point de rencontre de

Digitized by Google

l'horizontale de *e* et de la verticale de *o*, et le nouveau polygone funiculaire est tracé en pointillé.

178. Cas d'une charge unique. — Le procédé est le même que celui employé pour plusieurs charges; mais le polygone funiculaire ne comporte que deux côtés.

Si la charge se trouve au milieu de la portée, on pourra choisir immédiatement le pôle pour que la ligne de fermeture soit horizontale. Il suffit, pour cela, que le pôle O se trouve sur l'horizontale menée par le milieu de la charge dans le polygone des forces (*fig.* 220).

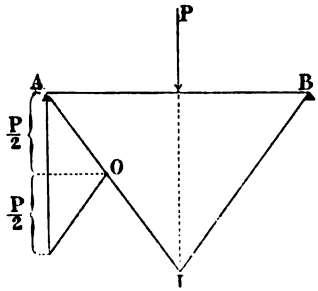


Fig. 220.

En prolongeant AO jusqu'à la verticale de la charge en I, on obtiendra le premier côté du polygone funiculaire, et, en joignant IB, on aura le deuxième côté.

Les ordonnées des moments fléchissants seront à mesurer entre AB et AIB.

179. Recherche du moment fléchissant maximum déterminé dans une poutre soumise à l'action d'un certain nombre de charges concentrées fixes. — Soit la poutre AB qui porte les charges P_1, P_2, P_3, P_4 (*fig.* 221).

Le moment fléchissant maximum se produit sous une des charges et, pour déterminer laquelle, on portera, sur la verticale de l'appui B, les charges, en commençant par la dernière, c'est-à-dire 4, 3, 2, 1. On joindra le point extrême C à l'appui A.

On cherchera la position de la résultante R de toutes les charges, au moyen d'un polygone funiculaire quelconque, et, au point M où cette résultante rencontre AC, on mènera une horizontale.

La force 2 rencontrée par cette horizontale sera celle où se

Digitized by Google

produit le moment fléchissant maximum dans l'exemple choisi; c'est donc la charge P_2.

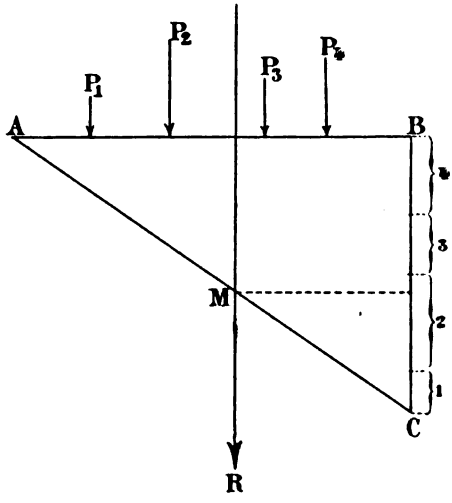


Fig. 221.

Il est bien entendu que les forces 4, 3, 2, 1 doivent être portées à une échelle convenue.

§ 2. — CHARGES MOBILES

180. Cas de plusieurs charges mobiles. — A. *Moments fléchissants.* — Soit la poutre AB qui doit recevoir le passage d'un convoi d'une longueur indéfinie et composé d'une série de charges P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, etc..., liées invariablement entre elles (*fig.* 222).

La recherche du moment fléchissant maximum dans la poutre se fait par le tracé de *Weyrauch*, qui est simple.

On commence par placer sur la poutre les charges les plus lourdes, et sur l'appui A la plus lourde d'entre elles.

Digitized by Google

Soient P_2, P_3 et P_4 les plus lourdes et P_2 la plus lourde d'entre elles.

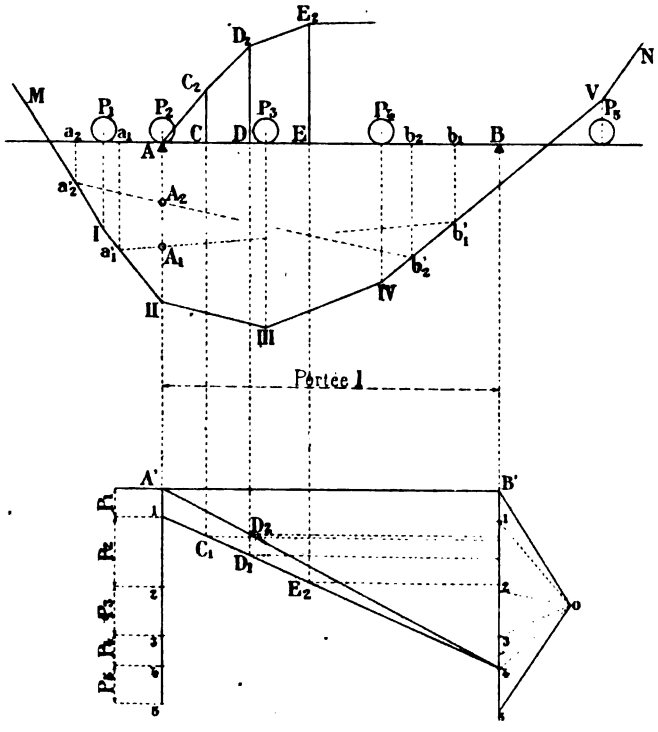


Fig. 222.

Pour les trains de chemin de fer, la première charge est généralement la plus lourde, et pour les voies de terre, c'est un essieu de véhicule.

On porte sur les verticales des appuis les charges dans l'ordre rencontré, 1, 2, 3, 4, 5. Avec un pôle *o* quelconque, on trace un polygone funiculaire M-I-II-III-IV-V-N.

On considère toutes les charges qui se trouvent sur la poutre, et on joint par une droite les extrémités des poly-

Digitized by Google

gones des forces correspondant à ces charges ; dans le cas présent, 1 à 4.

On divise ensuite la poutre en un certain nombre de sections C, D, E, etc. (généralement aux points d'attache des entretoises dans les ponts), et on fait pour ces sections les tracés ci-après :

Section C. — Par C, on mènera une verticale qui rencontre 1-4 en C_1. Par ce point C_1 on tire une horizontale qui rencontre dans le polygone des forces de droite la force 2. C'est donc la charge P_2 qui, amenée en C, produirait le moment fléchissant maximum.

Toutefois il y a lieu d'examiner si, après ce mouvement, toutes les forces restent bien sur la poutre et s'il n'en rentre pas de nouvelles ; ainsi il faudrait se rendre compte si P_1 ne rentre pas sur la poutre et si P_4 n'en sort pas.

A cet effet, le sens du mouvement pour amener P_2 en C étant de A vers C, il suffira de porter à gauche de A et de B les distances Aa_1 et $Bb_1 = AC$.

Si les charges prévues dans l'hypothèse considérée restent bien les mêmes sur la poutre, comme dans le cas présent, le moment fléchissant maximum dans la section C se produira lors du passage de la charge P_2 dans cette section.

Pour déterminer la valeur de ce moment fléchissant, il suffira de mener les verticales de a_1 et b_1.

Ces verticales rencontrent les côtés du polygone funiculaire en a'_1 et b'_1, que l'on joindra par une droite $a'_1b'_1$ et qui coupe la verticale de la charge P_2 en A_1.

L'ordonnée A_1H, relevée à l'échelle des moments, donnera la valeur du moment fléchissant maximum dans la section C, que l'on portera en ordonnée de C en C_2.

Section D. — On recherchera la charge qui peut donner le moment maximum en menant par D_1, déterminé par la verticale de la section, une horizontale qui rencontre, dans le polygone des forces de droite, la force 2.

C'est donc encore la charge P_2 qui donnerait le maximum. Mais on remarque qu'en portant cette charge en D, la charge P_1 rentre dans la poutre et que P_4 n'en sort pas.

Il faut donc vérifier si, avec cette nouvelle charge, le moment maximum en D se produit toujours sous la charge P_2.

Digitized by Google

A cet effet, on mènera la droite A'-4, qui correspond aux charges P_1 à P_4; et par D_2, point de rencontre de cette droite avec la verticale de la section considérée, on mènera une horizontale.

Si cette horizontale rencontre encore la force 2, comme dans le cas présent, ce sera la charge P_2 qui donnera à nouveau le moment maximum.

Pour le déterminer, on portera Aa_2 et $Bb_2 = AD$, on mènera les verticales de a_2 et b_2 qui rencontrent les côtés du polygone funiculaire aux points a'_2 et b'_2, que l'on joindra également par une droite $a'_2b'_2$.

Cette droite rencontre la verticale de la charge P_2 au point A_2. L'ordonnée A_2H représentera le moment fléchissant maximum qui se produit dans la section D, que l'on portera en évidence de D en D_2.

Si l'horizontale de D_2 avait rencontré la force 1, le moment fléchissant maximum se serait produit sous la charge P_1, à condition, toutefois, que la charge P_1 fût restée sur la poutre.

On recherchera ainsi les moments fléchissants maxima pour différentes sections, notamment au milieu de la poutre, mais sans dépasser de trop ce milieu. On relèvera les ordonnées obtenues au droit des sections, et on joindra par des droites les extrémités de ces ordonnées, ce qui donnera la ligne représentative des moments fléchissants.

Si les charges sont très variables les unes par rapport aux autres, on recherchera pour les mêmes sections les moments fléchissants maxima, mais le convoi retourné et marchant de A vers B.

On comparera les deux systèmes de moments fléchissants, et on prendra pour chaque section le plus grand.

B. *Efforts tranchants.* — En général, l'effort tranchant maximum, en chaque point de la poutre, se produit lors du passage d'une des charges en ce point.

Lorsqu'il s'agit d'un train avec machine à l'avant, l'effort tranchant maximum se produira sous la première roue.

Quant aux ponts pour voie de terre, ce sera sous l'essieu d'un tombereau.

La ligne représentative des efforts tranchants maxima,

Digitized by Google

produits par la *première charge* d'un convoi qui se déplace sur la poutre, se détermine de la manière suivante :

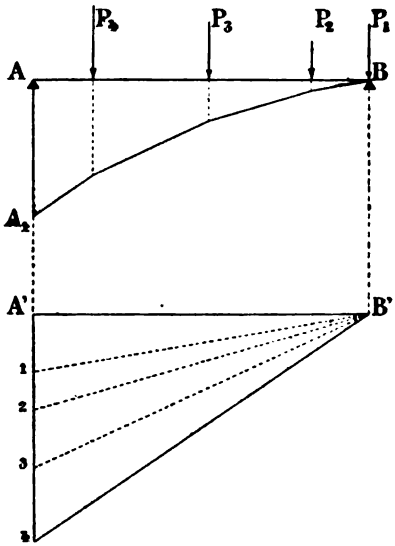


Fig. 223.

Le convoi est composé des charges P_1 à P_4, toutes comprises sur la poutre (*fig.* 223).

Si on suppose qu'il se meut de B vers A, on renversera le convoi en plaçant la charge de tête P_1 sur l'appui B, et les autres à la suite, mais de B vers A.

A partir d'une horizontale A'B', on construira, sur la verticale de l'appui A, un polygone des forces en commençant par la charge P_1, et on tracera un polygone funiculaire en prenant comme pôle le point B'.

Le premier côté de ce polygone funiculaire, sera horizontal et aboutira au point B; le second sera parallèle à B'1 et ira de P_1 à P_2, et ainsi de suite, jusqu'au dernier que l'on terminera en A_1.

Les ordonnées du polygone funiculaire ainsi déterminé donneront pour chaque section de la poutre, à l'échelle convenue pour les efforts, les efforts tranchants maxima lors du passage de la première charge dans cette section, le convoi se déplaçant de B vers A, les charges étant supposées agissant directement sur la poutre.

D'après le paragraphe *C* (p. 152), ces efforts tranchants seront maxima positifs.

Pour déterminer la ligne représentative des efforts tranchants maxima négatifs, il suffira de supposer le convoi

Digitized by Google

se déplaçant de A vers B et de tracer le polygone funiculaire en plaçant la première charge P_1 sur l'appui A, les autres à la suite de A vers B, et de prendre comme pôle l'appui A'.

Il y a lieu de remarquer que ces deux polygones funiculaires sont symétriques et qu'il suffit d'en tracer un.

La réaction maxima, pour les charges dont il vient *d'être question seulement*, sera obtenue lorsqu'on placera la première de ces charges sur un des appuis ; elle sera représentée par l'ordonnée AA_1.

181. Application à une poutre de 10 mètres de portée sur laquelle doit passer le train-type, pour voie normale, de la circulaire ministérielle des travaux publics (*Voir cette circulaire à l'annexe*). — Cette poutre est divisée en cinq panneaux de 2 mètres et la transmission des charges se fait par des entretoises limitant les panneaux.

Les points d'attache des entretoises sont A, C, D, E, F, B.

Il suffira de rechercher les moments fléchissants maxima en ces points, ainsi d'ailleurs que les efforts tranchants.

La partie du train-type que peut contenir la poutre se compose d'une machine et d'un essieu de tender (*fig.* 224).

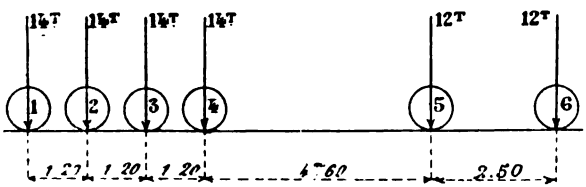


Fig. 224.

Chaque essieu de machine pèse 14 tonnes, et l'essieu de tender 12 tonnes ; les charges afférentes à la poutre, en supposant que la voie se trouve à égale distance des deux poutres, seront :

Essieux de machine.....	7 tonnes.
— de tender.....	6 —

Digitized by Google

Echelles adoptées :

Longueurs ..... $0^m,01$ par mètre.
Forces..... $0^m,01$ pour 5 tonnes.
Moments ..... $0^m,01$ pour $12^{Tm},5$.

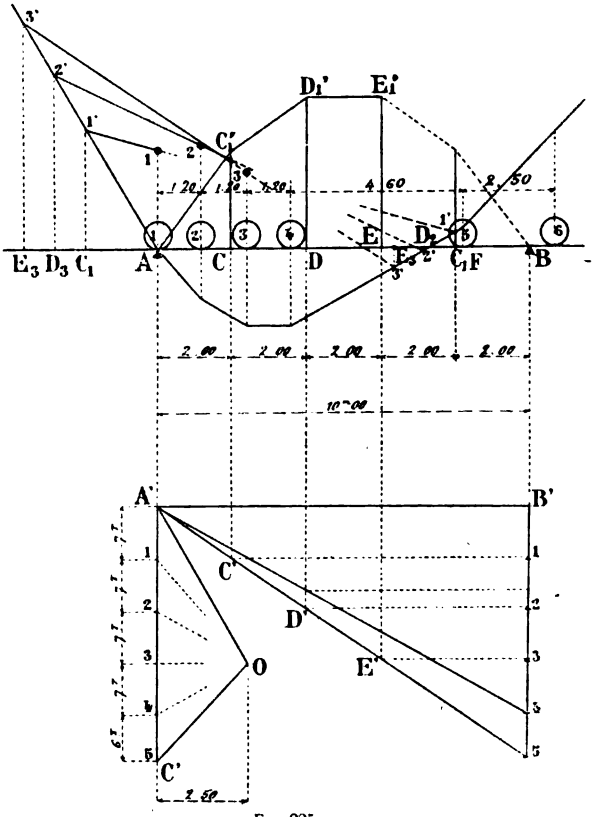


Fig. 225.

On placera (*fig.* 225) l'essieu 1 à l'appui A et les autres à la suite, et on construira le polygone des forces A'C', et avec le pôle O on tracera le polygone funiculaire, en faisant passer le premier côté par l'appui A.

Digitized by Google

Par A′ on mènera une horizontale sur laquelle on portera $A'B' = l = 10$ mètres, soit à l'échelle 10 centimètres ; au point B′, on répétera le polygone des forces, soit B′5, et on tirera la droite A′5.

Section C. — La verticale du point C rencontre A′5 en C′, et l'horizontale menée par C′ coupe la charge 1 sur B′5.

C'est donc l'essieu 1 qui donne le moment fléchissant maximum, même si l'essieu 5 sortait de la poutre.

L'ordonnée A-1 de ce moment s'obtient en portant à gauche des deux appuis AC_1 et $BC_1 = AC$.

Les verticales de ces points rencontrent les côtés du polygone funiculaire aux points 1′ que l'on joindra par une droite.

La rencontre de cette droite et de la verticale de l'essieu 1 déterminera l'ordonnée A-1 qui représentera le moment fléchissant maximum en C ; on sortira cette ordonnée au droit de la section de C en C'_1. La valeur du moment fléchissant est de $32^{Tm},5$.

On procédera de même pour la section D, et on trouve en premier lieu que l'essieu 2 donne le maximum ; mais, en portant cet essieu en D, l'essieu 5 sort de la poutre.

En vérifiant par la ligne A′4 qui correspond aux charges 1 à 4 restant sur la poutre, on trouve que l'essieu 2 donne encore le maximum ; en conséquence, c'est cet essieu qui répond à la question.

On portera donc à gauche des appuis $AD_3 = BD_2$ et les verticales de ces points déterminent les points 2′ qui, joints par une droite, interceptent l'ordonnée 2 sur la verticale de l'essieu 2.

Cette ordonnée sera portée de D en D'_1. On procédera de même pour les autres sections.

On joindra les points A, C'_1, D'_1, E'_1 par des lignes droites qui formeront la ligne représentative des moments fléchissants maxima.

Le moment maximum maximorum se produit en D et en E, il a pour valeur à l'échelle des moments :

$$M_m = 4^{cm},05 \times 12^{Tm},5 = 50^{Tm},63.$$

Efforts tranchants (*fig.* 226). — La ligne représentative se

Digitized by Google

tracera en portant sur AB $= 10^{m} \times 1^{cm} = 10$ centimètres les charges 1 à 5 et en plaçant l'essieu 1 au point B.

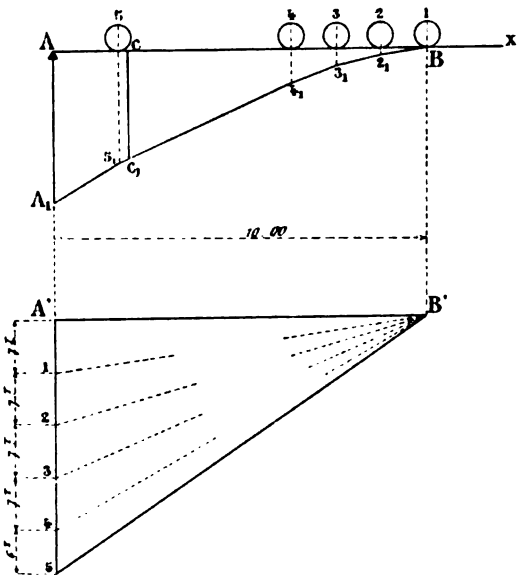


Fig. 226.

Sur la verticale de A, on construira le polygone des forces en portant :

$$1 = \frac{7^{T}}{5^{T}} = 1^{cm},4 \qquad \text{et} \qquad 5 = \frac{6^{T}}{5^{T}} = 1^{cm},2.$$

$$\left.\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right\} \quad \text{dito}$$

On prendra comme pôle B' et on mènera les rayons polaires.

Le premier côté du polygone funiculaire sera xB, parallèle à A'B', le deuxième $B2_1$, parallèle à B'1, et ainsi de suite jusqu'à 5_1A_1 parallèle à B'5.

Digitized by Google

La ligne $A_1 5_1 4_1 3_1 2_1 B$ donnera les ordonnées des efforts tranchants positifs lorsque le convoi s'avance de B vers A.

Dans la section c, il serait :

$$cc_1^{cm} \times 5^T = 2^{cm},9 \times 5^T = 14^T,5,$$

et la réaction sur l'appui A de :

$$AA_1^{cm} \times 5^T = 4^{cm} \times 5^T = 20 \text{ tonnes.}$$

Remarque. — Il va de soi que les moments fléchissants et efforts tranchants dus à la charge variable devront être totalisés avec ceux de la charge permanente.

Digitized by Google

CHAPITRE XIV

POUTRES A TREILLIS POSÉES SUR DEUX APPUIS LIBRES

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

182. Définition. — On entend par poutre à treillis une poutre composée d'une série de barres supérieures appelées *membrures supérieures*, d'une autre série de barres inférieures appelées *membrures inférieures* et d'un système de barres disposées en treillis reliant les deux types de membrures.

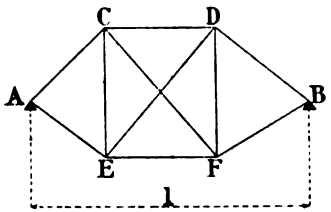


Fig. 227.

Ainsi, dans la poutre de la figure 227, AC, CD et DB sont les membrures supérieures ; AE, EF et FB sont les membrures inférieures, et CF, DE, CE, DF, sont les barres de treillis.

Les barres de treillis sont appelées aussi *croisillons*, *diagonales* et, lorsqu'elles sont verticales, on les nomme *montants*.

Le point de rencontre de plusieurs types de barres s'appelle un *nœud*. Ainsi A, B,..., F, sont des nœuds.

Les désignations employées dans la suite seront les suivantes :

Ensemble de la poutre : poutre à treillis.

Membrure supérieure S, membrure inférieure I, montant M, diagonale D.

Les poutres à treillis se divisent en deux catégories :

Digitized by Google

1° Poutres à *treillis simple ;*

2° Poutres à *treillis multiples.*

Un système de treillis est simple lorsqu'une section verticale de la poutre, entre deux nœuds consécutifs, ne rencontre qu'une diagonale, comme dans l'exemple de la figure 228, où la section OO ne rencontre que la diagonale D.

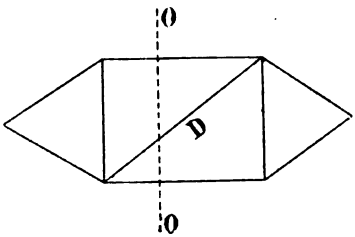


Fig. 228.

Un système de treillis est multiple lorsque la section rencontre plusieurs diagonales (*fig.* 229).

Parmi les systèmes à treillis multiples, il faut faire la subdivision en treillis double, quadruple, etc.

Un treillis est double lorsqu'il y a deux systèmes de treillis simples (*fig.* 229).

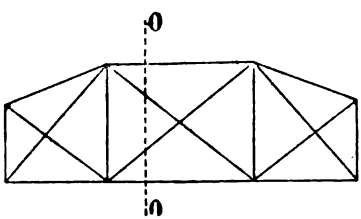


Fig. 229.

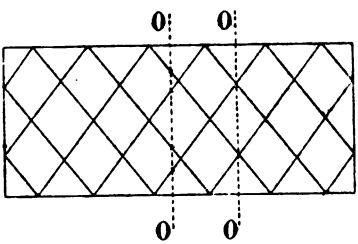


Fig. 230.

Un treillis est quadruple lorsqu'il y a quatre systèmes de treillis simples, c'est-à-dire lorsque la section verticale rencontre entre deux nœuds consécutifs quatre diagonales (*fig.* 230).

Le treillis simple étant le seul qui soit susceptible d'être traité assez rigoureusement, il sera nécessaire, dans le cas d'une poutre à treillis multiples, de la décomposer en systèmes simples.

Digitized by Google

Aussi la poutre à treillis double (*fig.* 231) sera décomposée en deux systèmes simples.

La poutre de la figure 232 sera également décomposée en deux systèmes simples.

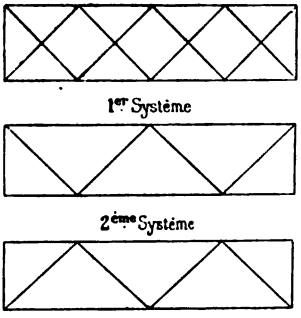


Fig. 231.

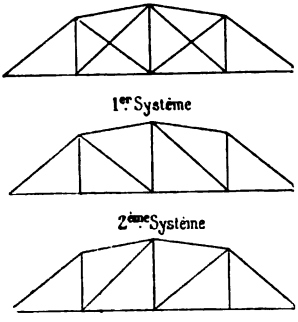


Fig. 232.

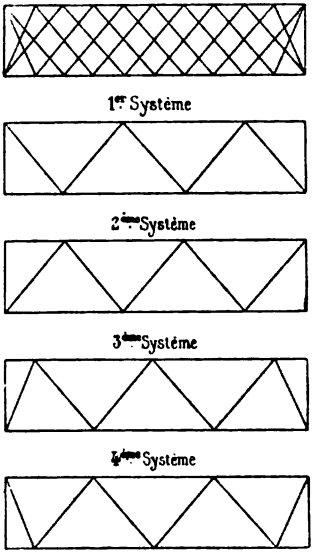


Fig. 233.

Pour une poutre à treillis quadruple, on aura à la décomposer en quatre systèmes simples (*fig.* 233).

183. Hypothèses prévues dans les poutres à treillis pour que les barres qui les composent ne subissent que des efforts de tension et de compression. — Ces hypothèses sont les suivantes :

1° *Toutes les charges seront appliquées directement aux nœuds ou transmises à ces nœuds par des pièces secondaires (entretoises)* ;

Digitized by Google

2° *Les axes neutres des barres seront des lignes droites et devront se trouver dans le plan de la poutre ;*

3° *Les axes neutres des barres qui aboutissent à un même nœud devront tous se rencontrer en ce nœud ;*

4° *Les barres de tout le système seront supposées articulées aux nœuds d'attache.*

Il arrive parfois que la condition 1 n'est pas remplie, ce qui a lieu, pour certains cas particuliers, lorsque les charges agissent directement sur la poutre entre deux nœuds consécutifs. Dans ce cas, outre les efforts de tension et de compression, il se produit dans les barres qui supportent les charges des efforts de flexion dont il faudra tenir compte. Ce cas sera examiné plus loin.

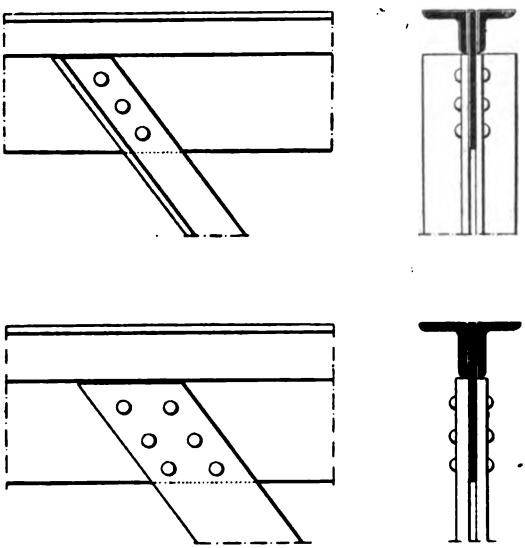


Fig. 231.

La condition 2 n'est pas toujours réalisable, surtout pour les diagonales.

Une bonne solution est l'emploi de diagonales composées

Digitized by Google

de cornières ou de fers plats situés, pour une même barre, de part et d'autre de l'axe vertical de la membrure (*fig.* 234).

Une solution qui ne satisfait pas à la condition 2 est celle de la figure 235, dont les barres ne sont composées que de pièces situées d'un même côté de la membrure.

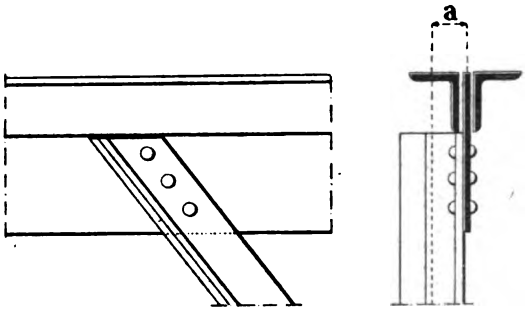


Fig. 235.

Cette solution est d'autant plus défectueuse que l'aile du profil employé est grande, car l'axe neutre s'éloigne de plus en plus de l'axe de la poutre, et, dans ce cas, l'effort qui agit dans la diagonale produit dans la membrure un effort de torsion qui augmente avec le désaxement *a*.

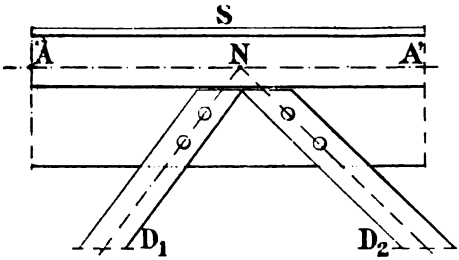


Fig. 236.

La condition 3 a une grande importance, elle devra presque toujours être réalisée. Une bonne solution est celle de la figure 236. Ainsi, pour les barres S, D_1 et D_2, qui aboutissent

Digitized by Google

à un même nœud, le point de rencontre des axes neutres des diagonales D_1 et D_2 se trouve en N sur la ligne AA′ qui est l'axe neutre de la membrure supérieure S.

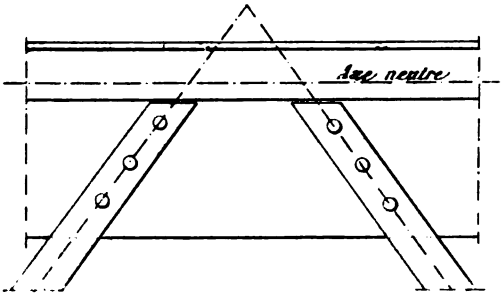


Fig. 237.

Si cette condition n'est pas remplie, il se produira des efforts secondaires qui augmenteront le travail des barres et qui seront d'autant plus grands que le point de rencontre des deux diagonales sera plus éloigné de AA′.

Les figures 237 et 238 montrent des constructions défectueuses et qui, pourtant, sont souvent prévues.

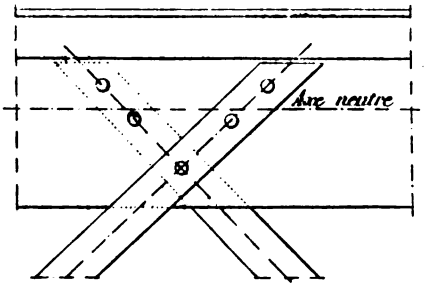


Fig. 238.

En ce qui concerne la condition 4, les poutres employées en Amérique ont bien en effet les barres reliées par une articulation (cheville, boulon) ; de là le nom de *poutres américaines* donné à ce genre de poutre.

Digitized by Google

En Europe, et notamment en France, on remplace l'articulation par un assemblage rigide avec rivets ou boulons.

La rigidité de ces assemblages donne bien lieu à des efforts secondaires; mais ils sont peu importants par rapport à l'effort principal, et on n'en tient pas compte.

§ 2. — MODE DE RÉPARTITION DES CHARGES

184. Charges reportées aux nœuds par des pièces secondaires. — Les charges qui agissent sur l'ouvrage peuvent être uniformément réparties ou concentrées.

Elles peuvent agir de trois manières différentes :

1° A la partie supérieure ;

2° A la partie inférieure ;

3° Aux parties supérieure et inférieure.

Pour les deux premiers cas, la répartition des charges, aux différents nœuds qui reçoivent l'action de la pièce secondaire, se fera de la même façon, mais en tenant compte, bien entendu, de la position de l'entretoise qui transmet les charges, c'est-à-dire que :

Les nœuds supérieurs seront seuls chargés si les entretoises sont à la partie supérieure, et inversement si les entretoises sont à la partie inférieure.

Dans le cas où les entretoises qui transmettent les charges se trouvent aux parties supérieure et inférieure, on fera séparément pour les nœuds supérieurs et inférieurs la répartition des cas 1 et 2.

A. *Charges uniformément réparties.* — Si p est la charge uniforme par mètre courant de poutre, la charge à un nœud quelconque où agit l'action d'une entretoise chargée est égale au produit de p par la moyenne des distances qui séparent le nœud des deux nœuds voisins, où aboutit également une entretoise.

Ainsi, pour la poutre (*fig.* 239), tous les nœuds inférieurs C, D, E, reçoivent une entretoise; les charges en ces

Digitized by Google

nœuds seront :

Nœud C : $p \times \frac{d + d_1}{2}$;

Nœud D : $p \times \frac{d_1 + d_2}{2}$;

Nœud E : $p \times \frac{d_2 + d_3}{2}$.

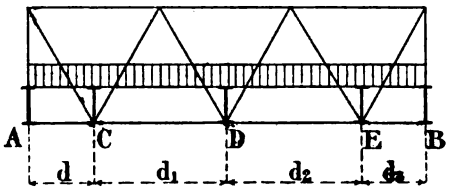


Fig. 239.

Premier exemple. — Si, pour la poutre ci-dessus : $p = 2^T$, $d = 1^m$, $d_1 = 2^m$, $d_2 = 2^m,5$ et $d_3 = 1^m$, on aura :

Charge au nœud C : $2^T \times \frac{1 + 2}{2} = 3$ tonnes ;

— — D : $2^T \times \frac{2 + 2,5}{2} = 4^T,5$;

— — E : $2^T \times \frac{2,5 + 1}{2} = 3^T,5$.

Deuxième exemple. — Pour la poutre (*fig.* 240), dont les entretoises qui transmettent les charges sont placées à la

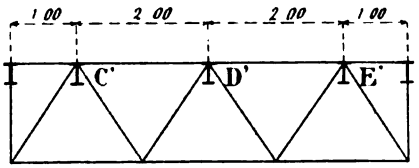


Fig. 240.

partie supérieure, les charges en chaque nœud supérieur

Digitized by Google

sont, si $p = 5$ tonnes :

Nœuds C′ et E′ : $5^T \times \frac{1+2}{2} = 7^T,5$;

Nœud D′ : $5^T \times \frac{2+2}{2} = 10$ tonnes.

Troisième exemple. — Poutre (*fig.* 241) qui reçoit à la partie supérieure une charge par mètre de $p_s = 2$ tonnes, et à la partie inférieure $p^i = 3$ tonnes.

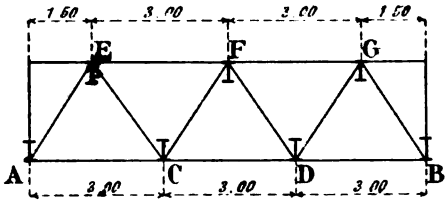


Fig. 241.

Charges aux nœuds supérieurs :

E et G : $2^T \times \frac{3+1,5}{2} = 4^T,5$;

F : $2^T \times \frac{3+3}{2} = 6$ tonnes.

Charges aux nœuds inférieurs :

C et D : $3^T \times \frac{3+3}{2} = 9$ tonnes.

Remarque I. — Il arrive parfois que tous les nœuds de la partie chargée ne reçoivent pas d'entretoises; dans ce cas, ces nœuds ne porteront aucune charge.

Ainsi, pour la poutre (*fig.* 242), chargée à la partie supérieure au moyen d'entretoises placées aux nœuds A, B, C, D, seuls les nœuds C et D porteront des charges.

Digitized by Google

Si p est la charge par mètre courant de poutre, on aura :

Nœuds A et B : $p \times \frac{d}{2}$;

Nœuds C et D : $p \times \frac{d + d_1}{2}$.

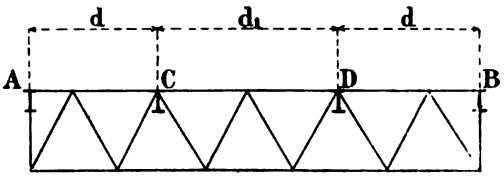


Fig. 242.

Remarque II. — Les charges des nœuds placés au droit des appuis n'entrent pas en ligne de compte dans le calcul de la poutre. Il ne faut en tenir compte que pour la détermination des pièces qui transmettent la charge de la poutre sur les appuis.

Remarque III. — Dans le cas d'une poutre à treillis multiples, il y a lieu de faire la répartition des charges aux nœuds munis d'entretoises, pour chaque système simple.

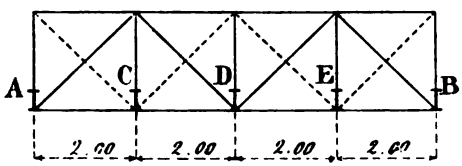


Fig. 243.

Ainsi, pour la poutre à treillis double (*fig.* 243) munie d'entretoises porteuses à chaque nœud A, C, D, E, B, écartées de 2 mètres et chargées par mètre courant de 3 tonnes, les deux systèmes simples auront la répartition des charges suivantes, en ayant soin d'appliquer à chaque système la *moitié* de la charge par mètre courant, soit $1^T,5$, sauf pour les nœuds A et B qui sont sur les appuis :

Digitized by Google

1° *Système en traits forts :*

Nœuds A, B : $\frac{2}{2} \times 3^T = 3$ tonnes ;

Nœud D : $\frac{2+2}{2} \times 1^T,5 = 3$ tonnes.

2° *Système en traits pointillés :*

Nœuds C et E : $\frac{2+2}{2} \times 1^T,5 = 3$ tonnes.

B. *Charges concentrées.* — Si la charge concentrée est placée directement sur l'entretoise, le nœud qui reçoit cette entretoise portera toute la charge.

Mais il arrive fréquemment (c'est le cas des ponts de chemins de fer) que les charges concentrées agissent sur des pièces longitudinales, posées sur les entretoises. Dans ce cas, il y aura lieu de faire une répartition entre les deux nœuds qui comprennent la charge.

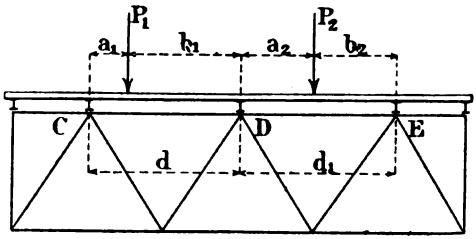


Fig. 244.

Soit la poutre de la figure 244, qui porte aux nœuds C, D, E des entretoises reliées par des pièces longitudinales chargées des poids P_1 et P_2.

On supposera que les pièces CD et DE sont des poutres posées sur deux appuis libres et chargées de poids P_1 et P_2.

La charge au nœud C sera la réaction de gauche due à P_1

Digitized by Google

dans la poutre CD :

$$\frac{P_1 b_1}{a_1 + b_1} = \frac{P_1 b_1}{d}.$$

La *charge au nœud* D se composera :

1° De la réaction de droite de P_1, dans CD :

$$\frac{P_1 a_1}{d};$$

2° De la réaction de gauche de P_2 dans DE :

$$\frac{P_2 b_2}{d_1}.$$

Soit au total :

$$\frac{P_1 a_1}{d} + \frac{P_2 b_2}{d_1}.$$

La charge au nœud E sera :

$$\frac{P_2 a_2}{d_1}.$$

Exemple. — Pour la poutre de la figure 245.

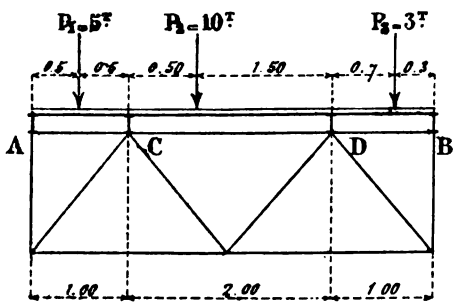


Fig. 245.

Les nœuds A, B, C, D reçoivent l'attache des entretoises, reliées par des longerons AC, CD et DB, qui portent les charges $P_1 = 5$ tonnes, $P_2 = 10$ tonnes et $P_3 = 3$ tonnes.

Digitized by Google

Les charges aux différents nœuds seront :

Nœud C :

$$\text{Réaction de } P_1 = \frac{5^T \times 0,5}{1} = 2^T,5$$

$$\text{Réaction de } P_2 = \frac{10^T \times 1,5}{2} = 7^T,5$$

$$\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10^T,0$$

Nœud D :

$$\text{Réaction de } P_2 = \frac{10^T \times 0,5}{2} = 2^T,5$$

$$\text{Réaction de } P_3 = \frac{3^T \times 0,3}{1} = 0^T,9$$

$$\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3^T,4$$

185. Charges agissant directement sur la poutre et en un point quelconque. — Comme pour les charges indirectes, il peut se produire les trois cas de charges : à la partie supérieure, à celle inférieure, ou bien aux deux à la fois. Généralement, les charges directes agissent seulement sur les membrures.

Afin de ne pas répéter tout ce qui a été dit au n° 184, il ne sera examiné qu'un cas de charge ; les autres devront être traités d'une façon analogue.

A. *Charges uniformément réparties.* — Soit la poutre à treillis simple AB, qui est soumise à l'action d'une charge uniforme de p par mètre courant agissant sur la membrure supérieure (*fig.* 246).

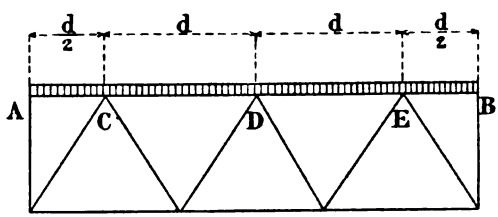


Fig. 246.

Dans cette poutre, il faudra faire la distinction des barres qui ne sont soumises qu'à des efforts de tension ou de com-

Digitized by Google

pression de celles qui, outre ces efforts, subissent de la flexion.

La membrure inférieure et les diagonales se trouvent dans le premier cas et les membrures supérieures dans le deuxième.

Les charges en chaque nœud C, D et E seront pratiquement évaluées comme dans le n° 184, savoir :

Nœuds C et E : $p \times \frac{\frac{d}{2} + d}{2} = p \times \frac{3d}{4}$;

Nœud D : $p \times \frac{d + d}{2} = pd.$

Ces charges serviront à déterminer *les efforts de tension et de compression* qui agissent dans toutes les barres, y compris les membrures supérieures.

Mais, pour ces dernières, il faudra ensuite rechercher les moments fléchissants développés par la charge de p par mètre.

A cet effet, on supposera que la portée des membrures supérieures est celle comprise entre deux nœuds consécutifs, et on les considérera comme des poutres *demi-encastrées* aux appuis (Voir n° 186).

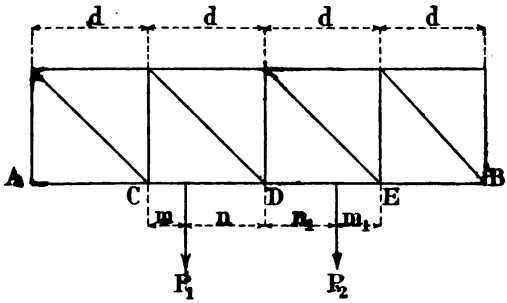


Fig. 247.

B. *Charges concentrées.* — Soit la poutre AB soumise à l'action directe, sur les membrures inférieures, de charges P_1 et P_2 (*fig.* 247).

Digitized by Google

Comme pour les cas précédents, on recherchera les charges en chaque nœud, comme si celles-ci étaient transmises aux nœuds par des entretoises et des longerons, et on tiendra compte ensuite des efforts de flexion développés dans les membrures inférieures par les charges P_1 et P_2, en supposant ces membrures demi-encastrées aux nœuds.

Les charges en C, D et E seraient:

Nœud C : $$P_1 \times \frac{n}{d};$$

Nœud D : $$\frac{P_1 m + P_2 m_1}{d};$$

Nœud E : $$\frac{P_2 \times n_1}{d}.$$

186. Remarque sur les poutres demi-encastrées. — Le calcul des poutres demi-encastrées se fait exactement comme celui relatif aux poutres *complètement* encastrées, mais en prenant comme point de départ la moitié du moment fléchissant sur les appuis.

On en déduit ensuite les moments fléchissants dans le corps de la poutre, ainsi que les efforts tranchants, au moyen des formules relatives aux poutres complètement encastrées.

Ainsi, pour une poutre soumise à une charge uniforme de p par mètre courant, les moments fléchissants sur appuis seront alors :

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{1}{2} \times \frac{pl^2}{12} = -\frac{1}{24} pl^2.$$

Le moment fléchissant au milieu de la portée sera :

$$Mm = +\frac{pl^2}{12}.$$

Pour une poutre avec une charge unique au milieu, les moments fléchissants sur appuis seront :

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{1}{2} \times \frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{16}.$$

Digitized by Google

Le moment fléchissant au milieu de la portée sera :

$$Mm = + \frac{3}{16} Pl.$$

Si les charges sont placées d'une manière quelconque sur la poutre, on pourra toujours évaluer le moment d'encastrement complet. On en prendra la moitié et on en déduira les moments fléchissants et efforts tranchants.

§ 3. — MÉTHODES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER LES EFFORTS DANS LES POUTRES QUELCONQUES A TREILLIS SIMPLE

187. Généralités. — Les efforts de tension et de compression qui agissent dans les barres d'un système articulé défini par les quatre conditions du n° 183, ne sont autres que des forces intérieures qui doivent équilibrer les forces extérieures agissant sur la poutre.

Si l'on fait une section en un point quelconque de cette poutre, et qu'on enlève la partie de gauche, il faudra, pour conserver le système en équilibre, que la résultante des forces intérieures qui agissent dans les barres coupées soit égale et de sens contraire à la résultante des forces extérieures agissant sur la partie de gauche, qui a été supprimée.

Or la résultante de toutes les forces de la partie de gauche n'est autre chose que la force extérieure à la section considérée que l'on sait déterminer en grandeur, en position, direction et sens au moyen des polygones des forces et funiculaire (n° 176), et qu'il suffira d'équilibrer par des forces dirigées suivant les barres coupées.

La force extérieure étant la même entre deux nœuds consécutifs chargés, les efforts seront constants dans les barres situées entre ces deux nœuds.

Trois méthodes sont employées pour la détermination de ces efforts, savoir :

1° Méthode de Culmann ;

2° Méthode de Ritter ;

3° Méthode de Crémona.

Digitized by Google

188. Méthode de Culmann. — Soit un système articulé pour lequel on veut déterminer les efforts dans les barres CE, GF et GE. On fera la section *mn* rencontrant les trois barres en question, et on cherchera pour cette section la force extérieure. Soit T cette force en position, sa grandeur et sa direction étant connues (*fig.* 248).

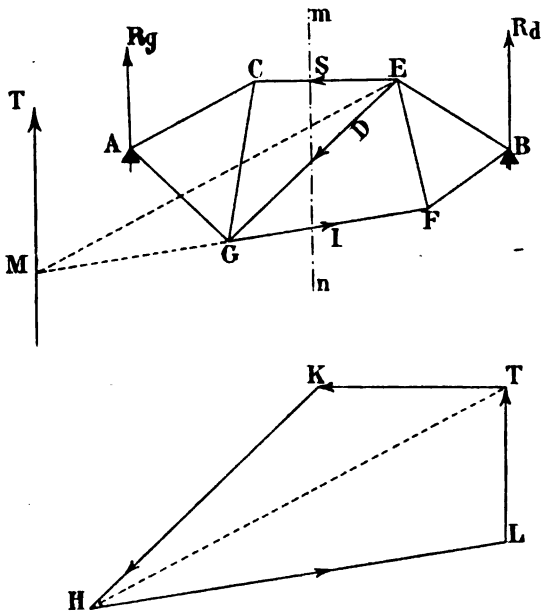


Fig. 248.

Pour équilibrer cette force extérieure par les forces agissant dans les barres coupées, on prolongera l'une des barres, GF par exemple, jusqu'à la rencontre de T au point M, et on joindra ce point M au point de croisement E des deux autres barres coupées.

Ensuite, on décomposera, dans un polygone des forces, la force T, qui est représentée par LT, en deux autres forces suivant la direction de EM et de FG; on décomposera de même la force HT, ainsi obtenue, suivant deux autres forces

Digitized by Google

de direction CE et GE, et on obtiendra ainsi le polygone des forces LTKHL, dans lequel :

TK sera l'effort dans CE,
KH — GE,
HL — GF.

Les forces devant se faire équilibre, le sens de la marche dans le polygone des forces sera celui indiqué par les flèches.

On portera ces flèches sur les barres coupées à droite de la section *mn*, et les efforts dont les flèches se rapprochent de la section donneront des compressions et ceux dont les flèches s'éloignent de cette même section donneront des tensions.

Ainsi, dans l'exemple choisi, CE et GE seraient comprimées, tandis que GF serait tendue.

189. Méthode de Ritter. — Si l'on prend le même système articulé, la section *mn* et la force extérieure T, il suffira, pour déterminer l'effort dans la barre CE, de prendre par rapport au point G les moments des forces qui agissent dans les barres et celui de la force extérieure (*fig.* 249).

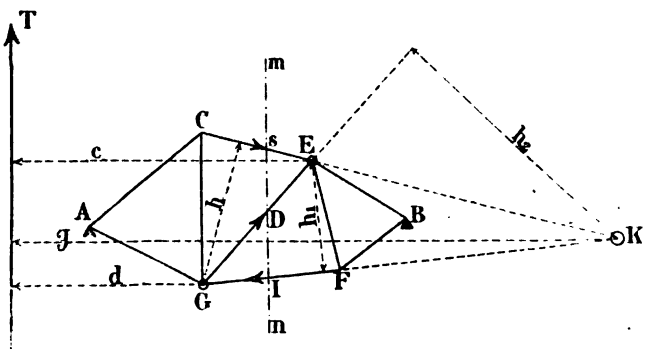


Fig. 249.

Les moments des forces GE et GF, par rapport à ce point G, sont nuls, puisque ces barres passent par le point,

Digitized by Google

et il reste alors comme condition d'équilibre :

$$T \times d = S \times h,$$

d'où :

$$S = \frac{T \times d}{h}.$$

d étant la distance de la force extérieure au point G, et h celle de la membrure supérieure S ou CE au même point G.

Pour déterminer l'effort dans la membrure inférieure I ou GF, on prendra les moments par rapport au point E, et on aura :

$$I = \frac{T \times c}{h_1}.$$

Enfin, pour obtenir l'effort dans la diagonale D, on prolongera les deux autres barres coupées CE et GF jusqu'à leur point de rencontre K, et on prendra les moments par rapport à ce point; on aura alors :

$$D = \frac{T \times g}{h_2}.$$

Pour reconnaître si ces efforts sont des tensions ou des compressions, on munira de flèches les barres coupées; mais, contrairement à la méthode de Culmann, on mettra ces flèches à *gauche* de la section et dans un sens tel qu'elles fassent tourner le bras de levier dans le même sens que celui de la force extérieure T, par rapport au nœud considéré.

Si ces flèches se rapprochent de la section, les efforts seront des compressions et, dans le cas contraire, des tensions.

Dans l'exemple choisi, CE devrait être munie d'une flèche se rapprochant de la section; il en est de même de GE; ce sont donc des compressions. Tandis que GF sera munie d'une flèche s'éloignant de la section, elle sera tendue.

Remarque I. — Les produits $T \times d$ et $T \times c$ ne sont autres que les moments fléchissants aux points G et E. On peut donc formuler le principe suivant, qui est d'un usage constant :

Pour déterminer l'effort dans une membrure quelconque, on

Digitized by Google

divisera le moment fléchissant au nœud opposé à cette membrure par la distance de ce nœud à l'axe neutre de la membrure considérée.

Les moments fléchissants en chaque nœud seront donnés par le tracé d'un polygone funiculaire.

Remarque II. — Il peut arriver que le point de rencontre des deux membrures sorte des limites de l'épure ou que les membrures soient parallèles.

Dans le premier cas, on emploiera la méthode de Culmann pour déterminer l'effort dans la diagonale, et dans le deuxième cas on décomposera la force extérieure GT suivant une parallèle TH à cette diagonale et une parallèle GH aux deux membrures (*fig.* 250).

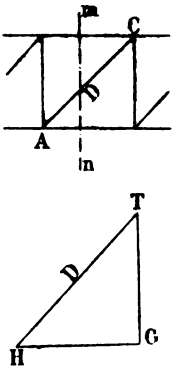


Fig. 250.

190. Méthode de Crémona. — Cette méthode permet de déterminer dans un même polygone des forces les efforts dans toutes les barres.

Soit une poutre AB chargée aux nœuds inférieurs de charges P_1, P_2, P_3. Soient R_A et R_B les réactions des appuis dues aux charges qui agissent en ces nœuds, non compris ceux des appuis, et que l'on déterminera par un procédé quelconque (*fig.* 251).

On portera sur une droite parallèle à la direction des forces les charges à la suite les unes des autres, telles qu'on les rencontre en faisant le tour de la poutre, mais avec leur sens.

Ainsi on portera d'abord de *a* en *b* : R_A, puis P_1 de *b* en *c*, P_2 de *c* en *d*, P_3 de *d* en *e*, et finalement R_B de *e* en *a*.

R_B doit forcément finir en *a*, puisque les réactions sont égales et de signe contraire à la somme des charges.

On équilibrera ensuite la première force R_A qui agit au nœud A par les efforts qui agissent dans les deux barres AF et AC aboutissant à ce nœud, en menant par les points *a* et *b* des parallèles à AF et à AC :

ba_1 donnera l'effort 1

Digitized by Google

et

aa_1 donnera l'effort 2.

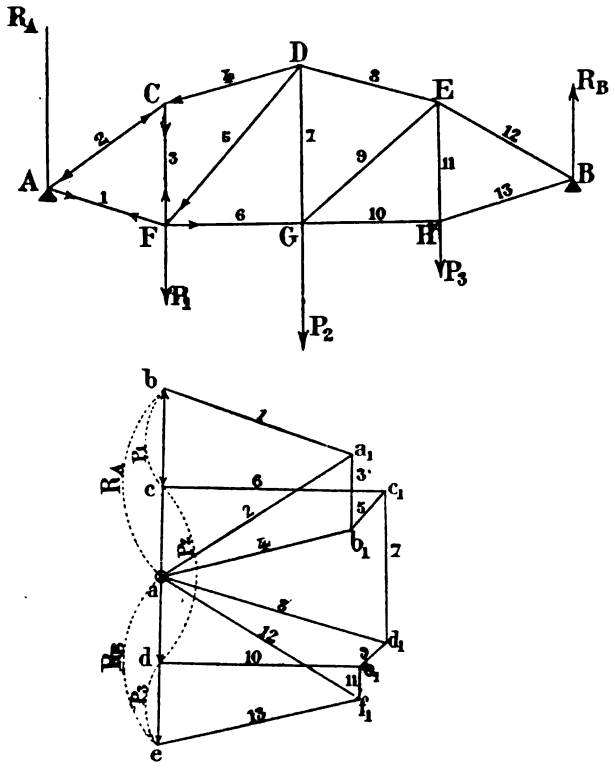


Fig. 251.

On passera ensuite au nœud C, où l'effort 2 est connu et les deux autres 3 et 4 inconnus. On équilibrera aa_1, qui est l'effort 2, par les efforts 3 et 4, en menant a_1b_1 parallèle à FC et ab_1 parallèle à CD :

a_1b_1 donnera l'effort 3,
ab_1 — — 4.

Digitized by Google

Le nœud à considérer ensuite est F, où cinq efforts aboutissent :

1, 3 et P_1, qui sont connus ; 5 et 6, inconnus.

On équilibrera donc 1, 3 et P_1 par les efforts 5 et 6, et à cet effet on mènera des points b_1 et c, extrémités du polygone des trois forces 1, 3 et P_1, des parallèles à FD et à FG ; soient cc_1 parallèle à FG et b_1c_1 parallèle à FD :

cc_1 donnera l'effort 6,
b_1c_1 — — 5.

On passera ensuite au nœud D, où deux forces seulement sont inconnues, 7 et 8, les deux autres forces 4 et 5, y aboutissant, étant connues.

On mènera de c_1 et a, extrémités du polygone des deux forces 4 et 5, des parallèles à DG et DE, et on obtiendra le point d_1 :

ad_1 donnera l'effort 8,
c_1d_1 — — 7.

On continuerait de même pour les nœuds G, E, H, et on obtiendrait successivement les points e_1, f_1 et e.

e_1f_1 donnerait l'effort 11,
af_1 — — 12,
ef_1 — — 13.

Les charges et les réactions se faisant équilibre, le polygone des forces doit être fermé, c'est-à-dire que la dernière barre 13 doit aboutir au point e.

Pour fixer les tensions et les compressions, on emploie le procédé suivant :

Au nœud A, par exemple, trois efforts aboutissent : la réaction R_A et les deux forces 1 et 2.

Ces trois forces se faisant équilibre, leur polygone doit être fermé, le sens de la marche sera donc continu et ira du point a aux points b et a_1 pour revenir en a.

Si l'on munit, dans le diagramme de la poutre, les barres correspondantes de flèches ayant même sens que celui du polygone des forces, on obtiendra celles qui sont indiquées sur ce diagramme.

Digitized by Google

Les flèches qui se rapprochent du nœud A indiquent des compressions et celles qui s'éloignent de ce même nœud, des tensions.

AC est comprimée.
AF est tendue.

Au nœud F, en partant de la direction de P_1 qui agit de haut en bas dans le polygone des forces, on obtiendrait le sens de la marche de b en c, c_1, b_1, a_1, b, et on munirait les barres des flèches indiquées.

1, 3, 6, qui s'éloignent du nœud F, sont tendues.
5, qui s'en rapproche, est comprimée.

Au nœud C, où il n'y a pas d'indication de direction de charge, on se servira des efforts 3 et 2 précédemment déterminés.

3 est tendue, la flèche doit être dirigée à ce nœud de C vers F et, 2 étant comprimée, la flèche doit être dirigée de A vers C.

Dans le polygone des forces, en partant de a et en marchant dans le sens de la flèche 2, c'est-à-dire de a vers a_1, ensuite de a_1 vers b_1, sens de la flèche de 3, on fermera le polygone en allant de b_1 vers a, qui donnera le sens de la flèche de 4, flèche dirigée de D vers C ; la barre 4 est donc comprimée.

On procéderait de la même façon pour les autres nœuds.

Remarque. — On peut formuler les règles suivantes qui aideront à faire un tracé rapide :

1° Les membrures non chargées partent toutes d'un même point qui est l'origine d'une des réactions ;

2° Les membrures chargées découpent dans le polygone des forces des segments égaux aux charges ;

3° Les diagonales et les montants, s'il y en a, forment un tracé continu qui part du point de rencontre des deux premières barres aboutissant à un appui et qui se termine au point de rencontre des deux dernières barres aboutissant à l'autre appui ;

4° Pour une poutre sur deux appuis libres et pour des

Digitized by Google

charges dirigées de haut en bas, les membrures supérieures sont toujours comprimées et les membrures inférieures toujours tendues;

5° Quand on a déterminé le sens de l'effort dans la première diagonale ou le premier montant, toutes les autres diagonales ou montants, qui ont même direction que cette première barre dans le polygone des forces, auront même genre d'effort, et les barres dont la direction sera inverse auront un effort en sens contraire. Ainsi, dans l'exemple choisi, il suffira donc, après avoir déterminé le genre d'effort du montant 3, qui est une tension et qui va de a_1 vers b_1 dans le tracé, de suivre le polygone $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, et on trouvera que les efforts 7, 9, 11, qui ont même direction de haut en bas que 3, sont des tensions et que 5, qui est dirigé de bas en haut, est comprimé.

191. Comparaison des trois méthodes. — Le tracé de *Crémona* s'emploie souvent dans le cas où les charges qui agissent sur la poutre sont fixes. Ce tracé donne alors dans une seule opération les efforts dans toutes les barres. Toutefois le tracé de Crémona est assez délicat à effectuer, surtout s'il y a un grand nombre de barres.

Si les charges sont variables, la méthode de Crémona est beaucoup trop longue, car il faut faire un tracé pour chaque position de la charge.

On emploie alors soit la méthode de *Culmann*, soit celle de *Ritter*.

Ces deux méthodes nécessitent non seulement le tracé d'un polygone funiculaire, mais la recherche de la position de la force extérieure à chaque section considérée.

Celle de Culmann oblige ensuite l'opérateur à construire pour chaque section un polygone des forces pour déterminer les efforts dans les barres coupées et, si la quantité de sections est grande, il peut y avoir confusion dans les épures, par suite du grand nombre de polygones à construire.

Tandis que celle de Ritter permet, après le tracé du polygone funiculaire, de déterminer, par le calcul, les efforts dans les membrures. Toutefois la détermination des efforts,

Digitized by Google

dans les diagonales ou les montants, nécessite également la recherche de la position de la force extérieure, mais le calcul donne ensuite ces efforts.

En résumé, pour une poutre à *treillis quelconque*, on emploiera les méthodes suivantes :

Charges fixes : Méthode de Crémona.

Charges variables : Méthode de Ritter pour les membrures; pour les diagonales, la méthode de Culmann.

§ 4. — POSITION DES CHARGES VARIABLES QUI DONNENT LES EFFORTS MAXIMA

192. Efforts dans les membrures. — Pour une membrure quelconque, l'effort maximum est obtenu lorsque le moment fléchissant au nœud opposé à la membrure considérée est maximum.

Pour les *charges uniformément réparties*, il suffira de charger complètement la poutre (n° 129). On déterminera ainsi, en chaque nœud chargé, le moment fléchissant maximum.

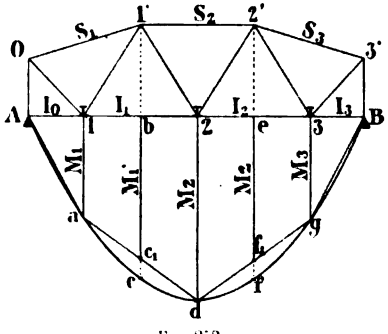


Fig. 252.

Si la transmission des charges se fait par l'intermédiaire d'entretoises porteuses, comme c'est généralement le cas, il y a lieu d'examiner comment les moments fléchissants doivent être répartis aux différents nœuds.

Pour un système en V avec entretoises porteuses à la partie inférieure (*fig.* 252), si A*d*B est la parabole représentative des moments fléchissants pour une *charge directe*, les moments fléchissants à considérer seront les suivants :

Nœuds inférieurs 1, 2 et 3 :

$$M_1 = a.1, \quad M_2 = d.2 \text{ et } M_3 = g.3.$$

Digitized by Google

Nœuds supérieurs 1′ et 2′ :

$$M_{1'} = b.c_1 \text{ et } M_{2'} = e.f_1.$$

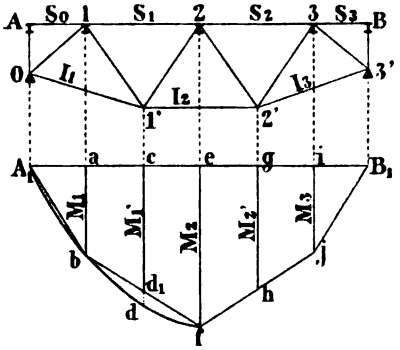


Fig. 253.

Si, au contraire, le système simple en V avait les entretoises porteuses à la partie supérieure (*fig.* 253), les moments fléchissants à considérer seraient les suivants :

Nœuds supérieurs 1, 2, 3 :

$$M_1 = a.b, \qquad M_2 = e.f \qquad \text{et} \qquad M_3 = i.j.$$

Nœuds inférieurs 1′ et 2′ :

$$M_{1'} = c.d_1 \qquad \text{et} \qquad M_{2'} = g.h.$$

Lorsque la poutre est du système en N, c'est-à-dire avec diagonales et montants (*fig.* 254), les moments aux nœuds inférieurs et supérieurs, quelle que soit la position des entretoises, seront les mêmes. Ainsi, pour les nœuds 1 et 2, le moment fléchissant à considérer sera M_1 ; pour les nœuds 5 et 5′, le moment fléchissant sera M_5.

Pour les *charges concentrées*, le tracé de Weyrauch (n° 180) donnera, pour chaque nœud chargé, le moment fléchissant maximum.

Digitized by Google

Si la transmission des charges se fait par l'intermédiaire d'entretoises porteuses, il y a lieu de fixer quel sera le moment fléchissant maximum pour un nœud dépourvu d'entretoise.

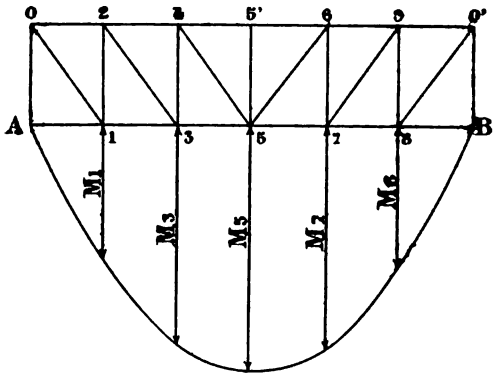


Fig. 254.

Ainsi soit une poutre à treillis du système en V qui porte les charges à la partie inférieure par l'intermédiaire d'entretoises (*fig.* 255).

On déterminera les moments fléchissants maxima aux nœuds inférieurs 1, 2 et 3, qui seront représentés par les ordonnées *a*.1, *d*.2 et *g*.3, par exemple. Il est à remarquer que la position des charges qui les produisent est différente pour chaque nœud et, dans ces conditions, le moment fléchissant maximum au nœud 1 ne se produira pas en même temps que celui déterminé au nœud 2.

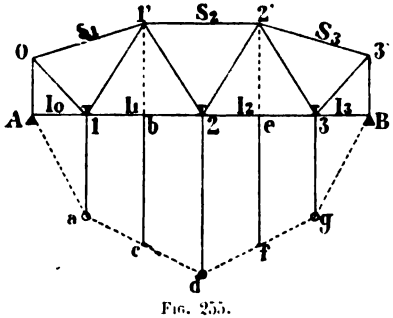


Fig. 255.

Il y aurait donc lieu de rechercher quelle serait la position

Digitized by Google

des charges qui développerait au nœud 1', par exemple, le plus grand moment fléchissant et qui dépend, naturellement, des moments fléchissants déterminés en même temps aux nœuds 1 et 2.

Cette recherche serait laborieuse et, dans la pratique, on se contente de prendre comme valeur du moment fléchissant maximum pour ce nœud 1' l'ordonnée *b.c*, sur la verticale de ce nœud, le point *c* étant situé sur la droite *a.d* qui réunit les extrémités des ordonnées représentant les moments fléchissants maxima aux deux nœuds chargés 1 et 2.

Pour le nœud 2', l'ordonnée à considérer serait *e.f*.

Si les entretoises se trouvaient à la partie supérieure, on déterminerait d'abord par le tracé de Weyrauch les moments fléchissants maxima correspondants aux nœuds supérieurs ; ceux des nœuds non munis d'entretoises seraient donnés par les verticales de ces nœuds arrêtées aux droites qui réunissent les extrémités des ordonnées relatives aux nœuds chargés par l'intermédiaire des entretoises.

La valeur des moments fléchissants obtenue ainsi pour les nœuds non chargés est légèrement supérieure à la valeur réelle.

Si la poutre est du système en N avec montants et diagonales, la valeur du moment fléchissant maximum est la même pour les deux nœuds situés sur le même montant.

193. Efforts dans les diagonales et les montants. — A. *Diagonales seules.* — L'effort maximum dans une diagonale est obtenu lorsque l'effort tranchant dans la section qui coupe la diagonale considérée est maximum.

Pour une même section, il se produit deux efforts tranchants maxima, l'un positif et l'autre négatif, suivant que l'on charge à droite de la section ou à gauche. Il faudra donc, suivant les cas, rechercher le plus grand en valeur absolue, ou bien le plus grand qui donne dans la diagonale un effort de sens donné.

Cet effort tranchant maximum devrait être déterminé par les méthodes exposées pour les poutres recevant des charges variables et indirectes, savoir :

Digitized by Google

Charge uniformément répartie (n° 138-A). — Recherche des points K et chargement successif de ces points jusqu'à un des appuis.

Charges concentrées formant convoi (n° 138-C). — Recherche de la charge qui doit être placée sur le nœud ou l'entretoise limitant le panneau considéré.

Dans la pratique et pour des petites portées, on se contente, pour la *charge uniforme*, de charger la poutre jusqu'à un des nœuds limitant le panneau, et, pour les *charges concentrées*, d'amener le premier essieu sur un de ces nœuds, à moins toutefois que la différence de poids ne soit trop grande entre le premier et le deuxième essieu, auquel cas il y aurait lieu d'en tenir compte.

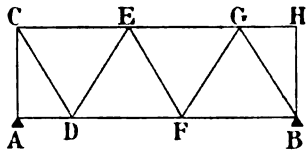


Fig. 256.

Les diagonales se divisent en deux catégories (*fig.* 256) :

1° Celles qui montent à gauche, comme DC, FE, BG;

2° Celles qui montent à droite, comme DE, FG.

La position des charges qui donne l'effort maximum varie suivant que les nœuds de la membrure supérieure ou ceux de la membrure inférieure sont chargés.

1° Diagonales qui montent a gauche. — *Nœuds supérieurs chargés.* — La charge devra s'étendre pour l'un des efforts maxima de l'appui de gauche au nœud supérieur où aboutit la diagonale considérée, et pour l'autre effort maximum de signe contraire, de l'appui de droite jusqu'au nœud supérieur où aboutit la diagonale suivante. Ainsi, pour la diagonale FE, on chargera d'abord de C en E, et ensuite de H en G.

Nœuds inférieurs chargés. — La charge devra s'étendre, d'une part, de l'appui de droite au nœud inférieur où aboutit la diagonale considérée, et, d'autre part, de l'appui de gauche jusqu'au nœud inférieur où aboutit la diagonale précédente.

Ainsi, pour la diagonale FE, on chargera d'abord de B en F et ensuite de A en D.

2° Diagonales qui montent a droite. — Par analogie avec qui précède :

Digitized by Google

Nœuds supérieurs chargés. — On chargera de l'appui de droite au nœud supérieur où aboutit la diagonale considérée et ensuite de l'appui de gauche jusqu'au nœud supérieur où aboutit la diagonale précédente.

Ainsi, pour la diagonale FG, on chargera d'abord de H en G et ensuite de C en E.

Nœuds inférieurs chargés. — On chargera de l'appui de gauche au nœud inférieur où aboutit la diagonale considérée et ensuite de l'appui de droite jusqu'au nœud inférieur où aboutit la diagonale suivante.

Pour FG, on chargera d'abord de A en F et ensuite de B en B, c'est-à-dire sans charge.

B. *Montants et diagonales.* — Un montant doit être considéré comme une diagonale.

Le montant sera considéré comme diagonale montant à gauche si la diagonale qui aboutit au même nœud que ce montant monte à droite (Exemple, *fig.* 257 *a*).

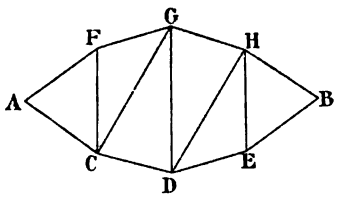


Fig. 257 *a*.

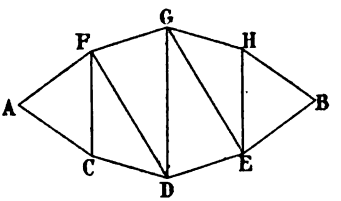


Fig. 257 *b*.

Il sera considéré comme diagonale montant à droite si la diagonale qui aboutit au même nœud que ce montant monte à gauche (Exemple, *fig.* 257 *b*).

Avec ces désignations, on appliquera, suivant le cas, les indications données ci-dessus pour les diagonales seules (A).

§ 5. — MÉTHODES POUR LES POUTRES DROITES A TREILLIS

194. Détermination des efforts. — Si la poutre est droite, les membrures supérieures et inférieures sont parallèles, et les efforts dans les diagonales ou les montants, s'il y en a,

Digitized by Google

pourront être déterminés directement en décomposant la *force extérieure* à une section, suivant la direction de la diagonale considérée et une parallèle à la direction des membrures (n° 189, remarque II). La force extérieure et l'effort tranchant dans une section ayant même valeur en grandeur, direction et sens, il suffira donc de décomposer dans chaque section considérée l'effort tranchant maximum.

Les efforts dans les membrures seront déterminés par les moments fléchissants maxima en employant la méthode de Ritter.

195. Répartition des moments fléchissants aux nœuds des poutres droites à treillis. — Comme pour les poutres à treillis quelconque (IV-192), la répartition des moments fléchissants doit être faite en tenant compte des nœuds chargés et non chargés, soit pour une charge uniformément répartie, soit pour des charges concentrées formant convoi.

Si la poutre est du système à treillis double, une distinction est à faire pour le choix du moment fléchissant.

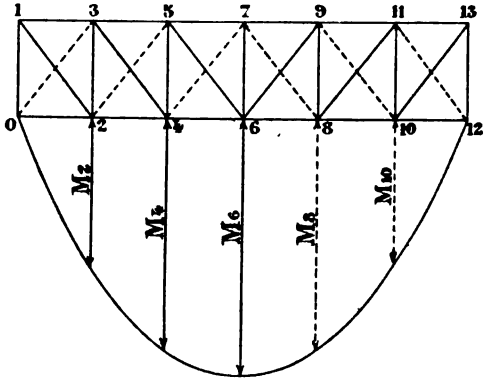


Fig. 258.

L'ordonnée à choisir pour une membrure quelconque doit être égale à la *moyenne* des deux ordonnées aux nœuds qui limitent cette membrure.

Ainsi, pour la membrure 1-3 de la poutre (*fig.* 258), l'or-

Digitized by Google

donnée pour le système en traits pleins serait $\frac{1}{2} M_2$, tandis que celle pour le système en traits pointillés serait nulle. Soit alors :

$$\frac{1}{2} M_2 + 0 = \frac{1}{2} M_2.$$

Pour la membrure inférieure 0-2, l'ordonnée moyenne aurait même valeur que celle de la membrure supérieure 1-3.

Pour une membrure courante 4-6 ou 5-7, l'ordonnée aurait pour valeur :

Pour un système, $\frac{1}{2} M_4$,

et pour l'autre, $\frac{1}{2} M_6$.

Soit donc un total de :

$$\frac{1}{2} M_4 + \frac{1}{2} M_6 = \frac{M_4 + M_6}{2},$$

ce qui correspond bien à la moyenne des ordonnées des moments fléchissants aux nœuds 4 et 6.

Cette répartition des moments fléchissants a une très grande importance pour la recherche des efforts dans les membrures d'une poutre à treillis double.

§ 6. — RÉSUMÉ DES OPÉRATIONS A EFFECTUER POUR DÉTERMINER LES EFFORTS MAXIMA DANS LES POUTRES A TREILLIS, ET APPLICATIONS

A. — Charges fixes

196. Tracé de Crémona. — Soit la poutre (*fig.* 259) à treillis simple en V, d'une portée l et soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de p par mètre courant à sa partie inférieure.

On tracera le dessin de cette poutre à l'échelle convenue pour les longueurs.

Digitized by Google

On déterminera la charge appliquée en chaque nœud inférieur C, D, E.

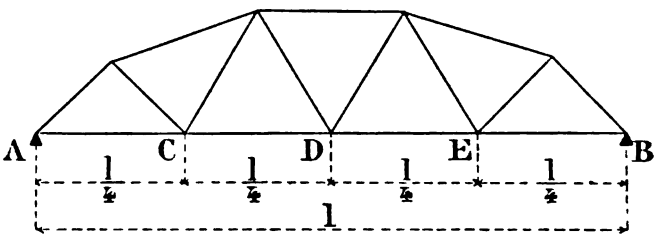


Fig. 259.

Si les distances entre ces nœuds sont les mêmes et égales à $\frac{l}{4}$ par exemple, cette charge sera :

$$\frac{l}{4} \times p = \frac{pl}{4}.$$

Aux appuis, les charges sur les nœuds qui n'entrent pas dans le calcul de la poutre sont :

$$p \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} = p\frac{l}{8}.$$

On procédera ensuite à un tracé de Crémona, comme il a été indiqué n° 190.

Remarque. — Pour une poutre d'un pareil système, symétrique par rapport au milieu de la portée et chargé symétriquement :

Les membrures supérieures sont toujours comprimées ;

Les membrures inférieures, toujours tendues ;

Les diagonales qui montent à gauche dans la première moitié de la poutre, et celles qui montent à droite dans la seconde moitié, sont toujours tendues ;

Les autres sont toujours comprimées.

196 *a*. Application à une poutre de 12 mètres de portée, définie par la figure 260 et soumise à une charge uniformé-

Digitized by Google

ment répartie de 2 tonnes par mètre courant à la partie inférieure. — On munira toutes les barres d'un numéro d'ordre placé en indice à côté de la lettre désignant la pièce.

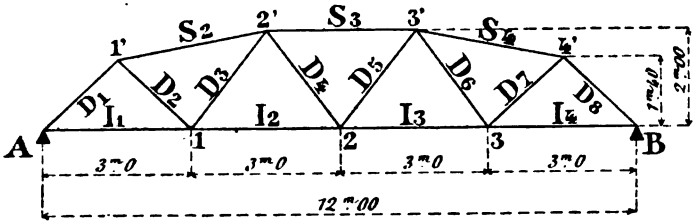


Fig. 260.

Charge en chaque nœud. — L'écartement des nœuds inférieurs étant de 3 mètres, toutes les charges seront égales et auront pour valeur :

Nœuds :

$$1, 2 \text{ et } 3 = 2^{T} \times 3^{m} = 6 \text{ tonnes.}$$

Réactions des charges appliquées aux nœuds. — Les charges étant placées symétriquement par rapport au milieu de la portée, les réactions ou efforts tranchants sur appuis seront égaux à :

$$T_g = T_d = 6^{T} + \frac{6^{T}}{2} = 9 \text{ tonnes.}$$

Tracé de Crémona. — L'échelle des efforts adoptée est de 1 centimètre pour 2 tonnes. On portera (*fig.* 261) sur une verticale à partir du point *a* et de bas en haut la réaction de gauche $T_g = 9$ tonnes, soit à l'échelle des forces :

$$ab = \frac{9^{T}}{2^{T}} = 4^{cm},5.$$

Ensuite on portera à partir de ce point *b*, à la suite les unes des autres, et de haut en bas, les charges aux nœuds 1, 2 et 3 qui sont égales à 6 tonnes, soit à l'échelle des

Digitized by Google

forces :

$$bc = cd = de = \frac{6^T}{2^T} = 3 \text{ centimètres.}$$

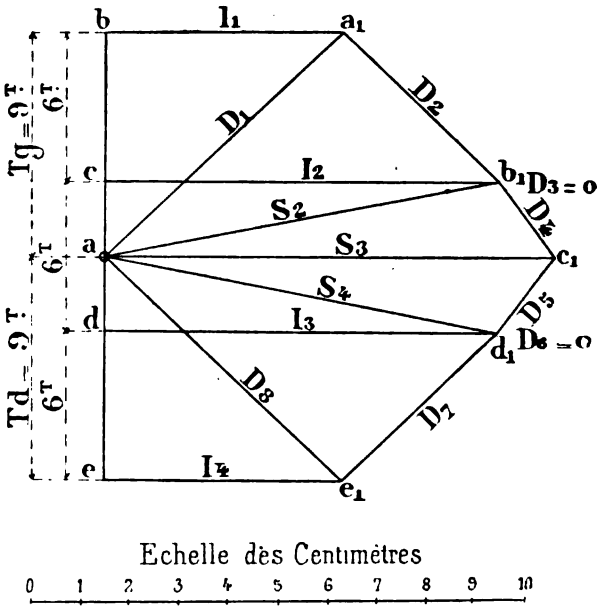


Fig. 261.

Enfin, du point c, et de bas en haut, la réaction de droite $T_d = 9$ tonnes, soit à l'échelle des forces :

$$ca = \frac{9^T}{2^T} = 4^{cm},5.$$

L'extrémité de T_d doit tomber forcément au point a.

Ceci fait, d'après la remarque II du n° 184, toutes les membrures supérieures partiront du point a, les membrures inférieures qui sont chargées découperont sur be des segments égaux aux charges.

On mènera donc par a une parallèle à S_1, ici D_1, et par b une

Digitized by Google

parallèle à I_1, ce qui déterminera les deux efforts D_1 et I_1 :

$$D_1 = 6^{cm},5 \times 2^T = 13 \text{ tonnes (compression)},$$
$$I_1 = 4^{cm},8 \times 2^T = 9^T,6 \text{ (tension)}.$$

Ensuite on passera au nœud 1′ et, du point a_1, on mènera une parallèle à D_2, et de a une parallèle à S_2, ce qui déterminera les efforts D_2 et S_2.

$$D_2 = 4^{cm},4 \times 2^T = 8^T,8 \text{ (tension)},$$
$$S_2 = 8^{cm},1 \times 2^T = 16^T,2 \text{ (compression)}.$$

On passera ensuite au nœud 1 et, par le point b_1, on mènera une parallèle à D_3, et par c une parallèle à I_2 ; on aura ainsi les deux efforts D_3 et I_2 :

$$D_3 = 0 \text{ (compression)},$$
$$I_2 = 8^{cm} \times 2^T = 16 \text{ tonnes (tension)}.$$

Enfin, pour terminer la première moitié de la poutre, on passera au nœud 2′ et on mènera de b_1 une parallèle à D_4 et de a une parallèle à S_3 ; on obtiendra les deux efforts :

$$D_4 = 1^{cm},9 \times 2^T = 3^T,8 \text{ (tension)},$$
$$S_3 = 9^{cm},1 \times 2^T = 18^T,2 \text{ (compression)}.$$

On continuera ainsi pour toutes les barres et, comme vérification du tracé, le polygone devra se fermer au point a.

Pour la deuxième moitié de la poutre qui est symétrique et chargée symétriquement à la première moitié, les efforts seront les mêmes que dans cette première moitié.

197. Méthode de Ritter pour une poutre droite du système de treillis en V. — Soit la poutre droite définie dans la figure 262, de portée l et soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de p au mètre courant à la partie inférieure.

Membrures. — Pour déterminer les efforts dans les membrures, on tracera la ligne représentative des moments

Digitized by Google

fléchissants. On sait que c'est une parabole qui passe par les appuis et qui a son maximum au milieu de la portée. Ce maximum est :

$$M_m = \frac{pl^2}{8}.$$

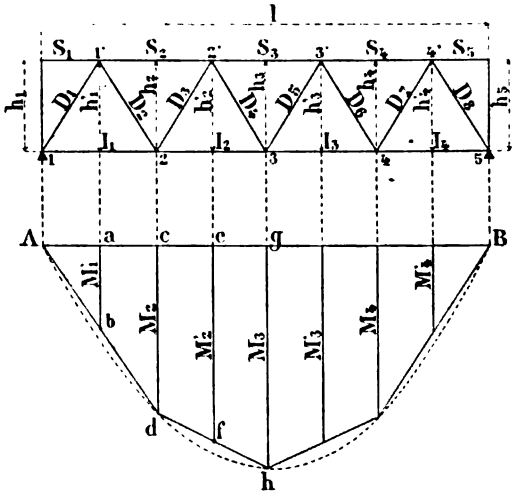


Fig. 262.

Cette parabole, tracée à une échelle convenue, donnera les moments fléchissants aux différents nœuds de la poutre. Soient M_2, M_3, M_4, les moments fléchissants aux nœuds inférieurs chargés, et M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, ceux aux nœuds supérieurs non chargés.

Ces derniers devront être pris comme il est indiqué aux nos 192 et 195. Ainsi, au nœud 1', l'ordonnée du moment fléchissant sera : *ab* ;

Au nœud 2 : *cd* ; au nœud 2' : *ef* ; etc.

La hauteur entre les centres de gravité des différentes membrures étant une des données de la poutre, on pourra déterminer les efforts dans ces membrures par les rela-

Digitized by Google

tions :

$$S_1 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{0}{h_1} = 0,$$

$$S_2 = \frac{M_2}{h_2}. \qquad S_3 = \frac{M_3}{h_3}. \qquad S_4 = \frac{M_4}{h_4}.$$

$$S_5 = \frac{M_5}{h_5} = \frac{0}{h_5} = 0,$$

$$I_1 = \frac{M'_1}{h'_1}. \qquad I_2 = \frac{M'_2}{h'_2}. \qquad I_3 = \frac{M'_3}{h'_3}. \qquad I_4 = \frac{M'_4}{h'_4}.$$

Pour des charges fixes, les membrures supérieures sont comprimées et les membrures inférieures tendues.

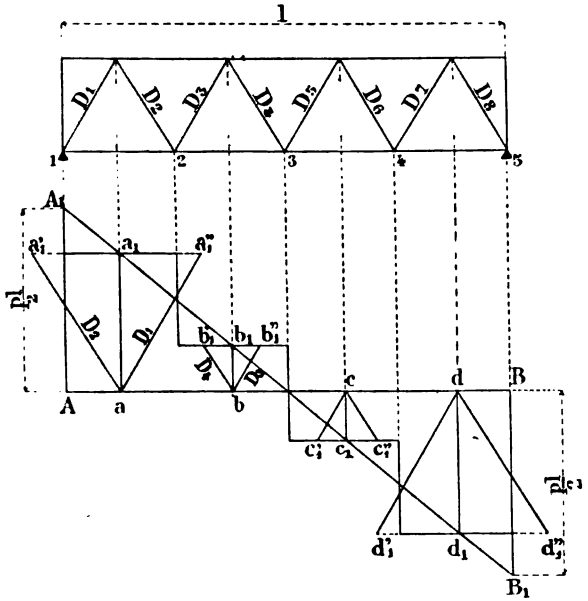


Fig. 263.

Diagonales. — Pour déterminer les efforts dans les diagonales, on tracera la ligne représentative des efforts tranchants, comme si la charge était indirecte, en considérant

Digitized by Google

les nœuds chargés comme points d'application de poutrelles.

On a vu (n° 125) que cette ligne se détermine en traçant d'abord la droite A_1B_1, qui donne les efforts tranchants dans le cas d'une charge directe et qui découpe sur les verticales des appuis des segments égaux à $\pm \frac{pl}{2}$ (*fig.* 263).

On mène ensuite, par le milieu des intervalles des poutrelles, les verticales qui rencontrent la droite A_1B_1 en des points qui limitent les ordonnées de l'effort tranchant.

Cet effort tranchant est constant dans chaque intervalle.

Dans le cas présent, les points d'attache des poutrelles seraient les nœuds chargés 1, 2, 3, 4, 5; les verticales seraient à mener par le milieu des intervalles 1-2, 2-3, 3-4, 4-5; enfin les nœuds supérieurs, et les ordonnées des efforts tranchants dans chaque intervalle, seraient : aa_1, bb_1, cc_1, dd_1.

Les efforts dans les diagonales s'obtiendront alors en menant, par les points a, b, c, d, des parallèles aux diagonales jusqu'à la rencontre d'une horizontale issue des points a_1, b_1, c_1 et d_1.

On aura ainsi :

aa''_1	parallèle à	D_1
aa'_1	—	D_2
bb''_1	—	D_3
bb'_1	—	D_4
cc'_1	—	D_5
cc''_1	—	D_6

et ainsi de suite.

Ces longueurs, relevées à l'échelle des efforts, donneront les tensions ou compressions dans les diagonales correspondantes.

Le sens des efforts est déterminé par la règle suivante, qui dépend du sens de l'effort tranchant.

Diagonales qui montent à gauche.	Compression. — Effort tranchant négatif. Tension. — Effort tranchant positif.
Diagonales qui montent à droite.	Compression. — Effort tranchant positif. Tension. — Effort tranchant négatif.

Digitized by Google

198. Treillis simple en N. — Si la poutre était du système en treillis simple en N avec diagonales et montants, la détermination des efforts dans les membrures se ferait d'une façon analogue ; les moments fléchissants à considérer seraient les mêmes pour les deux nœuds situés sur le même montant.

Les efforts tranchants entre chaque nœud chargé seraient également déterminés de la même façon que ceux d'une poutre en V, et les efforts dans les diagonales seraient obtenus en menant des parallèles à ces diagonales. Les efforts dans les montants ont même valeur que les efforts tranchants.

Ainsi, pour le panneau 4.5 (*fig.* 264), il suffira de mener par c_1 une parallèle c_1c_1' à 5.4' pour avoir l'effort dans cette diagonale.

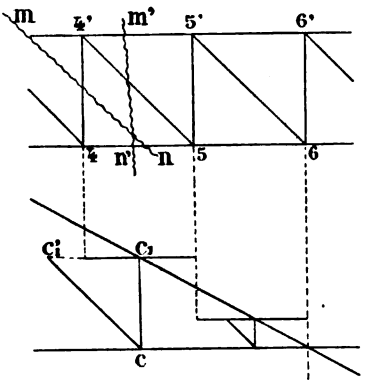


Fig. 264.

L'ordonnée cc_1 donnerait immédiatement l'effort dans le montant 4.4', car on a supposé la section *mn* dans la poutre, la seule qui rencontre le montant (Définition du système simple, n° 182) et pour laquelle l'effort tranchant ou la force extérieure est donnée par cc_1.

Le sens des efforts dans les diagonales et les montants est donné par la règle du n° 193, en remarquant, toutefois, que le montant doit être considéré comme une diagonale montant à droite, si la diagonale qui aboutit au même nœud inférieur monte à gauche et réciproquement.

199. Treillis double. — Si la poutre est du système en treillis double, la recherche des moments fléchissants en chaque nœud pour la détermination des efforts dans les membrures se ferait suivant les indications du n° 195, c'est-à-dire qu'on prendrait pour chaque membrure la moyenne des moments

Digitized by Google

fléchissants produits aux deux nœuds qui limitent la membrure considérée.

Les efforts dans les montants sont nuls si les membrures sont parallèles.

Les efforts dans les diagonales s'obtiennent dans la pratique en décomposant, comme précédemment, les ordonnées des efforts tranchants, situés au milieu des panneaux, suivant la direction des deux diagonales et en affectant à chacune de ces diagonales la moitié de l'effort obtenu, car on suppose que la répartition entre les deux barres se fait également.

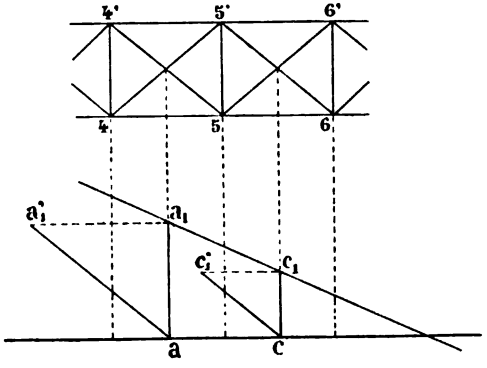


Fig. 265.

Ainsi, pour le panneau 4.5 de la figure 265, l'ordonnée de l'effort tranchant serait aa_1, la décomposition suivant des parallèles à 4.5' et 4'.5 donnerait la même valeur aa'_1.

Les efforts réels dans les barres seraient alors :

$$\frac{aa'_1}{2}.$$

et, pour le panneau 5.6, l'effort serait $\frac{cc'_1}{2}$.

Si les membrures n'étaient pas parallèles, il faudrait décomposer la poutre en deux systèmes, et déterminer les efforts par deux tracés de Crémona en appliquant à chaque système la moitié des charges.

Digitized by Google

Le sens des efforts dans les diagonales sera donné par la règle du n° 193.

200. Application à une poutre droite à treillis double de 12 mètres de portée divisée en panneaux de 2 mètres et soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de 5 tonnes par mètre courant. — On supposera la hauteur de la poutre constante (distance entre les centres de gravité des membrures) et égale à 2 mètres (*fig.* 266).

Échelles adoptées :

Longueurs	1 centim.	pour 2 mètres.
Efforts.....	1 centim.	— 10 tonnes.
Moments fléchissants.	1 centim.	— 40 tonnes-mètres.

Efforts dans les membrures. — Les moments fléchissants seront représentés par une parabole dont la flèche maxima a pour valeur :

$$M_m = \frac{pl^2}{8} = \frac{5^T \times \overline{12}^2}{8} = 90 \text{ tonnes-mètres},$$

soit à l'échelle des moments une longueur de :

$$\frac{90^{Tm}}{40^{Tm}} = 2^{cm},25.$$

La parabole n'a pas besoin d'être tracée complètement; il suffit d'en déterminer les points situés sur les verticales des nœuds par le procédé du n° 110.

Les ordonnées de ces points donnent les moments fléchissants aux nœuds de la poutre.

On obtiendra la valeur des efforts dans les membrures en divisant la moyenne des moments fléchissants aux nœuds qui limitent les membrures par la hauteur entre les membrures.

La hauteur étant constante, les efforts des deux membrures d'un même panneau seront les mêmes; celle supérieure sera comprimée, et celle inférieure tendue.

Digitized by Google

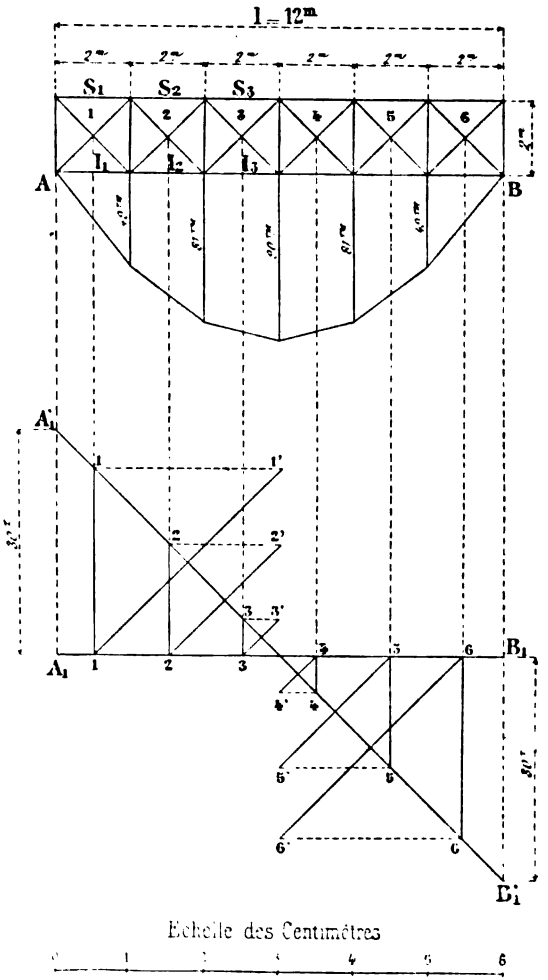


Fig. 266.

Digitized by Google

D'après l'épure des moments, on aurait alors :

$$S_1 = -\frac{49^{Tm}}{2} \times \frac{1}{2^m} = -12^{Tm},25, \qquad I_1 = +12^{Tm},25,$$

$$S_2 = -\frac{81^{Tm} + 49^{Tm}}{2} \times \frac{1}{2^m} = -32^{Tm},5, \qquad I_2 = +32^{Tm},5,$$

$$S_3 = -\frac{90^{Tm} + 81^{Tm}}{2} \times \frac{1}{2^m} = -42^{Tm},75, \qquad I_3 = +42^{Tm},75.$$

Par raison de symétrie, les autres membrures subiront les mêmes efforts que les premières.

Le signe — indique une compression ;

Le signe + indique une tension.

Efforts dans les diagonales. — La ligne représentative des efforts tranchants, pour la charge directe, serait la droite $A'_1B'_1$ pour laquelle :

$$A_1A'_1 = +\frac{pl}{2} = \frac{5^T \times 12^m}{2} = 30 \text{ tonnes},$$

soit à l'échelle :

$$\frac{30^T}{10^T} = 3 \text{ centimètres.}$$

$$B_1B'_1 = -\frac{pl}{2} = -\frac{5^T \times 12^m}{2} = -30 \text{ tonnes},$$

soit à l'échelle :

$$\frac{30^T}{10^T} = 3 \text{ centimètres.}$$

L'ordonnée de l'effort tranchant pour chaque panneau est déterminée par la verticale du milieu de ce panneau, dans le cas présent par la rencontre des diagonales.

Les efforts dans les deux diagonales d'un même panneau sont égaux en valeur absolue et les diagonales montant à gauche de l'appui A jusqu'au milieu de la poutre sont tendues; elles sont comprimées de ce milieu jusqu'à l'appui B.

Digitized by Google

Les barres montant à droite sont comprimées dans la première moitié et tendues dans la deuxième.

En menant, par le sommet des ordonnées de l'effort tranchant, des parallèles à la direction des barres correspondantes, direction qui est toujours la même dans le cas présent, on obtiendra les droites 1-1', 2-2', 3-3', etc., qui représenteront à l'échelle convenue le double des efforts dans les diagonales.

Ces efforts sont alors :

$$\text{Panneaux 1 et 6.....} \quad \frac{3^{cm},65 \times 10^{T}}{2} = 18^{T},25,$$

$$\text{— 2 et 5.....} \quad \frac{2^{cm},25 \times 10^{T}}{2} = 11^{T},25,$$

$$\text{— 3 et 4.....} \quad \frac{0^{cm},85 \times 10^{T}}{2} = 4^{T},25.$$

B. — Charges variables

201. Efforts dans les membrures. — Les efforts maxima seront déterminés par la méthode de Ritter.

Les moments fléchissants maxima en chaque nœud, qu'il s'agisse d'une charge uniformément répartie ou d'un convoi composé de charges roulantes, pourront être obtenus par une des méthodes déjà connues, n° 192, savoir :

1° *Charge uniformément répartie.* — On tracera la parabole des moments fléchissants, la poutre étant entièrement chargée, cas qui donne en chaque point le moment fléchissant maximum ;

2° *Convoi de charges roulantes.* — Les moments fléchissants maxima seront déterminés par le tracé de Weyrauch.

202. *Efforts maxima dans les diagonales.* — Les efforts maxima seront toujours obtenus par la décomposition, suivant les barres coupées, de la force extérieure à la section, dans le cas de charge qui produit la force extérieure maxima dans cette section.

Qu'il s'agisse d'une charge uniformément répartie ou d'un convoi de charges roulantes, la ligne représentative des

Digitized by Google

forces extérieures maxima ou, ce qui revient au même, des efforts tranchants maxima lorsque la charge se meut, peut être obtenue par une des méthodes déjà étudiées, savoir :

1° *Charges uniformément réparties p.* — La ligne représentative est une parabole tangente à l'un des appuis et qui découpe sur l'autre appui un segment égal à $\frac{pl}{2}$.

2° *Convoi de charges roulantes.* — La ligne représentative des efforts tranchants maxima se détermine par le tracé d'un polygone funiculaire des charges qui s'avancent sur la poutre et avec une distance polaire égale à la portée (n° 180-B).

La ligne représentative étant tracée, il est alors facile d'effectuer la décomposition des forces extérieures suivant les barres coupées, soit par la méthode Culmann si la poutre est quelconque, soit directement si la poutre est droite.

Les applications ci-après donnent les détails des opérations à effectuer.

203. Poutre de 12 mètres de portée à treillis simple en V, disposée comme l'indique la figure 267 et soumise à l'action d'une charge variable de 4 tonnes par mètre courant. — *Efforts dans les membrures.* — Les moments fléchissants maxima sont produits lorsque toute la poutre est chargée.

La parabole qui les détermine a pour flèche :

$$M_m = \frac{pl^2}{8} = \frac{4^T \times \overline{12}^2}{8} = 72 \text{ tonnes-mètres.}$$

En prenant les longueurs à l'échelle de 1 centimètre par 2 mètres et les moments fléchissants à l'échelle de 1 centimètre par 20 tonnes-mètres, l'ordonnée maxima aura pour valeur au nœud 4 :

$$M = \frac{72^{Tm}}{20^{Tm}} = 3^{cm},6.$$

On pourra donc déterminer pour chaque nœud le moment fléchissant correspondant par un simple tracé.

Digitized by Google

Les valeurs relevées à l'échelle sur l'épure donnent comme efforts dans les membrures :

$$I_1 = I_4 = +\frac{26^{Tm},5}{1,40} = +18^T,92,$$

$$I_2 = I_3 = +\frac{63^{Tm}}{2^m} = +31^T,5,$$

$$S_2 = S_4 = -\frac{55^{Tm}}{1,65} = -33^T,33,$$

$$S_3 = -\frac{72^{Tm}}{2^m} = -36^T,00.$$

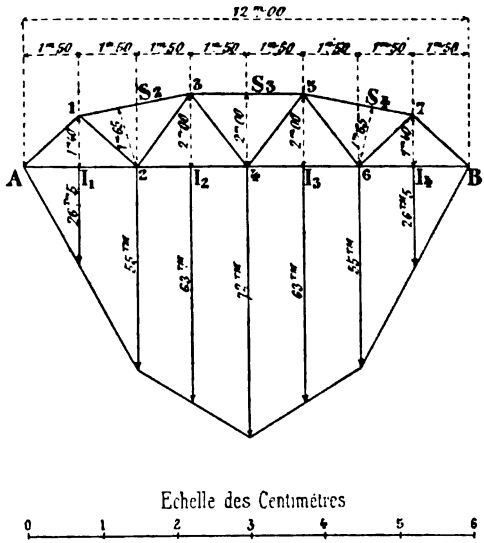


Fig. 267.

Efforts dans les diagonales (*fig.* 268). — On supposera que la charge se meut de B vers A.

La ligne représentative des efforts tranchants est une parabole tangente en B et qui découpe sur la verticale de l'appui A un segment égal à :

$$AA_1 = \frac{pl}{2} = \frac{4^T \times 12^m}{2} = 24 \text{ tonnes},$$

Digitized by Google

soit à l'échelle des efforts :

$$AA_1 = \frac{24^T}{10^T} = 2^{cm},4.$$

L'application de la méthode de Culmann se simplifie lors qu'on ne considère que la charge variable ; car, pour une section quelconque de la poutre, la force extérieure à la section passe toujours par l'appui de gauche, lorsqu'on charge cette poutre de l'appui de droite à la section considérée, et réciproquement si la charge se déplace de gauche à droite. De sorte que le point de rencontre de la force extérieure et de la membrure inférieure sera toujours un appui.

D'un autre côté, si on tient compte des indications du numéro 193-A, on voit que, pour obtenir les efforts maxima dans les diagonales montant à droite dans la première moitié de la poutre, comme D_1, D_3, il faudra charger successivement la poutre de B en 2 et de B en 4.

Pour les diagonales montant à gauche, comme D_2, D_4, il faudra charger la poutre de la même manière.

Dans ces conditions, on fera le tracé suivant pour déterminer ces efforts.

Diagonale D_1. — La force extérieure, qui est positive et qui passe par l'appui A, a pour valeur l'ordonnée 2.2'. La section *mm'* ne rencontre que deux barres D_1 et A.2 ou I_1 ; en conséquence, par 2' on mènera une parallèle à A.2, on joindra le point de rencontre des deux autres barres coupées, lequel est pour cette première section le point A, au point de rencontre de la force extérieure et de la membrure inférieure, qui est le point A_2 ; la droite obtenue se réduit donc à un point A_2. Il suffira alors de décomposer la force extérieure AA_2 en vraie position, et de valeur 2.2', suivant D_1 et A.2 ; à cet effet, il suffira de mener par A une parallèle à D_1 jusqu'à la rencontre de $2'A_2$ prolongée.

AA_2' donnera la valeur de l'effort dans D_1 qui, relevée à l'échelle, donne :

$$D_1 = -2^{cm} \times 10^T = -20^T \text{ (compression)}.$$

La force extérieure étant positive, le sens des flèches est

Digitized by Google

A_2AA_2'; ces flèches, portées à droite de la section, indiquent que D_1 est comprimée.

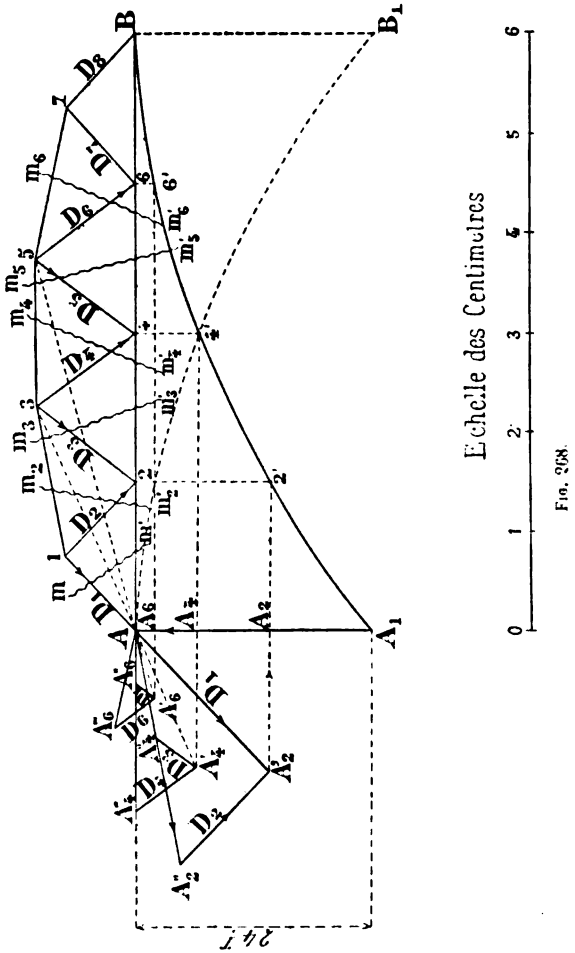


Fig. 268.

Diagonale D_2. — La charge s'effectuera encore de B en 2, la force extérieure est également AA_2. La section m_2m_2' ren-

Digitized by Google

contre les trois barres 1.3 ou S_2, D_2, A.2 ou I_1. On joindra le point de croisement 1, de S_2 et D_2, au point A jusqu'à la rencontre de 2'.A_2 prolongée, en A'_2, et on décomposera AA'_2 suivant D_2 et S_2, en menant par A une parallèle à S_2 et par A'_2 une parallèle à D_2.

On obtiendra ainsi $A'_2A''_2$, qui représentera l'effort dans la diagonale D_2, effort qui a pour valeur :

$$D_2 = 1^{cm},3 \times 10^T = + 13^T \text{ (tension)}.$$

Cette barre est tendue, car la flèche portée à droite de la section s'éloigne de cette section.

On procéderait de la même manière pour les autres diagonales; ainsi, pour D_3 et D_4, la force extérieure serait en position AA_4 et aurait pour valeur 4.4', et pour les diagonales D_5, D_6 elle serait en position AA_6 et aurait pour valeur 6.6'.

Pour une surcharge se déplaçant de B vers A, les diagonales D_7 et D_8, avec le mode de charge adopté, ne sont soumises à aucun effort.

Il faudrait ensuite rechercher les efforts avec une surcharge se déplaçant de A vers B. La ligne représentative des efforts tranchants serait la même en valeur absolue; mais elle partirait du point A pour aboutir en B_1, et les tracés des efforts, au lieu de se faire à gauche, seraient faits à droite.

Mais, pour une poutre symétrique par rapport à son milieu, il est inutile de refaire les tracés, les efforts seront les mêmes en grandeur et sens dans les barres symétriques; ainsi D_8 aura le même effort que D_1, D_7 que D_2, D_6 que D_3, etc.

On pourra donc dresser le tableau suivant, qui donnera les efforts maxima positifs et négatifs dans chaque barre.

DÉSIGNATION DES BARRES	EFFORTS MAXIMA	
	POSITIFS	NÉGATIFS
	tonnes	tonnes
D_1 et D_8	0	— 20,00
D_2 et D_7	+ 13,0	0
D_3 et D_6	+ 5,0	— 5,00
D_4 et D_5	+ 7,5	— 2,5

Digitized by Google

204. Poutre de 10 mètres de portée, du système en N, semi-parabolique, qui donne passage, à sa partie inférieure, au train-type de la voie normale. — On supposera que la poutre reçoit la moitié des charges dues à ce train. La membrure supérieure est inscrite dans une parabole, et la membrure inférieure est droite (*fig.* 269).

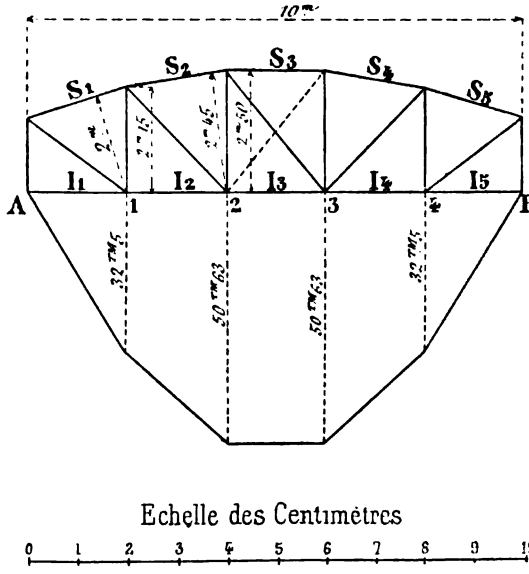


Fig. 269.

Par suite de la présence d'un panneau milieu, la diagonale dans ce panneau a été doublée pour donner un aspect satisfaisant à la poutre.

Il s'ensuit que cette poutre est constituée par deux systèmes simples en N.

Efforts maxima dans les membrures. — Le tracé de Weyrauch (n° 180-A) permet de déterminer les moments fléchissants maxima au droit de chaque nœud. Une application a été faite pour une même poutre au n° 181; il est

Digitized by Google

donc inutile d'y revenir; on se servira des résultats déjà obtenus.

Les moments fléchissants étaient :

Nœuds 1 et 4 ..... $32^{Tm},50$.
Nœuds 2 et 3 ..... $50^{Tm},63$.

D'après Ritter, les efforts maxima dans les membrures seront :

$$S_1 = S_5 = -\frac{32^{Tm},5}{2^m} = -16^T,25 \text{ (compression)},$$

$$S_2 = S_4 = -\frac{50^{Tm},63}{2,45} = -20^T,70 \quad \text{d}^o$$

$$S_3 = -\frac{50^{Tm},63}{2,50} = -20^T,3 \quad \text{d}^o$$

$$I_1 = I_5 = 0,$$

$$I_2 = I_4 = +\frac{32^{Tm},5}{2,15} = +15^T,1 \text{ (tension)},$$

$$I_3 = +\frac{50^{Tm},63}{2,50} = +20^T,3 \quad \text{d}^o$$

Efforts maxima dans les diagonales et les montants. — Pour déterminer ces efforts, il est nécessaire de dédoubler le système en deux autres simples et d'appliquer à chacun d'eux la moitié des charges qui agissent sur la poutre.

On tracera donc la ligne représentative des efforts tranchants, lorsque le train se meut d'une extrémité à l'autre de la poutre.

Une application de ce tracé a été faite pour la même poutre au n° 181 ; on prendra donc les résultats obtenus, mais en remarquant que, pour le cas présent, les charges sont moitié de celles du n° 181.

La ligne représentative des efforts tranchants étant reportée sous chaque système à l'échelle de 1 centimètre pour 2 tonnes pour les forces, on appliquera la méthode de Culmann et les remarques faites dans le n° 202 pour déterminer les efforts.

Premier système (*fig.* 270). — *Diagonale* D_1. — On fait une section m_1m_1, la force extérieure passe par l'appui A ; elle

Digitized by Google

est verticale et dirigée de bas en haut; sa grandeur est 1.1. La droite auxiliaire qui joint le point de rencontre des deux

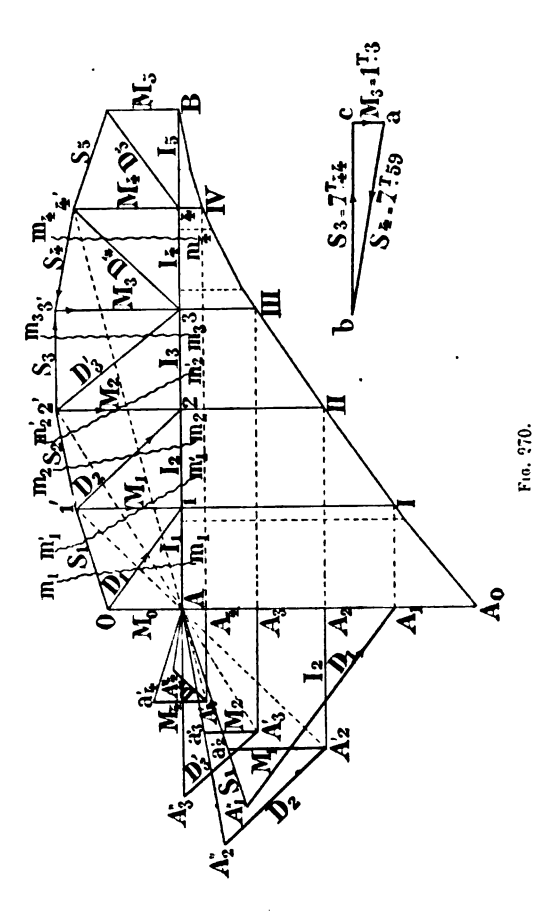


Fig. 270.

barres coupées autres que la membrure inférieure, au point A, est OAA_1.

Il suffira donc de décomposer AA_1 suivant des parallèles à D_1 et à S_1; on obtiendra ainsi $A_1A''_1$, qui donnera l'effort

Digitized by Google

dans D_1 ; sa valeur est une tension égale à :

$$5^{cm} \times 2^T = + 10 \text{ tonnes.}$$

Diagonale D_2. — On fait la section m_2m_2 ; la force extérieure est $AA_2 = - 2.II$.

Par A_2, on mènera une parallèle à I_2 jusqu'à la rencontre A_2' de la ligne auxiliaire $t'A$ prolongée.

On décomposera ensuite AA_2' en deux forces $A_2''A_2'$, parallèle, à D_2 et AA_2'', parallèle à S_2.

$A_2'A_2''$ donne l'effort dans la diagonale D_2, qui est une tension dont la valeur est:

$$2^{cm},8 \times 2^T = + 5^T,6.$$

On continuera de même pour les autres diagonales et on obtiendra successivement :

$$D_3' = + 1^{cm},9 \times 2^T = + 3^T,8 \text{ (tension)},$$
$$D_4 = - 0^{cm},95 \times 2^T = - 1^T,90 \text{ (compression)},$$
$$D_5 = 0.$$

Montant M_0. — Le montant sur appui supporte toutes les charges de B à 1, soit alors 1.I ou AA_1, dont la valeur est :

$$M_0 = - 4^{cm},3 \times 2^T = - 8^T,6 \text{ (compression).}$$

Montant M_1. — La section $m_1'm_1'$ coupe les trois barres S_1, M_1, I_2 ; la force extérieure à cette section est $AA_2 = 2.II$.

Par le point A_2 on mènera une parallèle à la membrure inférieure I_2 jusqu'au point de rencontre A_2' de la ligne auxiliaire $t'A$ prolongée.

On décomposera ensuite, comme pour les diagonales, AA_2' suivant les directions de M_1 et de S_1, soit Aa_2' et $A_2'a_2'$; $A_2'a_2'$ donnera l'effort dans le montant dont la valeur est :

$$2^{cm} \times 2^T = - 4 \text{ tonnes (compression).}$$

Mais on voit, à l'aspect de la figure, que le tracé des efforts dans les diagonales servira pour celui des efforts dans les montants et qu'il suffira de mener, de l'intersec-

Digitized by Google

tion A'_2 des efforts de D_1 et I_2, une verticale jusqu'à la rencontre de l'effort dans la membrure S_1, soit en a'_2.

On opérera de même pour les autres montants M_2 et M_4 en menant de A'_3 et A'_4 des verticales $A'_3a'_3$ et $A'_4a'_4$ qui donneront les efforts suivants :

$$M_2 = 1^{cm},05 \times 2^T = -2^T,10 \text{ (compression)},$$
$$M_4 = 1^{cm},1 \times 2^T = +2^T,2 \text{ (tension)}.$$

Montant M_3. — La section faite dans la poutre pour ce montant rencontre plus de trois barres ; c'est un cas particulier qui sera traité après le deuxième système.

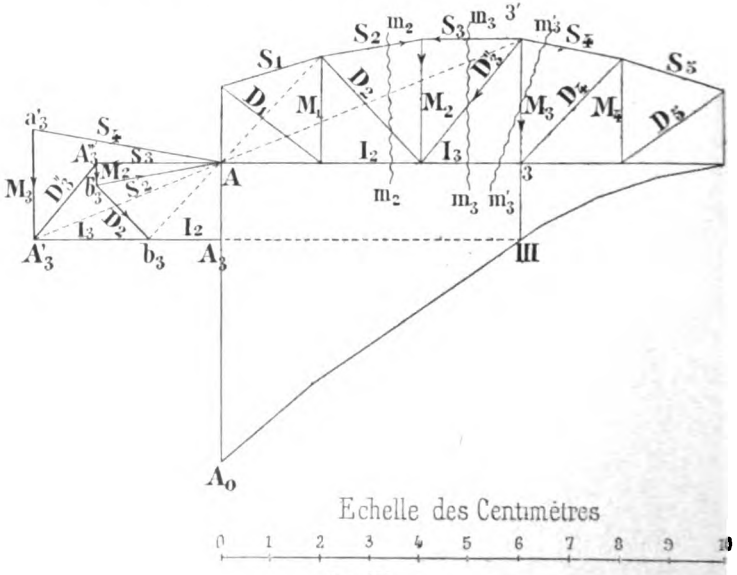


Fig. 271.

Deuxième système (*fig.* 271). — On reportera également la ligne représentative des efforts tranchants, et on remarque tout de suite que, pour les diagonales D_1, D_2, D_4 et les montants M_0, M_1 et M_4, on obtient les mêmes valeurs que dans le

Digitized by Google

premier système, soit :

$$D_1 = +\ 10^T,0 \text{ (tension)},$$
$$D_2 = +\ 5^T,6 \text{ (tension)},$$
$$D_4 = -\ 1^T,9 \text{ (compression)},$$
$$M_0 = -\ 8^T,6 \text{ (compression)},$$
$$M_1 = -\ 4^T,0 \text{ (compression)},$$
$$M_4 = +\ 2^T,2 \text{ (tension)}.$$

Diagonale D''_3. — La force extérieure à la section m_3m_3 est $AA_3 = 3.III$.

La ligne auxiliaire 3'A prolongée rencontre en A'_3 la parallèle à la membrure I_3 menée par A_3. En décomposant AA'_3 suivant les directions de D''_3 et S_3, on obtient l'effort dans la diagonale D''_3, qui est représenté par $A'_3A''_3$ et dont la valeur est :

$$D''_3 = 1^{cm},9 \times 2^T = -\ 3^T,8 \text{ (compression)}.$$

Montant M_3. — Il suffit de mener de A'_3 une verticale jusqu'au point de rencontre a'_3 avec une parallèle à S_4 menée du point A ; sa valeur est :

$$M_3 = 2^{cm},2 \times 2^T = +\ 4^T,4 \text{ (tension)}.$$

Montant M_2. — Comme dans le premier système pour le montant M_3, la section dans la poutre rencontre plus de trois barres. Il semblerait qu'il y a indétermination ; mais on peut procéder par une autre méthode pour déterminer les efforts dans ces deux montants.

On sait en effet que toutes les forces qui aboutissent à un même nœud se font équilibre ; or, dans le cas présent, les charges étant placées à la partie inférieure de la poutre, les forces qui se font équilibre au nœud 3' du premier système sont S_3, S_4 et M_3.

Dans une poutre sur deux appuis, les membrures sont toujours comprimées, c'est-à-dire que le sens des efforts est dirigé vers le nœud 3' (Voir tracé de Crémona). Leur résultante sera donc dirigée de bas en haut, et l'effort dans le montant qui lui fait équilibre sera dirigé de haut en bas,

Digitized by Google

c'est-à-dire qu'il s'éloignera du nœud 3' et qu'il représentera une tension.

Or, dans le deuxième système, on a déjà une valeur de M_3 qui a été obtenue en chargeant la poutre jusqu'au nœud 3, et, pour ajouter algébriquement les deux efforts, lors de la réunion des deux systèmes en un seul, il y a lieu, dans le premier système, de faire la même répartition des charges.

La section m_3m_3 donne bien sur l'épure (*fig.* 271) la valeur de S_3 qui est AA_3'' ; mais la section m_4m_4, ne donnerait pas immédiatement S_4, car il subsisterait à gauche de la section au moins une charge, qui serait celle située en 3, et la force extérieure à cette section ne passerait plus par l'appui A.

Il suffit alors de remarquer que le moment fléchissant au nœud 3 est égal à la force extérieure

$$AA_3 = 3.III = 1^{cm},55 \times 2^T = 3^T,10,$$

multipliée par le bras de levier A.3 = 6 mètres, soit :

$$M_3 = 3^T,1 \times 6^m = 18^{Tm},6.$$

On aura d'après Ritter :

$$S_3 = \frac{18^{Tm},6}{2,5} = -7^T,44 \text{ (compression)},$$

$$S_4 = \frac{18^{Tm},6}{2,45} = -7^T,59 \qquad -$$

On portera, à l'échelle convenue, sur une parallèle à S_4 (*fig.* 270) :

$$ab = \frac{7^T,59}{2^T} = 3^{cm},795;$$

à la suite, sur une parallèle à S_3 et avec le sens de cette force :

$$bc = \frac{7^T,44}{2^T} = 3^{cm},72,$$

et on joindra *ca*; cette droite représente l'effort dans le montant et doit être par conséquent verticale.

Digitized by Google

Sa valeur est $0^{cm},65 \times 2^{T} = 1^{T},3$ (tension)

Pour le montant M_2 du deuxième système, on chargera la poutre de la même manière que lorsqu'on a déterminé M_2 dans le premier système, c'est-à-dire jusqu'au nœud 3. Les sections m_3m_3 et m_2m_2 ne laissant pas de charge à leur gauche, on pourra déterminer directement sur l'épure les efforts dans les membrures S_2 et S_3 pour ce mode de charge et tracer alors l'effort dans le montant M_2.

La force extérieure aux sections m_2m_2 et m_3m_3, pour les charges avancées jusqu'au nœud 3, est AA_3, qui se décompose, d'une part, suivant I_2, D_2 et S_2, et, d'autre part, suivant I_3, D''_3 et S_3.

Le polygone des forces $AA''_3b'_3$ permet de déterminer M_2, qui est représentée par $A''_3b'_3$ et dont la valeur est :

$$M_2 = 0^{cm},45 \times 2^{T} = 0^{T},90 \text{ (tension)}.$$

On aura ainsi déterminé tous les efforts maxima agissant dans chaque système pour un train s'avançant de B vers A ; mais il y aurait lieu de recommencer le même tracé pour un train s'avançant de A vers B.

Toutefois, à cause de la symétrie de la poutre par rapport à son milieu, il suffit d'appliquer les efforts obtenus pour les barres d'un système aux barres symétriques de l'autre système.

Ainsi D_5 du premier système pour le train s'avançant de A vers B aura le même effort, grandeur et sens, que celui de la barre symétrique D_1 du deuxième système pour le train allant de B vers A.

Il en serait de même pour D'_3 du premier système (train allant de A vers B), qui aurait même effort que D''_3 du deuxième système (train allant de B vers A).

On dressera donc le tableau suivant, qui est donné en détails, afin de bien faire voir la manière d'opérer.

Les efforts totaux dans chaque barre sont obtenus en ajoutant algébriquement les efforts déterminés pour les deux systèmes et pour chaque direction du train.

Enfin, dans les deux dernières colonnes, le tableau comporte les efforts maxima positifs et négatifs.

Digitized by Google

DÉSIGNATION des BARRES	TRAIN S'AVANÇANT DE B VERS A			TRAIN S'AVANÇANT DE A VERS B			EFFORTS MAXIMA	
	1er système	2e système	Totaux	1er système	2e système	Totaux	POSITIFS	NÉGATIFS
	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes
D_1	+ 10,0	+ 10,0	+ 20,0	0	0	0	+ 20,0	0
D_2	+ 5,6	+ 5,6	+ 11,2	− 1,9	− 1,9	− 3,8	+ 11,2	− 3,8
D'_3	+ 3,8	0	+ 3,8	− 3,8	0	− 3,8	+ 3,8	− 3,8
D''_3	0	− 3,8	− 3,8	0	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	− 3,8
D_4	− 1,9	− 1,9	− 3,8	+ 5,6	+ 5,6	+ 11,2	+ 11,2	− 3,8
D_5	0	0	0	+ 10,0	+ 10,0	+ 20,0	+ 20,0	0
M_0	− 8,6	− 8,6	− 17,2	0	0	0	0	− 17,2
M_1	− 4,0	− 4,0	− 8,0	+ 2,2	+ 2,2	+ 4,4	+ 4,4	− 8,0
M_2	− 2,1	+ 0,9	− 1,2	+ 4,4	+ 1,3	+ 5,7	+ 5,7	− 1,2
M_3	+ 1,3	− 4,4	+ 5,7	+ 0,9	− 2,1	− 1,2	+ 5,7	− 1,2
M_4	+ 2,2	+ 2,2	− 4,4	− 4,0	− 4,0	− 8,0	+ 4,4	− 8,0
M_5	0	0	0	− 8,6	− 8,6	− 17,2	0	− 17,2

A l'inspection du tableau ci-dessus, on remarque que, pour une poutre symétrique, les barres symétriques reçoivent les mêmes efforts maxima positifs et négatifs.

Il est bien entendu qu'il faudrait combiner ces résultats avec ceux obtenus pour la charge permanente. Cette combinaison fera l'objet du paragraphe VII.

205. Poutre droite de 9 mètres de portée du système simple en V, qui donne passage, à sa partie supérieure, à une file de tombereaux de 6 tonnes de la circulaire ministérielle. — Le schéma de la poutre est dessiné à l'échelle de 1 centimètre par mètre *fig.* 272.

Efforts maxima dans les membrures. — On recherchera, au moyen d'un tracé de Weyrauch, les moments fléchissants maxima au droit de chaque nœud supérieur chargé, et on déterminera la valeur des moments fléchissants aux nœuds intérieurs qui ne sont pas chargés, comme il a été indiqué au n° 192. On appliquera ensuite la méthode de Ritter en

Digitized by Google

divisant ces moments par la distance entre les nœuds et les membrures, qui est ici constante.

On aura ainsi, sans répéter les calculs graphiques qui ont déjà été faits plusieurs fois :

$$S_1 = S_4 = 0,$$
$$S_2 = S_3 \text{ (compression)},$$
$$I_1 = I_3 \text{ (tension)},$$
$$I_2 = \quad \text{(tension)}.$$

Efforts maxima dans les diagonales. — On tracera, comme dans les cas précédents, la ligne représentative des efforts tranchants; mais une remarque s'impose. Pour un convoi qui s'avancerait de B vers A, les premières charges seraient celles des chevaux, dont la valeur est beaucoup plus faible que celle du véhicule, et, dans ces conditions, le premier cheval placé au nœud précédant la section qui aurait été faite dans la poutre, ne donnerait pas dans cette section la force extérieure maxima. Il faudrait donc, pour chaque nœud, rechercher par des tracés particuliers la position réelle des charges pour obtenir le maximum d'effort.

Mais on peut tourner cette difficulté en remarquant que la roue du dernier véhicule, qui franchit la poutre en allant de A vers B, produit dans cette poutre les mêmes effets que si le convoi reculait, roue en avant, de B vers A, et il en sera de même lorsque le dernier véhicule franchira la poutre en allant de B vers A, et, dans ce cas, la roue de ce véhicule produira les mêmes effets que si le convoi reculait, roue en avant, de A vers B.

Dans ces conditions, le tracé de la ligne représentative des efforts tranchants pour un convoi qui est supposé marcher de B vers A, roue en avant, se tracerait d'après la méthode expliquée au n° 180-B.

On placera (*fig.* 272) la première roue sur l'appui B_1, et les autres charges, qui rentrent dans la poutre, à la gauche. On portera de A_1 en A'_1, à l'échelle de 1 centimètre pour 2 tonnes, les grandeurs de ces charges et, avec le point B_1 comme pôle, on tracera le polygone funiculaire correspondant $B_1A'_2$.

La ligne représentative des efforts tranchants sera reportée

Digitized by Google

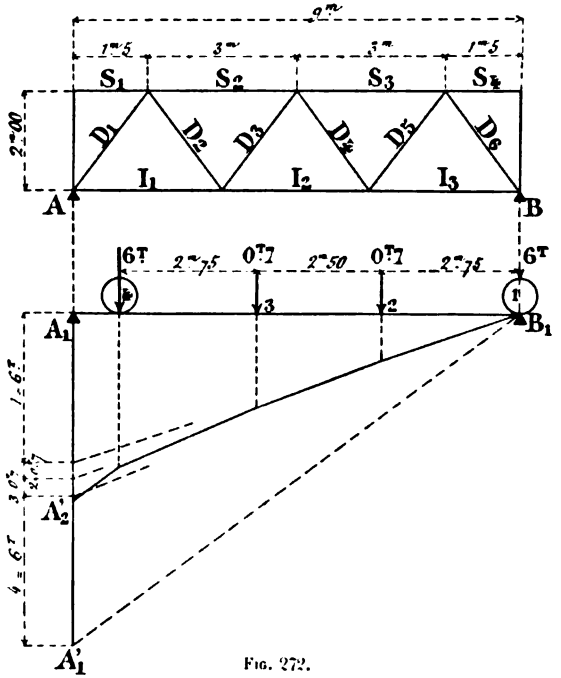


Fig. 272.

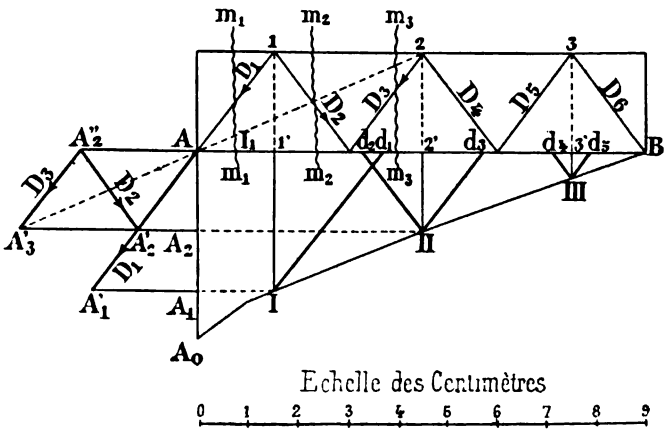


Fig. 273.

Digitized by Google

sous le schéma de la poutre, et on pourra alors procéder par la méthode de Culmann à la détermination des efforts dans les diagonales (*fig.* 273).

Diagonale D_1. — La force extérieure à la section m_1m_1 est en position $AA_1 = 1'.I$.

La force auxiliaire serait AA'_1, A'_1 étant le point de rencontre de $A_1A'_1$ parallèle à I_1 avec 1.A prolongée.

Cette force auxiliaire ne peut se décomposer que suivant $D_1 = AA'_1$, puisque AA'_1 est située sur son prolongement.

L'effort dans cette diagonale a pour valeur :

$$D_1 = 3^{cm},5 \times 2^T = -7 \text{ tonnes (compression).}$$

On obtiendrait le même résultat immédiat en menant de I une parallèle Id_1 à D_1 jusqu'à la rencontre de AB.

Diagonales D_2 *et* D_3. — La force extérieure aux sections m_2m_2 et m_3m_3 est la même, puisque les sections sont situées entre les mêmes nœuds; sa position est en AA_2 et sa valeur 2'II.

Les forces auxiliaires sont :

AA'_2 issue du nœud 1 pour la diagonale D_2, et AA'_3 issue du nœud 2 pour la diagonale D_3.

En décomposant respectivement ces forces suivant les barres coupées issues des nœuds considérés, on obtiendra :

$$D_2 = A'_2A''_2 = 2^{cm} \times 2^T = 4 \text{ tonnes (tension)},$$
$$D_3 = A'_3A''_2 = 2^{cm} \times 2^T = -4 \text{ tonnes (compression)}.$$

Comme pour D_1, il y a lieu de remarquer que l'on obtiendrait le même résultat en menant du point II des parallèles II-d_2 et II-d_3 à D_2 et D_3 jusqu'à la rencontre de AB.

Diagonales D_4 *et* D_5. — Les parallèles III-d_4 et III-d_5 à D'_4 et D_5 déterminent les efforts dans les diagonales. On a :

$$D_4 = 0^{cm},6 \times 2^T = 1^T,2 \text{ (tension)},$$
$$D_5 = 0^{cm},6 \times 2^T = -1^T,2 \text{ (compression)}.$$

Diagonale D_6. — La section entre le nœud 3 et l'appui B donne une force extérieure nulle, $D_6 = 0$.

Digitized by Google

En prenant un convoi qui s'avancerait roue en avant de A vers B, on obtiendrait les mêmes efforts, mais symétriquement.

On dressera donc le tableau suivant, qui donnera les efforts maxima positifs et négatifs dans les diagonales.

DÉSIGNATION DES DIAGONALES	EFFORTS MAXIMA	
	POSITIFS	NÉGATIFS
	tonnes	tonnes
D_1 et D_6	0	— 7,0
D_2 et D_5	4,0	— 1,2
D_3 et D_4	1,2	— 4,0

§ 7. — EFFORTS MAXIMA ET MINIMA DANS LES POUTRES A TREILLIS SOUMISES A DES CHARGES PERMANENTES ET VARIABLES.

Dans tout ce qui précède, on ne s'est occupé de rechercher les efforts maxima que pour un mode de charges bien défini.

Lorsque la poutre n'est soumise qu'à des charges fixes ou permanentes, les procédés employés donnent les efforts agissant réellement dans les barres.

Mais, lorsque cette poutre est soumise à l'action d'une surcharge variable, il faut combiner les efforts dus à la charge permanente avec ceux résultant de la surcharge, et déterminés par les tracés précédents.

Toutefois la circulaire ministérielle prévoit le cas où il est nécessaire de connaître aussi les efforts minima, et il ne faudrait pas croire que ces efforts minima sont donnés par la charge permanente seule, car il arrive assez fréquemment qu'une position particulière de la surcharge permet de produire un effort résultant inférieur à celui de la charge permanente seule.

Les quelques exemples ci-après résument les différents cas qui se produisent couramment.

Digitized by Google

206. Poutre de 12 mètres de portée à treillis simple en V soumise à la partie inférieure, par l'intermédiaire d'entretoises, à une charge permanente de 2 tonnes par mètre courant et à une surcharge variable uniformément répartie de 4 tonnes par mètre courant.

Cette poutre a déjà été étudiée pour ces deux cas de charge, savoir :

Au n° 196, pour la charge permanente seule;

Au n° 203, pour la surcharge variable seule.

Il suffira donc de relever les résultats déjà obtenus et de les porter dans un tableau divisé en colonnes, comme il est indiqué ci-après :

NUMÉROS DES BARRES	EFFORTS dus à LA CHARGE permanente	EFFORTS MAXIMA dus A LA SURCHARGE VARIABLE		EFFORT TOTAL maximum	EFFORT MINIMUM de même sens que l'effort maximum	EFFORT le PLUS GRAND de sens contraire à l'effort maximum
		tensions	compressions			
1	2	3	4	5	6	7
	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes
S_2	— 16,2	»	— 33,33	— 49,53	— 16,2	»
S_3	— 18,2	»	— 36,00	— 54,2	— 18,2	»
S_4	— 16,2	»	— 33,33	— 49,53	— 16,2	»
I_1	+ 9,6	+ 18,92	»	+ 28,52	+ 9,6	»
I_2	+ 16,0	+ 31,5	»	+ 47,5	+ 16,0	»
I_3	+ 16,0	+ 31,5	»	+ 47,5	+ 16,0	»
I_4	+ 9,6	+ 18,92	»	+ 28,52	+ 9,6	»
D_1	— 13,0	0	— 20,00	— 33,0	— 13,0	»
D_2	+ 8,8	+ 13,0	0	+ 21,8	+ 8,8	»
D_3	0	+ 5,0	— 5,0	± 5,0	»	∓ 5,0
D_4	+ 3,8	+ 7,5	— 2,5	+ 11,3	+ 1,3	»
D_5	+ 3,8	+ 7,5	— 2,5	+ 11,3	+ 1,3	»
D_6	0	+ 5,0	— 5,0	± 5,0	»	∓ 5,0
D_7	+ 8,8	+ 13,0	0	+ 21,8	+ 8,8	»
D_8	— 13,0	0	— 20,00	— 33,0	— 13,0	»

La colonne 1 porte les numéros des barres; la colonne 2, les efforts dus à la charge permanente seule qui sont toujours de même sens.

Digitized by Google

Les colonnes 3 et 4 comportent les efforts dus à la surcharge variable et que l'on a classés en tensions et compressions. Il y a lieu de remarquer que, pour les membrures, l'effort maximum, seul, a été indiqué, car, pour une poutre sur deux appuis, quel que soit le mode de charge, les efforts sont toujours de même sens et, dans ce cas, l'effort minimum sera donné par la charge permanente seule.

Il n'en est pas de même pour les diagonales dont les efforts changent de sens suivant la direction de la marche de la surcharge ; aussi, pour ces barres, les maxima positifs et négatifs ont été indiqués.

Les nombres de la colonne 5, qui représentent les efforts totaux maxima, ont été obtenus en additionnant les nombres de même signe des colonnes 2, 3 ou 4.

Les nombres de la colonne 6, qui sont les efforts minima ont été obtenus :

1° Pour les membrures, en prenant les efforts dus à la charge permanente seule ;

2° Pour les diagonales, en retranchant, de l'effort dû à la charge permanente, l'effort de sens contraire situé dans une des colonnes 3 ou 4, à condition que ce dernier soit inférieur au premier.

Enfin, les nombres de la colonne 7 sont obtenus en retranchant algébriquement de l'effort de la charge permanente l'effort de sens contraire situé dans une des colonnes 3 ou 4, à condition que ce dernier soit supérieur au premier.

Ainsi, pour la membrure I_2, par exemple, l'effort maximum total $47^T,5$ est obtenu en additionnant $+$ 16 tonnes de la colonne 2 avec l'effort $+ 31^T,5$ de la colonne 3.

L'effort minimum de même sens est de $+$ 16 tonnes; il est dû à la charge permanente seule.

Pour la diagonale D_4, l'effort total maximum $+ 11^T,3$ est donné par les colonnes 2 et 3.

L'effort minimum de même sens $+ 1^T,3$ est obtenu par la soustraction des nombres des colonnes 2 et 4.

Enfin, pour la diagonale D_6, l'effort maximum total est donné par la colonne 2 et par une des deux colonnes 3 et 4, et l'effort plus grand en sens contraire par la soustraction du nombre des colonnes 3 ou 4 avec celui de la colonne 2. Dans

Digitized by Google

le cas présent, l'effort dans la diagonale D_6, dû à la charge permanente, étant nul et les efforts dus à la charge variable étant les mêmes en valeur absolue, l'effort maximum total et l'effort le plus grand de sens contraire ont également même valeur absolue.

207. Poutre de 10 mètres de portée du système en N semi-parabolique, soumise à sa partie inférieure, par l'intermé-

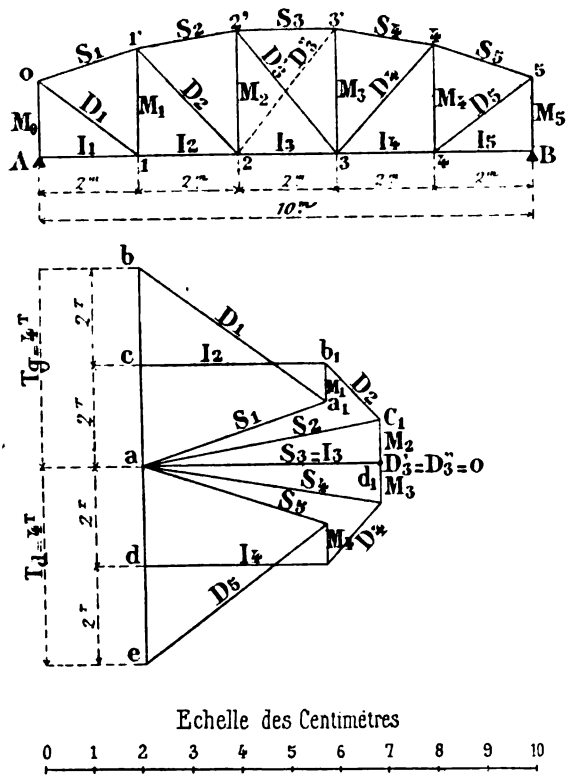


Fig. 274.

diaire d'entretoises, à une charge permanente de 1 tonne par

Digitized by Google

mètre courant et qui donne passage au train-type de la voie normale. — Cette poutre a déjà été étudiée au n° 204 pour la surcharge variable ; on prendra donc les résultats déjà obtenus.

En ce qui concerne la charge permanente, un tracé de Crémona (*fig.* 274) donnera les efforts dans les différentes barres.

La charge aux nœuds 1, 2, 3, 4 est égale à :

$$2^m \times 1^T = 2 \text{ tonnes.}$$

Réactions :

$$T_g = T_d = 2 \times 2^T = 4 \text{ tonnes.}$$

Les charges sont portées à l'échelle de 1 centimètre par tonne.

Il y a lieu de remarquer que, pour une pareille poutre symétrique, les efforts dans les diagonales D'_3 et D''_3 dus à la charge permanente sont nuls, la force extérieure dans le panneau milieu étant nulle.

Les efforts relevés sur l'épure sont :

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_5 = -\ 3^T,9 \text{ (compression)},\\
S_2 &= S_4 = -\ 4^T,9 \quad\quad —\\
S_3 &= -\ 4^T,8 \quad\quad —\\
I_1 &= I_5 = 0,\\
I_2 &= I_4 = +\ 3^T,7 \text{ (tension)},\\
I_3 &= +\ 4^T,8 \quad\quad —\\
D_1 &= D_5 = +\ 4^T,6 \quad\quad —\\
D_2 &= D_4 = +\ 1^T,6 \quad\quad —\\
D'_3 &= D''_3 = 0,\\
M_0 &= M_5 = T_g = -\ 4^T,0 \text{ (compression)},\\
M_1 &= M_4 = -\ 8^T,0 \text{ (compression)},\\
M_2 &= M_3 = +\ 8^T,0 \text{ (tension)}.
\end{aligned}$$

Charge variable. — Les efforts ont été déterminés au n° 204, auquel il faut se reporter.

Efforts maxima et minima. — On dressera, comme dans l'exemple précédent, un tableau dans lequel seront consignés tous les résultats.

Digitized by Google

NUMÉROS DES BARRES	EFFORTS dus à LA CHARGE permanente	EFFORTS MAXIMA dus A LA SURCHARGE VARIABLE		EFFORT TOTAL maximum	EFFORT MINIMUM de même signe que l'effort maximum	EFFORT le PLUS GRAND en sens contraire de l'effort maximum
		tensions	compressions			
1	2	3	4	5	6	7
	tonnes	tonnes.	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes
S_1	— 3,9	»	— 16,25	— 20,15	— 3,9	»
S_2	— 4,9	»	— 20,70	— 25,60	— 4,9	»
S_3	— 4,8	»	— 20,30	— 25,10	— 4,8	»
S_4	— 4,9	»	— 20,70	— 25,60	— 4,9	»
S_5	— 3,9	»	— 16,25	— 20,15	— 3,9	»
I_1	0	0	0	0	0	0
I_2	+ 3,7	+ 15,1	»	+ 18,8	+ 3,7	»
I_3	+ 4,8	+ 20,3	»	+ 25,1	+ 4,8	»
I_4	+ 3,7	+ 15,1	»	+ 18,8	+ 3,7	»
I_5	0	0	0	0	0	0
D_1	+ 4,6	+ 20,0	0	+ 24,6	+ 4,6	»
D_2	+ 1,6	+ 11,2	— 3,8	+ 12,8	»	— 2,2
D'_3	0	+ 3,8	— 3,8	± 3,8	»	∓ 3,8
D''_3	0	+ 3,8	— 3,8	± 3,8	»	∓ 3,8
D_4	+ 1,6	+ 11,2	— 3,8	+ 12,8	»	— 2,2
D_5	+ 4,6	+ 20,0	0	+ 24,6	+ 4,6	»
M_0	— 4,0	0	— 17,2	— 21,2	— 4,0	»
M_1	— 8,0	+ 4,4	— 8,0	— 16,0	— 3,6	»
M_2	+ 8,0	+ 5,7	— 1,2	+ 13,7	+ 6,8	»
M_3	+ 8,0	+ 5,7	— 1,2	+ 13,7	+ 6,8	»
M_4	— 8,0	+ 4,4	— 8,0	— 16,0	— 3,6	»
M_5	— 4,0	0	— 17,2	— 21,2	— 4,0	»

§ 8. — POUTRES A TREILLIS A CONTRE-DIAGONALES

208. Généralités. — On emploie fréquemment un type de poutre à treillis simple du système en N, mais dont les diagonales ne sont composées que de fers plats et par cela même incapables de résister aux efforts de compression.

Ces diagonales sont disposées de telle manière que, sous

Digitized by Google

l'action de la charge permanente seule, elles se trouvent toujours tendues.

La figure 275 représente cette disposition, et les diagonales en question sont indiquées par des traits pleins.

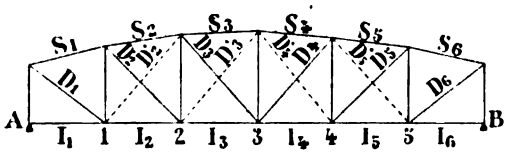


Fig. 275.

Mais, dans une telle poutre, si l'on fait agir l'action d'une surcharge variable, abstraction faite de la charge permanente, certaines de ces diagonales seront soumises à une compression.

Ainsi, si la surcharge se meut de gauche à droite, les diagonales D_1, D_2 et D_3 seront comprimées, et les diagonales D_4, D_5 et D_6 seront tendues. L'inverse se produira si la surcharge se meut de droite à gauche.

Dans ces conditions, la même diagonale peut être soumise à la fois à deux genres d'efforts, savoir :

Une tension pour la charge permanente et une compression pour la surcharge ; il y a lieu d'examiner alors si l'effort de compression n'est pas plus grand que l'effort de tension, auquel cas l'effort résultant serait une compression.

Si cela est, comme la diagonale, par sa composition même, ne peut résister à un effort de compression, on lui adjoint dans le même panneau une deuxième diagonale de sens opposé qui subira, sous l'action de la surcharge, un effort de tension lorsque la première est comprimée.

Ces nouvelles diagonales sont celles qui sont représentées en traits pointillés sur la figure et sont désignées par D'_2, D'_3, D'_4, D'_5.

Les premières diagonales (en traits forts), c'est-à-dire celles qui sont tendues sous l'action de la charge permanente, portent le nom de *diagonales principales*, et les diagonales supplémentaires (en traits pointillés) sont les *contre-diagonales*.

Digitized by Google

209. Recherche des panneaux à munir de contre-diagonales. — Le nombre de panneaux à munir de *contre-diagonales* dépend, pour une même surcharge variable, de la valeur de la charge permanente. Plus celle-ci sera grande, plus le nombre de panneaux à munir de contre-diagonales sera réduit.

La recherche des panneaux nécessitant une contre-diagonale se fait d'une manière très simple.

Il suffit de déterminer séparément, pour un panneau considéré, l'effort de tension dû à la charge permanente et l'effort maximum de compression produit par la surcharge variable. Si ce dernier effort est supérieur à l'effort de tension, le panneau examiné devra être muni d'une *contre-diagonale*.

L'effort de tension dû à la charge permanente se détermine par une des méthodes données précédemment : tracé de Crémona pour les poutres à membrures quelconques ou par la ligne représentative des efforts tranchants pour les poutres à membrures parallèles.

210. Effort de compression maximum. — L'effort de compression maximum dû à la surcharge variable peut être déterminé graphiquement comme ci-après :

1° Surcharge uniformément répartie de p kilogrammes par mètre courant. — Soit la poutre (*fig.* 276), pour laquelle on veut rechercher l'effort de compression maximum dans la diagonale D_3.

A cet effet on tracera la courbe représentative des efforts tranchants pour la surcharge se mouvant de A vers B, qui est le sens pour lequel la surcharge donne des efforts de compression dans les diagonales montant à gauche. Cette courbe est une parabole qui a son sommet en A et qui découpe sur la verticale de l'appui B un segment égal à $p\frac{l}{2}$.

On déterminera la position du point limite des efforts tranchants K_3 dans le troisième panneau et on fera la construction exposée au n° 138-A pour obtenir la longueur $K'_3K''_3$, le point K''_3 se trouvant à l'intersection de la verticale du point K_3 et d'une parabole qui a son sommet en 2 et qui découpe sur la verticale de 3 un segment 3.3_1 égal à $\frac{p\lambda_3}{2}$.

Digitized by Google

L'ordonnée $K_3'K_3''$, qui représente à l'échelle convenue pour les forces la valeur de l'effort tranchant maximum

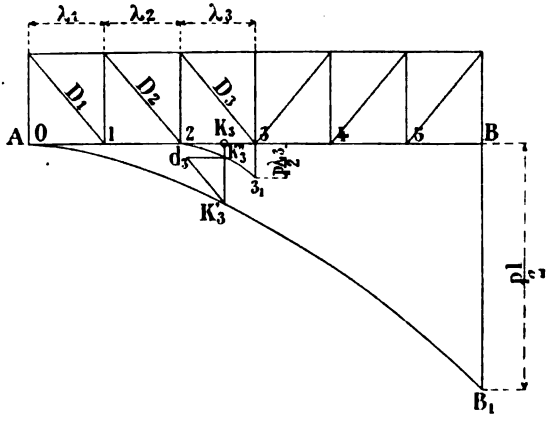


Fig. 276.

dans le panneau considéré, pourrait être déterminée aussi par le calcul.

Il suffira ensuite, pour avoir l'effort de compression dans

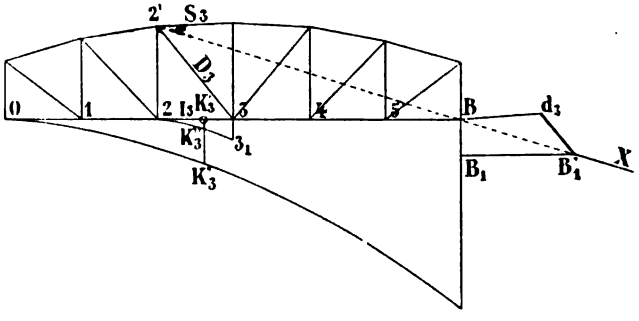


Fig. 277.

la diagonale D_3, de mener par le point K_3' une parallèle à D_3 jusqu'à la rencontre de la parallèle aux membrures $K_3''d_3$; la

Digitized by Google

longueur K'_3d_3 représentera à l'échelle des forces la valeur de l'effort de compression que subit la diagonale D_3.

Si la poutre n'avait pas les membrures parallèles, il faudrait alors employer la méthode de Culmann.

Ainsi soit la poutre de la figure 277.

On déterminera comme précédemment le point K_3, ainsi que l'ordonnée $K'_3K''_3$ qui représente l'effort tranchant maximum dans le panneau 2-3.

Sur la verticale de l'appui B, on portera $BB_1 = K'_3K''_3$, on joindra le point d'intersection 2' de D_3 et de S_3 au point B par une droite 2'BX et, par le point B_1, on mènera une parallèle à I_3 qui rencontre 2'BX au point B'_1.

Il suffira ensuite de tracer Bd_3 parallèle à S_3 et B'_1d_3 parallèle à D_3.

La longueur B'_1d_3 représente à l'échelle des forces la valeur de la compression maxima dans la diagonale D_3.

2° **Convoi de charges distinctes.** — Soit la poutre (*fig.* 278) pour laquelle on veut rechercher l'effort maximum de compression qui agit dans la diagonale D_2.

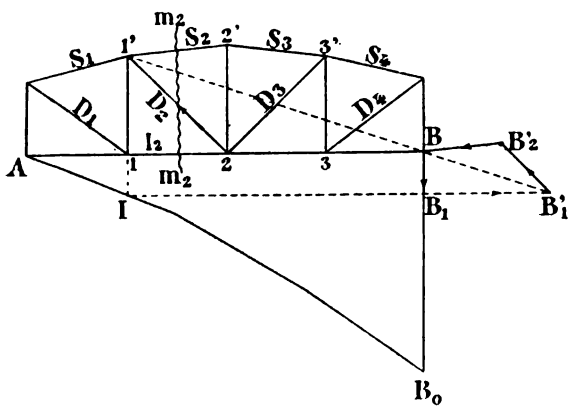


Fig. 278.

A cet effet on tracera la ligne représentative des efforts tranchants pour le convoi se mouvant de A vers B, construction donnée au n° 180-B.

Digitized by Google

Si la roue de tête donne l'effort tranchant maximum dans le panneau qui renferme la diagonale considérée, il faudra la placer au nœud 1 et la valeur de cet effort tranchant maximum dans le panneau 1-2 est représentée par l'ordonnée 1-I.

Il suffira ensuite de décomposer cet effort tranchant, suivant les trois barres coupées I_2, S_2 et D_2, par la méthode de Culmann. A cet effet on mènera IB_1 parallèle à I_2, on joindra 1' au point B par une droite que l'on prolongera jusqu'à la rencontre de IB_1 en B'_1. Ensuite, par le point B'_1, on mènera une parallèle à D_2 et, par le point B, une parallèle à S_2. Ces deux droites se rencontrent en B'_2, et la longueur $B'_1B'_2$ représentera, à l'échelle des forces, l'effort maximum de compression dans la diagonale D_2.

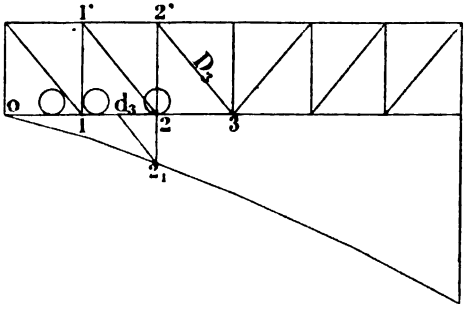


Fig. 279.

Si la poutre avait ses membrures parallèles comme celle de la figure 279, il suffirait de décomposer $2\text{-}2_1$, qui est la valeur de l'effort tranchant maximum dans le panneau 2-3, suivant une parallèle 2_1d_3 à la diagonale D_3 et à la direction des membrures; la longueur 2_1d_3 représentera à l'échelle des forces la valeur de la compression dans D_3.

Remarque. — Si la roue de tête ne donnait pas l'effort tranchant maximum dans le panneau considéré, on essaierait la roue suivante, qui serait placée au nœud 2, et alors l'effort tranchant maximum dans le panneau serait (*fig.* 280)

Digitized by Google

$m'm_1$, le point m' se trouvant à l'intersection de la verticale de la charge de tête et de la droite $2\text{-}3_1$, telle que $3\text{-}3_1 = P$.

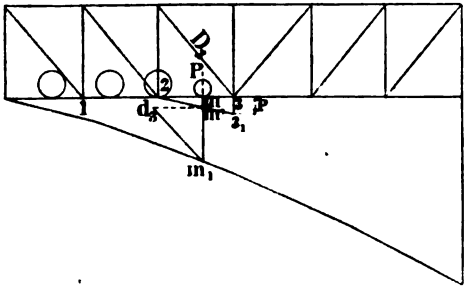


Fig. 280.

Connaissant $m'm_1$, il suffirait de mener m_1d_3 parallèle à D_3 et $m'd_3$ parallèle à la direction des membrures.

211. Hypothèses relatives au calcul des efforts dans les membrures, les diagonales et les montants d'une poutre à contre-diagonales. — 1° Les *membrures* se calculeront en général comme s'il n'y avait dans la poutre que des *diagonales principales ;*

2° Les *diagonales principales* devront être calculées pour supporter l'effort de tension dû à la charge permanente et l'effort de tension maximum dû à la surcharge variable ;

3° Les *contre-diagonales* seront prévues pour supporter l'effort de tension développé par la surcharge lorsque, dans le même panneau, cette surcharge donne un effort de compression dans la *diagonale principale.* On supposera alors que cette dernière est supprimée et la *contre-diagonale* devra, en conséquence, supporter l'effort dû à la charge permanente, qui est une compression et qui viendra en déduction de l'effort de tension de la surcharge ;

4° Les *montants* devront être calculés pour la compression maxima, charge permanente et surcharge.

En prenant pour bases les hypothèses ci-dessus, on peut très simplement calculer une poutre à contre-diagonales symétriques.

Digitized by Google

1° *Membrures.* — Il suffira de considérer la moitié de la poutre munie de diagonales principales seulement et d'appliquer une des méthodes déjà étudiées.

2° *Diagonales principales et contre-diagonales.* — La même épure, disposée convenablement, donnera tous les efforts que l'on désire obtenir.

Ainsi soit la poutre (*fig.* 275), pour laquelle on a déterminé les panneaux à munir de contre-diagonales, qui sont représentées en traits pointillés.

On établira un diagramme de la poutre en supprimant les contre-diagonales de la moitié de gauche, et, par contre, on supprimera les diagonales principales de la moitié de droite, à l'exception des panneaux, où il ne se trouve que des diagonales principales.

Le diagramme se présentera alors sous la forme de la figure 281.

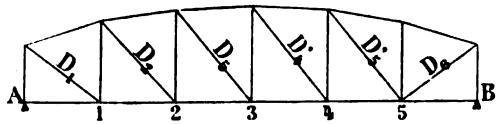


Fig. 281.

Au moyen de ce diagramme, on fera un tracé de *Crémona pour la charge permanente*, qui donnera, d'une part, les efforts de tension dans les diagonales principales, et, d'autre part, les efforts de compression dans les contre-diagonales.

Il y a lieu de remarquer, en outre, qu'à cause de la symétrie les efforts $D_1 = D_6$, $D_2 = D_5$, $D_3 = D_4$, $D'_4 = D'_3$, $D'_5 = D'_2$.

Pour la surcharge variable, on tracera la ligne représentative des efforts tranchants maxima en supposant que cette surcharge se meut de B vers A.

En surchargeant successivement de l'appui B aux points 5, 4, 3, 2, 1, on déterminera les efforts de tension dans les contre-diagonales D'_5, D'_4, et les diagonales principales D_3, D_2, D_1. Ces efforts seront identiques dans les diagonales symétriques.

En ce qui concerne les montants, on opérera de la même manière que pour les diagonales.

Digitized by Google

On remarquera que, présentée de cette manière, la détermination des efforts devient très simple.

Les deux exemples ci-après compléteront la méthode exposée ci-dessus.

212. Premier exemple. — **Poutre de 12 mètres de portée à membrures parallèles divisée en 6 panneaux de 2 mètres, soumise à l'action d'une charge permanente de $p = 1$ tonne par mètre courant et qui donne passage à une surcharge uniforme de $p = 2$ tonnes par mètre courant agissant à la partie inférieure par l'intermédiaire d'entretoises.** — La poutre est à treillis simple du système en N et composée de diagonales principales en fer plat.

1° *Effort dans les membrures.* — Pour déterminer ces efforts, il n'est pas nécessaire de rechercher les panneaux à munir de contre-diagonales, il suffira de considérer la poutre comme n'en ayant pas.

Dans ces conditions, le moment fléchissant maximum à chaque nœud étant donné par la surcharge sur toute la poutre, il suffirait de tracer la parabole des moments fléchissants pour les deux charges réunies $(p + q)$.

Le moment fléchissant maximum se produit au milieu de la portée, et il a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8}(p + q)\, l^2 = \frac{1}{8}(1^T + 2^T) \times \overline{12}^2 = 54^{Tm}.$$

Cette parabole permettrait de relever au droit de chaque nœud les valeurs des moments fléchissants.

On peut également, étant donnée la faible quantité de nœuds, les déterminer par le calcul en appliquant la formule :

$$M = \frac{p + q}{2}\, x \left(l - x\right),$$

x étant la distance de l'appui de gauche au nœud considéré ; on a alors :

Nœud 1 : $M_1 = \frac{3^T}{2} \times 2^m \times 10^m = 30$ tonnes-mètres.

Nœud 2 : $M_2 = \frac{3^T}{2} \times 4^m \times 8^m = 48$ tonnes-mètres.

Nœud 3 : M maximum — 54 tonnes-mètres.

Digitized by Google

En appliquant la méthode de Ritter et en donnant à la poutre une hauteur de 2 mètres entre les axes neutres des membrures, on obtient :

$$S_1 = S_6 = \frac{30^{Tm}}{2^m} = -15 \text{ tonnes.}$$

$$S_2 = S_5 = \frac{48^{Tm}}{2^m} = -24 \text{ tonnes.}$$

$$S_3 = S_4 = \frac{54^{Tm}}{2^m} = -27 \text{ tonnes.}$$

$$I_1 = I_6 = 0.$$

$$I_2 = I_5 = \frac{30^{Tm}}{2^m} = +15 \text{ tonnes.}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{48^{Tm}}{2^m} = +24 \text{ tonnes.}$$

2° *Diagonales et montants* (*fig.* 282). — Il y a lieu d'abord de rechercher les panneaux à munir de contre-diagonales.

On déterminera d'abord les points K dans les panneaux, ceux de la moitié de gauche suffisent.

On tracera la ligne représentative $A_1'B_1'$ des efforts tranchants dus à la *charge permanente*, telle que :

$$A_1A_1' = B_1B_1' = \pm \frac{pl}{2} = \pm \frac{1^T \times 12^m}{2} = \pm 6 \text{ tonnes.}$$

Les efforts tranchants dans les panneaux sont, par suite de la présence des entretoises, à mesurer au milieu de ces panneaux (n° 125) ; soit alors :

1er panneau : ordonnée a_1a_1'.
2e — — a_2a_2'.
3e — — a_3a_3'.

La ligne représentative des efforts tranchants pour la surcharge uniforme de $q = 2$ tonnes par mètre courant se mouvant de A vers B serait une parabole ayant son sommet en A_2 et qui découperait sur la verticale de B_2 un segment :

$$B_2B_2' = \frac{ql}{2} = \frac{2^T \times 12^m}{2} = 12 \text{ tonnes.}$$

Digitized by Google

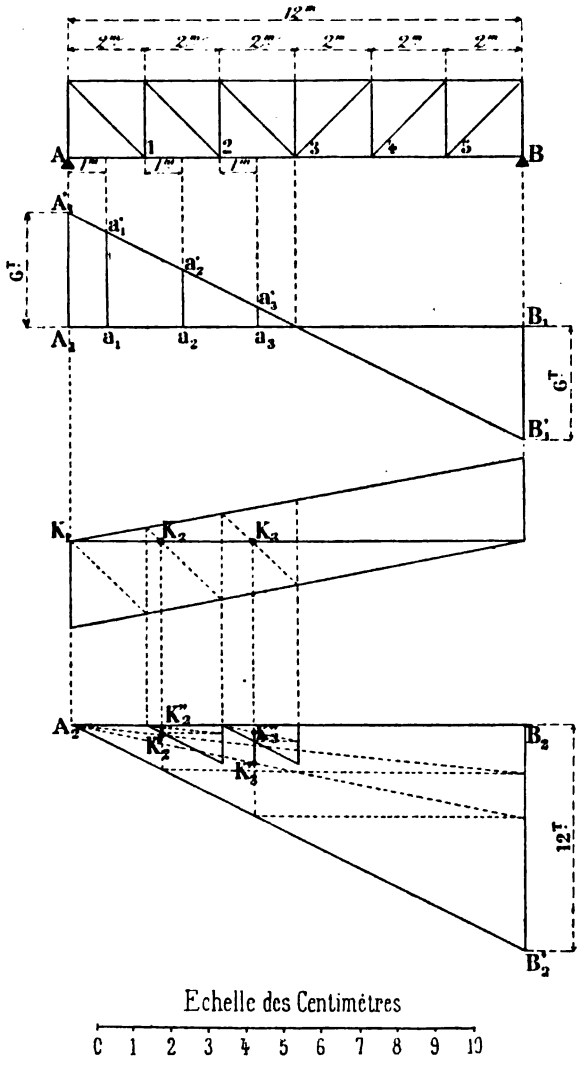


Fig. 282.

Digitized by Google

Mais il n'est pas nécessaire de tracer cette parabole ; la construction exposée page 169 (Remarque I) permet de déterminer les ordonnées pour les points K_2 et K_3. En K_1 l'ordonnée est nulle.

On obtient ainsi les ordonnées représentant les efforts tranchants maxima dans chaque panneau, soit :

1er panneau :	ordonnée 0.		
2e	—	—	$K'_2K''_2$.
3e	—	—	$K'_3K''_3$.

Si les deux tracés, charge permanente et surcharge, ont été faits à la même échelle des forces, il suffira de comparer les ordonnées entre elles, parce qu'elles sont dans le même rapport que les efforts dans les diagonales ; alors, pour un panneau quelconque, si l'ordonnée due à la surcharge variable est plus grande que celle due à la charge permanente, le panneau devra être muni d'une contre-diagonale.

Dans le cas présent, on trouve que :

$K'_2K''_2$ est plus petit que $a_2a'_2$,
$K'_3K''_3$ est plus grand que $a_3a'_3$.

Le troisième panneau et son symétrique n° 4 recevront seuls une contre-diagonale.

La figure 283 montre alors comment est disposé le diagramme de la poutre dessiné en traits pleins.

Les efforts dans les diagonales dus à la charge permanente sont obtenus en décomposant les ordonnées $a_1a'_1$, $a_2a'_2$, ..., $a_6a'_6$ prises au milieu des panneaux suivant les directions des diagonales et des membrures.

Le sens des efforts est le suivant :

D_1, D_2, D_3, D_5. D_6, tension.
D'_4, compression.

La valeur des efforts est consignée dans le tableau final.

Les efforts dans les diagonales dus à la surcharge variable sont obtenus en décomposant les ordonnées 1.1', 2.2', ..., 5.5', suivant les directions des diagonales et des membrures.

Digitized by Google

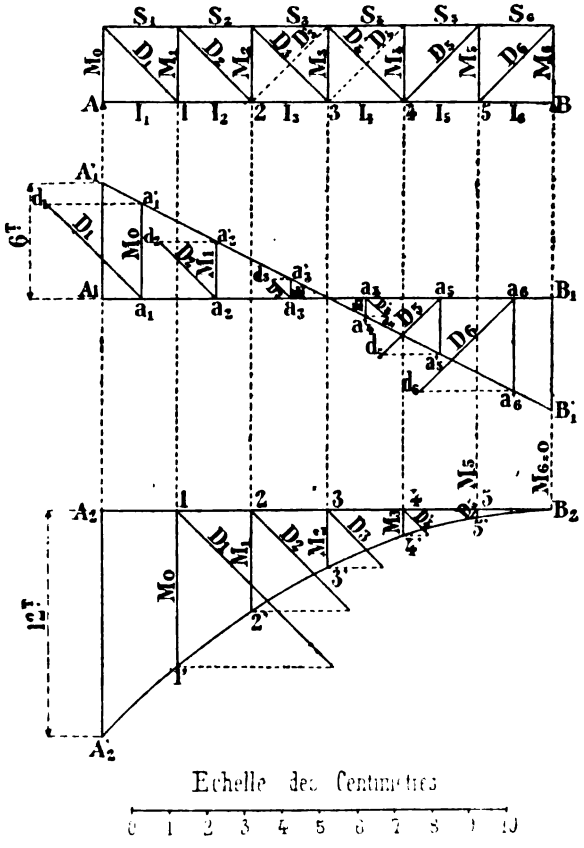


Fig. 283.

Le sens des efforts est le suivant :

D_1, D_2, D_3, D'_4, tension.
D_5, compression.

Digitized by Google

Les valeurs de ces efforts sont également consignées dans le tableau final.

Si l'on tient compte de la symétrie de la poutre, on peut dresser le tableau ci-après, qui donne les variations des efforts dans les diagonales.

EFFORTS DANS LES DIAGONALES

NUMEROS des DIAGONALES	EFFORT DÛ A LA CHARGE PERMANENTE		EFFORT DÛ A LA SURCHARGE VARIABLE		EFFORT MAXIMUM	EFFORT MINIMUM
	tension	compression	tension	compression	positif	positif
D_1 et D_6	7T,0	»	11T,8	»	18T,8	7T,0
D_2 et D_5	4 ,2	»	7 ,5	0T,6	11 ,7	3 ,6
D'_1 et D'_4	1 ,4	»	4 ,4	»	5 ,8	»
D'_3 et D'_4	»	1T,4	2 ,0	»	0 ,6	»

Remarque. — L'effort minimum positif n'a été déterminé que pour les diagonales qui ne sont pas munies de contre-diagonales, car pour les autres il existe un effort de sens contraire. Or, pour ces dernières, il a été supposé qu'elles seraient supprimées lorsque l'effort résultant serait une compression et que les contre-diagonales seules travailleraient; dans ces conditions, il est préférable de ne considérer que l'effort maximum positif seul.

Montants. — En ce qui concerne les montants, les ordonnées représentant les efforts tranchants donnent les valeurs des efforts dans les montants; mais une remarque s'impose en ce qui concerne la charge permanente seule.

Le montant milieu M_3 ne subit aucun effort, car, dans le cas de cette charge, les contre-diagonales D'_3 et D'_4 sont supposées supprimées.

Or les trois forces S_3, S_4 et M_3 doivent se faire équilibre et, S_3 et S_4 étant égaux et de sens contraire, s'annulent et il s'ensuit que $M_3 = 0$.

Mais, dans le cas du diagramme figure 283, M_3 subit un effort qui est représenté par l'ordonnée $a_4a'_4$, et il faudra en tenir compte lorsque la surcharge agira.

Digitized by Google

Il faudra également tenir compte, dans le cas du diagramme, que le montant M_4 ne subit aucun effort.

En résumé, pour la charge permanente seule :

$a_1a'_1$ représente l'effort de compression dans les montants M_0 et M_6,
$a_2a'_2$ représente l'effort de compression dans les montants M_1 et M_5,
$a_3a'_3$ représente l'effort de compression dans les montants M_2 et M_4,

l'effort dans le montant $M_3 = 0$.

Pour combiner la charge permanente et la surcharge, il faudra suivre les indications du diagramme et alors :

$a_1a'_1$	représente l'effort de	*compression*	dans les	montants	M_0 et M_6
$a_2a'_2$	—	—	—	—	M_1 et M_5
$a_3a'_3$	—	—	—	—	M_2 et M_4
$a_4a'_4$	—	—	de *tension*	—	M_3

Pour la surcharge variable, les ordonnées donnent immédiatement les efforts :

1. 1′,	effort de	*compression*	dans les montants	M_0 et M_6
2. 2′,	—	—	—	M_1 et M_5
3. 3′,	—	—	—	M_2 et M_4
4. 4′,	—	—	—	M_3
5. 5′,	effort de	*tension*	dans les montants	M_4 et M_5

Le tableau ci-après donne les variations des efforts dans les montants.

EFFORTS DANS LES MONTANTS

NUMÉROS des MONTANTS	EFFORT DÛ à la CHARGE PERMANENTE		EFFORT DÛ à la SURCHARGE VARIABLE		EFFORT MAXIMUM de compression	EFFORT MINIMUM de compression
	compression	tension	compression	tension		
M_0 et M_6	5^T	»	$8^T,3$	0	$13^T,3$	$5^T,0$
M_1 et M_5	3	»	5 ,4	$0^T,4$	8 ,4	2 ,6
M_2 et M_4	1	»	3 ,0	»	4 ,0	»
M_3	0	1^T	1 ,4	»	0 ,4	»

Digitized by Google

Remarque. — Si la poutre n'avait pas ses membrures parallèles, il faudrait alors :

1° Faire un tracé de Crémona pour la charge permanente qui permettrait de déterminer les efforts dans les diagonales;

2° Pour la surcharge uniforme, tracer par la méthode de Culmann les efforts dans les mêmes diagonales.

L'exemple suivant, quoique s'appliquant à un convoi de charges distinctes, montrera la marche à suivre.

213. Deuxième exemple. — **Poutre de 12 mètres de portée, semi-parabolique, divisée en six panneaux de 2 mètres, soumise à l'action d'une charge permanente de $p = 1$ tonne par mètre courant et qui donne passage au train-type pour voie de 1 mètre agissant à la partie inférieure.**

La poutre est à treillis simple en N et composée de diagonales principales en fer plat (*fig.* 284).

Efforts dans les membrures. — Pour déterminer ces efforts, on ne tiendra compte que des *diagonales principales.* On emploiera la méthode de Ritter, et, à cet effet, on recherchera les moments fléchissants aux nœuds de la poutre.

La *charge permanente* produit les moments suivants donnés par la formule :

$$M = \frac{p}{2} x(l - x).$$

Nœud 1 : $M_1 = \frac{1^T}{2} 2^m \times 10^m = 10^{Tm}.$

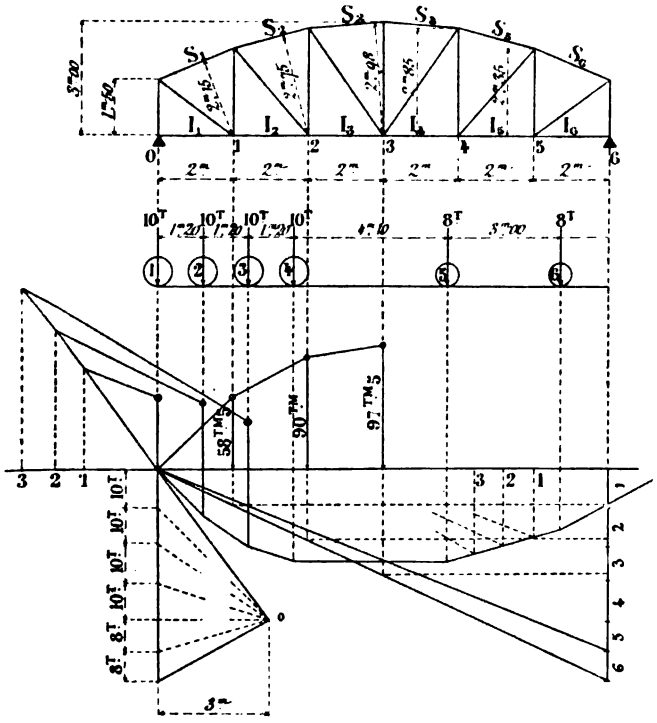
— 2 : $M_2 = \frac{1^T}{2} 4^m \times 8^m = 16^{Tm}.$

— 3 : $M_3 = \frac{1^T}{2} \times 6^m \times 6^m = 18^{Tm}.$

La surcharge, train-type pour voie de 1 mètre, se compose de deux locomotives avec leur tender et de wagons (circulaire ministérielle du 21 août 1891). Les locomotives et tenders seront seuls à considérer pour le cas présent.

Cette surcharge produit aux différents nœuds des moments fléchissants maxima qui seront déterminés par un tracé de Weyrauch (n° 180-A).

Digitized by Google



Echelles

Longueurs 0m01 par mètre
Forces 0m01 pour 10 tonnes
Moments 0m01 pour 30 tonnes-mètres

Centimètres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

FIG. 284.

Digitized by Google

L'épure de ce tracé donne comme résultats :

$$M_1 = 58^{Tm},5.$$
$$M_2 = 90^{Tm},0.$$
$$M_3 = 97^{Tm},5.$$

Les moments fléchissants totaux aux différents nœuds auront alors pour valeur :

$$M_1 = 10^{Tm} + 58^{Tm},5 = 68^{Tm},5.$$
$$M_2 = 16^{Tm} + 90^{Tm},0 = 106^{Tm},0.$$
$$M_3 = 18^{Tm} + 97^{Tm},5 = 115^{Tm},5.$$

Les distances des nœuds aux membrures opposées étant relevées sur le diagramme de la poutre, on pourra donc déterminer les efforts dans ces membrures. On aura ainsi :

$$S_1 = S_6 = -\frac{68^{Tm},5}{2^m,15} = -31^T,86 \text{ (compression)},$$
$$S_2 = S_5 = \frac{106^{Tm},0}{2^m,75} = -38^T,55 \quad \text{—}$$
$$S_3 = S_4 = \frac{115^{Tm},5}{2^m,98} = -38^T,76 \quad \text{—}$$
$$I_1 = I_6 = 0$$
$$I_2 = I_5 = \frac{68^{Tm},5}{2^m,35} = +29^T,15 \quad \text{(tension)},$$
$$I_3 = I_4 = \frac{106^{Tm},0}{2^m,85} = +37^T,19 \quad \text{—}$$

DIAGONALES ET MONTANTS

Recherche des panneaux à munir de contre-diagonales. — Le premier panneau ne possède jamais de contre-diagonale.

Pour le deuxième panneau, on tracera un *Crémona* pour la charge permanente et pour la moitié de gauche seulement.

Les charges en chaque nœud inférieur sont égales, et leur valeur est :

$$1^T \times 2^m = 2 \text{ tonnes}.$$

La figure 285 donne le tracé de l'effort de *tension* dans la diagonale D_2 ; cet effort est de $2^T,1$.

Digitized by Google

En ce qui concerne la surcharge roulante, il suffira de tracer la ligne représentative des efforts tranchants pour le train se mouvant de la gauche vers la droite (180-B).

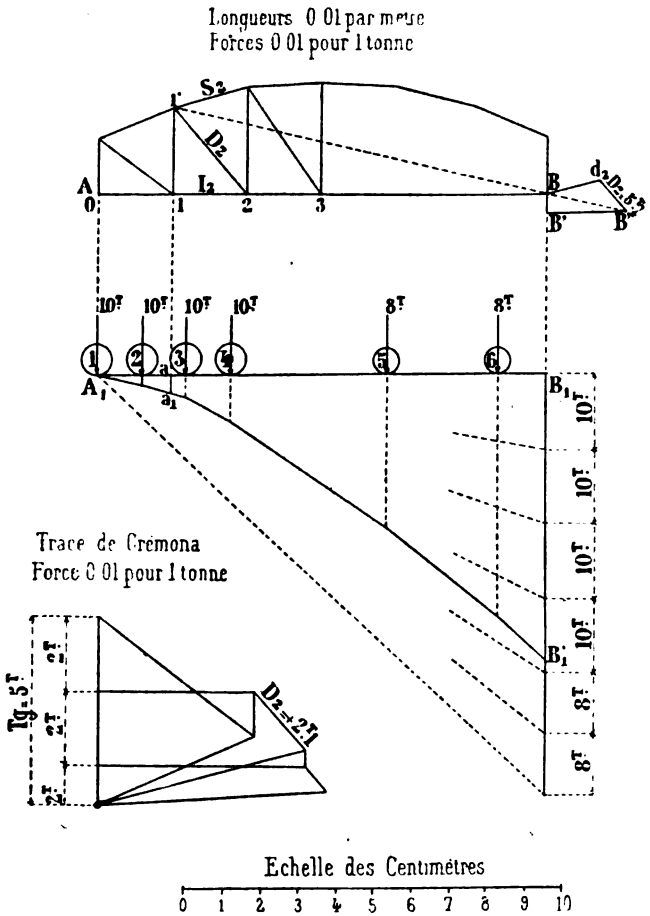


Fig. 285.

Cette ligne $A_1B'_1$ tracée, on amènera le train (la roue de

tête donne dans le cas présent le maximum d'effort) jusqu'au nœud 1 et on recherchera l'effort de compression dans la diagonale D_2 par la méthode de Culmann.

L'effort tranchant maximum dans le panneau 1.2 est donné par l'ordonnée aa_1 que l'on portera en BB'.

Par B' on mènera une parallèle à I_2 et on joindra le point 1' à B par une droite que l'on prolongera jusqu'en B''.

Du point B on mènera une parallèle à S_2 et du point B'' une parallèle à D_2. La longueur $B''d_2$ donne l'effort de *compression* dans la diagonale D_2, qui est de $5^T,7$.

L'effort résultant dans la diagonale D_2 sous l'action de la charge permanente et de la surcharge serait donc de :

$$D_2 = + 2^T,1 - 5^T,7 = - 3^T,6,$$

c'est-à-dire une compression.

Le panneau 2 doit donc être muni d'une contre-diagonale.

A fortiori le panneau 3 doit également être muni d'une contre-diagonale, car l'effort dû à la surcharge augmente, tandis que l'effort dû à la charge permanente diminue.

On peut maintenant tracer le diagramme de la poutre tel qu'il est défini au n° 211 et rechercher les efforts dans les diagonales et les montants sous l'action de la charge permanente par un tracé de Crémona, et ceux dus à la surcharge par la méthode de Culmann.

Ces tracés font l'objet de l'épure (*fig.* 286) et sont obtenus par les procédés déjà exposés (n°s 190 et 203). Ainsi, pour avoir l'effort maximum dû à la surcharge roulante dans la diagonale D_2, par exemple, on amène le train jusqu'au nœud 2 ; l'effort tranchant maximum dans le panneau 1-2 est alors donné par l'ordonnée 2.II.

Par le point II on mène une parallèle à I_2 jusqu'à la rencontre 2' de la droite 1'0 prolongée.

De 2' on mène une parallèle à D_2 et de O une parallèle à S_2 ; on obtient ainsi $2'd_2$, qui donne, à l'échelle des forces, la valeur de l'effort de tension dans la diagonale considérée.

L'effort dans le montant M_1 s'obtient en menant du point 2' la verticale $2'm_2$ jusqu'à la rencontre de la parallèle Od_1 à S_1.

Le tracé de Culmann ne donne pas directement l'effort dans

Digitized by Google

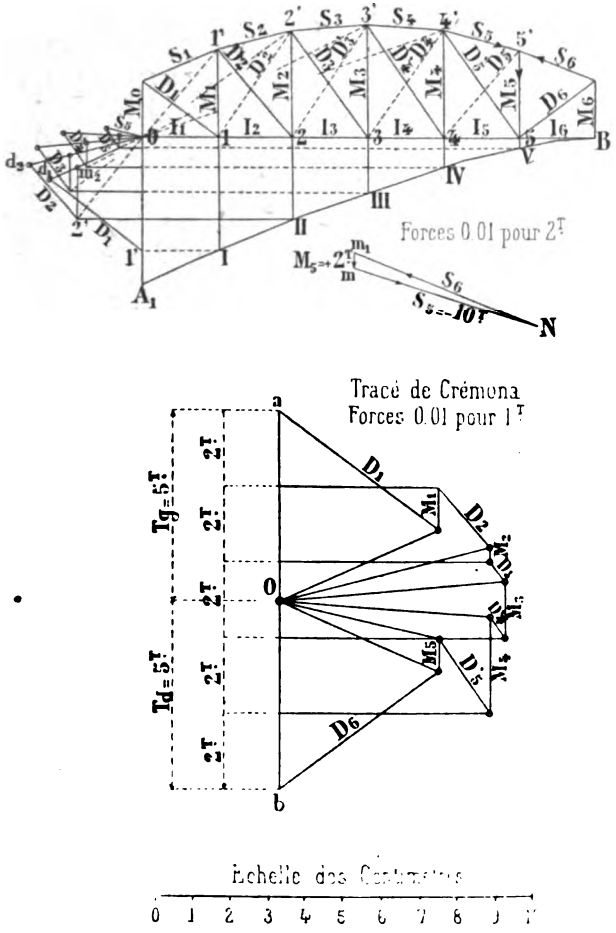


Fig. 286.

Digitized by Google

le montant M_3. Pour le déterminer, il suffit de connaître un des efforts dans les membrures S_3 ou S_6 et, comme on connaît la direction des deux autres, on pourra les déterminer au moyen d'un polygone des forces, qui doit être fermé, puisque les trois efforts S_3, S_6 et M_3 se font équilibre.

L'épure donne la valeur de $S_3 = 10$ tonnes (détermination de D'_3). On portera cette valeur sur une parallèle à S_3, soit Nm. Du point N on mènera une parallèle à S_6 et, par le point m, une parallèle à M_3. L'ordonnée mm_1 représentera, à l'échelle des forces, l'effort dans le montant M_3.

S_6 et S_3 étant des compressions, elles agissent, par conséquent, sur le nœud 5′ suivant le sens des flèches, et, pour qu'il y ait équilibre entre les trois forces aboutissant à ce même nœud 5′, il faut que, dans le polygone des forces, toutes les flèches soient dans le même sens, c'est-à-dire que le sens de la flèche s'éloigne de 5′ pour le montant, ce qui donne une tension.

Le tracé de *Crémona* n'offre rien de particulier.

En relevant les résultats sur les épures, on peut dresser les tableaux ci-après qui donnent les efforts de tension maxima dans les diagonales et les efforts de compression maxima dans les montants.

EFFORTS DANS LES DIAGONALES

NUMÉROS des DIAGONALES	EFFORT DÛ A LA CHARGE PERMANENTE		EFFORT DE TENSION dû à la surcharge variable	EFFORT MAXIMUM de tension
	tension	compression		
D_1 et D_3	5T,30	»	31T,0	36T,30
D_2 et D_4	2 ,20	»	18 ,0	20 ,20
D_3 et D_4	0 ,65	»	14 ,0	14 ,65
D'_3 et D'_4	»	2T,40	10 ,0	7 ,60
D_2 et D'_5	»	0 ,65	6 ,5	5 ,85

Digitized by Google

EFFORTS DANS LES MONTANTS

NUMÈRO des MONTANTS	EFFORT DÛ A LA CHARGE PERMANENTE		EFFORT DE COMPRESSION dû à la surcharge variable	EFFORT MAXIMUM de compression
	compression	tension		
M_0 et M_6	$5^T,00$	»	$30^T,0$	$35^T,0$
M_1 et M_5	1 ,00	»	13 ,0	14 ,0
M_2 et M_4	»	$0^T,40$	9 ,5	9 ,1
		2 ,60	3 ,0	0 ,4
M_3	»	1 ,50	6 ,0	4 ,5

NOTA. — Pour les deux montants M_2 et M_4, c'est la compression $9^T,1$ qu'il faut choisir.

REMARQUE. — Si l'on désirait obtenir les efforts minima de tension et de compression pour les diagonales et les montants, il faudrait faire le tracé de Culmann pour la poutre avec les montants et les diagonales en traits pointillés.

Cela n'a pas été fait sur l'épure pour ne pas la compliquer; mais on pourra se reporter au n° 204, afin de se rendre compte de la marche à suivre.

On aurait ainsi des compressions pour D_5, D_4, D'_3 et D'_2 et des tensions pour M_5, M_4, M_3 et M_2.

Ces efforts seraient combinés avec ceux déjà trouvés et on obtiendrait les efforts minima dans les barres considérées.

§ 9. — POUTRES A MEMBRURES PARALLÈLES AVEC TREILLIS A MAILLES SERRÉES

214. Généralités. — On emploie assez souvent, notamment pour les petites passerelles, des poutres à membrures parallèles avec des treillis multiples, qui forment un réseau de barres dont les vides ou mailles sont rapprochés (*fig.* 287).

Les diagonales qui composent ces treillis sont des profilés (cornières ou fer à U) ou bien des fers plats.

Digitized by Google

Pour une pareille poutre, il serait beaucoup trop long de la décomposer en tous ses systèmes et d'appliquer à chacun d'eux les procédés établis précédemment.

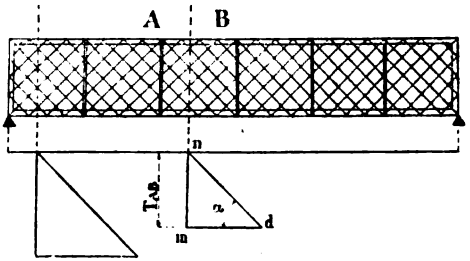


Fig. 287.

On se contente dans la pratique de calculer cette poutre de la manière suivante :

215. Membrures. — Les membrures sont calculées comme si la poutre était à âme pleine, c'est-à-dire qu'on détermine les moments fléchissants, en tenant compte de la répartition des charges par les entretoises, s'il y en a, et on établit la section de ces membrures par les moments d'inertie.

On aura ainsi pour une section quelconque dans laquelle agit le *moment de flexion* M :

$$I = \frac{M\frac{h}{2}}{R},$$

R étant le coefficient de travail admis pour le métal considéré.

216. Diagonales. — Les diagonales doivent résister à l'effort tranchant. Si la charge est transmise par les entretoises, et c'est généralement le cas, l'effort tranchant dans un même panneau est constant, et toutes les diagonales de ce panneau auront la même section.

Digitized by Google

Les efforts tranchants dus à la charge permanente et à la surcharge étant déterminés, voici comment on procède pour l'évaluation des efforts dans les barres. Soit un panneau AB d'une poutre à treillis composée de huit systèmes simples, c'est-à-dire qu'une section entre deux nœuds rencontre 8 diagonales dans lesquelles l'effort tranchant maximum a pour valeur T_{AB}.

Si on décompose cet effort tranchant *mn* suivant la direction des barres et une parallèle aux membrures, on obtient comme effort total dans les diagonales la longueur *nd*.

Si α est l'angle que fait la direction des diagonales avec celle des membrures, on a la relation :

$$mn = nd \sin \alpha,$$

d'où :

$$nd = \frac{mn}{\sin \alpha}.$$

Or, comme $mn = T_{AB}$, l'effort total dans les diagonales aura pour valeur :

$$D_{AB} = nd = \frac{T_{AB}}{\sin \alpha}.$$

Toutes les barres rencontrées par la section devant concourir pour résister à l'effort tranchant, l'effort dans une diagonale sera, dans le cas présent :

$$D_{AB} = \frac{T_{AB}}{\sin \alpha} \times \frac{1}{8},$$

et en général, si *n* est le nombre de barres rencontrées par la section :

$$D = \frac{T}{\sin \alpha} \times \frac{1}{n}.$$

Parmi ces diagonales, certaines sont comprimées et les autres tendues; mais, en général, les mailles sont assez serrées pour que la longueur libre des barres soit faible. Dans ces conditions, il n'y a pas à craindre le flambage, même

Digitized by Google

pour les fers plats, et on donne à toutes les barres la même section.

Si la charge agissait directement sur la poutre, il suffirait de sectionner fictivement cette poutre en petits panneaux et de déterminer la section des diagonales pour chacun de ces petits panneaux.

Les montants ne sont ici que des pièces accessoires; mais ils sont nécessaires pour raidir la poutre dans le sens transversal et éviter surtout le voilement de la membrure supérieure.

Digitized by Google

CHAPITRE XV

CONTREVENTEMENTS DES PONTS

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

Ainsi que le nom l'indique, le *contreventement* est destiné à donner de la stabilité transversale à un pont sous l'action du vent.

Les ponts peuvent être contreventés de trois manières, savoir :

1° A la partie inférieure (un plan de contreventement horizontal);

2° A la partie inférieure et à la partie supérieure (deux plans de contreventement horizontaux);

3° Avec deux plans de contreventement horizontaux et avec entretoisement vertical.

Le contreventement à la partie inférieure est le plus usité, car, pour qu'il y ait deux plans de contreventement, il est nécessaire que les poutres atteignent une hauteur suffisante pour permettre le passage, sous le contreventement supérieur, des véhicules destinés à circuler sur le pont.

L'entretoisement vertical ne s'emploie guère que pour les ponts à voie supérieure.

Pour réaliser un contreventement horizontal, il suffit de constituer une poutre horizontale capable de résister aux efforts produits par le vent, et à cet effet on réunit entre elles les membrures inférieures ou supérieures des deux poutres par des diagonales. Ces diagonales, placées sous le tablier et en même temps à la partie supérieure des poutres, s'il y a deux

Digitized by Google

plans de contreventement, s'appellent les barres de contreventement.

Toutefois le contreventement inférieur est souvent formé par le tablier lui-même du pont; tel est le cas d'un pont avec platelage en tôle unie ou en tôle striée.

Pour les petites passerelles avec platelage en bois, celui-ci peut, au besoin, faire office de contreventement.

En résumé, le contreventement est donc formé d'une ou de deux poutres à treillis ou à âme pleine (cas d'un platelage en tôle) placées dans un plan horizontal, pour lesquelles on pourra déterminer, par les méthodes déjà exposées, les efforts qui les composent, et les sections des barres, dès que l'on connaîtra les charges agissant sur ces poutres.

Ces charges dépendent naturellement de la pression du vent qui agit sur l'ouvrage considéré. La circulaire ministérielle du 29 août 1891 indique à l'article 5 du règlement : qu'on devra admettre que cette pression du vent par mètre carré de surface verticale peut s'élever à 270 kilogrammes, mais que le passage des véhicules est interrompu lorsqu'elle atteint 170 kilogrammes.

En outre, pour les poutres de pont qui sont à treillis, on supposera que cette pression s'exerce sur la surface nette, déduction faite des vides, de chacune des maîtresses poutres, qu'elle agit intégralement sur l'une d'elles et que, sur la suivante, elle est diminuée d'une fraction de sa valeur égale au rapport de la surface nette de la première à la surface totale limitée par son contour.

§ 2. — PONT AVEC UN SEUL PLAN DE CONTREVENTEMENT A LA PARTIE INFÉRIEURE

Dans ce système, l'effort total dû au vent sera supporté entièrement par le contreventement inférieur. Les efforts partiels sont transmis à ce contreventement par les montants, les diagonales, les membrures inférieures, autant de pièces qu'il sera nécessaire de vérifier conjointement avec le contreventement proprement dit.

Digitized by Google

217. Pont avec maîtresses poutres à âme pleine. — Deux cas peuvent se présenter :

1° Pont pour voie de terre ;

2° Pont pour voie de chemin de fer.

A. *Pont pour voie de terre.* — Dans ce cas, le plus grand effort sur le contreventement sera donné par le maximum de pression du vent, c'est-à-dire 270 kilogrammes par mètre carré de surface verticale. Il n'y a pas lieu, en effet, d'examiner le passage de la surcharge, qui n'offre d'ailleurs pas beaucoup de surface au vent et, d'un autre côté, la circulation serait impossible, même avec un vent de 100 kilogrammes.

Dans ces conditions, si h est la hauteur des poutres, la charge par mètre courant agissant sur la poutre horizontale formant contreventement inférieur aura pour valeur :

$$p_h = 270^k \times h.$$

On pourra donc ensuite déterminer, par les méthodes ordinaires, les efforts tranchants dans toute la longueur du pont et, par suite, les efforts dans les barres de contreventement, si l'on a affaire à une poutre à treillis, ou bien calculer l'épaisseur des tôles de platelage, si le tablier est constitué par des tôles unies ou striées.

L'effort p_h produit en outre un moment de torsion autour des appuis qui a pour effet de charger la poutre opposée au vent et de soulager la poutre côté du vent.

Si P_h est la résultante des actions du vent sur le pont par mètre courant, P_h étant égal à $p_h = 270^{kg} \times h$, le moment de torsion a pour valeur :

$$M_t = P_h \times \delta,$$

δ étant la distance de la résultante au-dessus des appuis, et le couple équivalent composé des forces p_v, agissant verticalement dans les poutres avec un bras de levier d, aura pour valeur :

$$M_t = p_v \times d.$$

Soit alors l'égalité :

$$P_h \times \delta = p_v \times d,$$

Digitized by Google

d'où l'on tire :

$$p_v = \frac{P_h \delta}{d}.$$

En conséquence, la poutre, côté du vent, sera soulagée verticalement de la charge par mètre $\frac{P_h \delta}{d}$, tandis que la poutre opposée sera surchargée de la même quantité $\frac{P_h \delta}{d}$.

B. *Pont pour voie de chemin de fer.* — Si le pont est destiné à une voie de chemin de fer, il y aura lieu d'examiner, en outre, le passage des wagons sur l'ouvrage, avec une pression du vent de 170 kilogrammes par mètre carré, et de voir si, dans cette hypothèse, la charge par mètre courant de tablier n'est pas supérieure à celle obtenue avec une pression du vent de 270 kilogrammes sans véhicule sur le pont.

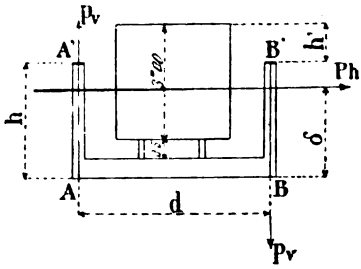


Fig. 288.

On admet que le train offre au vent une surface de 3 mètres carrés par mètre de longueur et que la hauteur totale des véhicules est de $3^m,50$ au-dessus des rails, savoir : 3 mètres de hauteur de caisse et $0^m,50$ pour les roues (*fig.* 288).

Si l'on suppose que la caisse seule entre en jeu, on peut alors dire que la surface présentée au vent par mètre courant de pont est égale à 1 mètre carré par mètre de hauteur de caisse.

Dans ces conditions, on placera le véhicule sur le pont, et, si h' est la hauteur visible de la caisse au-dessus des poutres, l'effort du vent par mètre courant sera de :

$$p_h = 170^k (h + h').$$

Cet effort sera supporté entièrement par le contreventement horizontal.

Digitized by Google

Le supplément de charge verticale sur la poutre BB′ sera obtenu par la formule :

$$p_v = \frac{P_h \delta}{d}.$$

P_h étant la résultante des deux efforts $170 \times h$ et $170 \times h'$, la position de cette résultante sera déterminée graphiquement ou par le calcul.

218. Pont avec poutre à treillis. — Deux cas sont également à examiner :

1° Pont pour voie de terre ;

2° Pont pour voie de chemin de fer.

A. *Pont pour voie de terre.* — Dans ce cas, le plus grand effort dans le contreventement sera donné par un vent de 270 kilogrammes pour la même raison déjà énoncée précédemment, et le contreventement supportera entièrement l'effort du vent.

La charge horizontale par mètre courant se détermine d'après les indications de la circulaire ministérielle. Pour la première poutre exposée au vent, on recherchera, pour chacune des parties la composant, la surface nette frappée par mètre courant ; on aurait par exemple :

Membrure supérieure.....	M	mètre carré
Membrure inférieure.....	M′	—
Diagonales.....	d	—
Montants.....	m	—

Soit une surface nette pour la première poutre de

$$\Omega = (M + M' + d + m) \text{ mètres carrés.}$$

La surface des vides de cette première poutre serait donc, si h est la hauteur totale de la poutre,

$$\Omega' = h^m \times 1^m - \Omega,$$

et le rapport de la surface des vides à la surface totale a pour expression :

$$\rho = \frac{\Omega'}{h} = \frac{h - \Omega}{h}.$$

Digitized by Google

Connaissant ce rapport, il sera facile de déterminer les surfaces élémentaires réduites pour la poutre opposée au vent, si les dimensions des barres sont les mêmes dans les deux poutres, ce qui est le cas général.

Ainsi on aurait comme surfaces réduites :

Membrure supérieure..... $= M \times \rho$
Diagonales..... $= d \times \rho$
Montants..... $= m \times \rho$

La membrure inférieure de la poutre opposée au vent, dans le cas d'une voie inférieure, est complètement cachée par le platelage ou le plancher et ne supporte aucun effort.

De sorte que, pour la deuxième poutre, la surface frappée par le vent serait :

$$\omega = (M + d + m)\,\rho.$$

La surface totale à considérer serait $\Omega + \omega$, et la charge par mètre courant, que devra supporter le contreventement horizontal, aura pour valeur :

$$p_h = 270^k\,(\Omega + \omega).$$

Il est bien entendu que, si la hauteur h varie comme dans les poutres semi-paraboliques, par exemple, il faudra constituer un panneau moyen qui servira de base au calcul des surfaces.

On entend par panneau moyen un panneau dont la hauteur est une moyenne des hauteurs variables de la poutre et dont les dimensions des barres (membrures, diagonales et montants) sont également des dimensions moyennes.

Pour les poutres à treillis, la recherche de la position de la résultante devra s'effectuer en appliquant au centre d'action de chaque type de barres l'effort qui lui est correspondant.

Ainsi, pour les membrures supérieures, le centre d'action se trouvera au milieu de la hauteur M et l'effort correspondant sera :

$$M \times 270^k + M \times \rho \times 270^k,$$

Digitized by Google

soit :

$$270^k \times M (1 + \rho).$$

Pour les diagonales et les montants, le centre d'action sera le même et se trouvera placé au milieu de la hauteur qui sépare les deux membrures.

Les efforts seraient :

$$270^k (d + m) + 270^k (\rho d + \rho m),$$

soit :

$$270^k (d + m) (1 + \rho).$$

Enfin, en ce qui concerne la membrure inférieure, le centre d'action se trouverait au milieu de la hauteur M', et l'effort serait :

$$270^k \times M'.$$

On pourra ainsi déterminer la position et l'intensité de la résultante et, par suite, la charge verticale supplémentaire :

$$p_v = \frac{P_h \times \delta}{d},$$

que devra supporter la poutre opposée au vent.

219. Application. — Soit le panneau moyen d'une poutre à treillis à membrures parallèles (*fig.* 289).

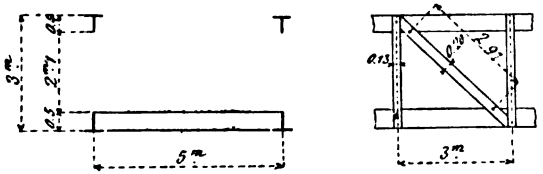


Fig. 289.

On aura comme surfaces élémentaires frappées par le vent, par mètre courant de pont :

Digitized by Google

Poutre côté du vent :

Membrure supérieure	$0^m,4 \times 1^m$	$= 0^{m2},400$
Diagonales	$\frac{2^m,97 \times 0,2}{3^m}$	$= 0\ ,198$
Montants	$\frac{2^m,10 \times 0,13}{3^m}$	$= 0\ ,091$
Membrure inférieure	$0^m,5 \times 1^m$	$= 0\ ,500$
Surface nette de la première poutre.		$\Omega = 1^{m2},189$

Rapport de la surface des vides à la surface nette :

$$\rho = \frac{h - \Omega}{h} = \frac{3^{m2} - 1^{m2},189}{3^{m2}} = 0,60.$$

Poutre opposée au vent. — Surfaces réduites :

Membrure supérieure	$0^{m2},40 \times 0,60$	$= 0^{m2},240$
Diagonales	$0\ ,198 \times 0,60$	$= 0\ ,119$
Montants	$0\ ,091 \times 0,60$	$= 0\ ,055$
Surface réduite de la deuxième poutre.		$\omega = 0^{m2},414$

Charge par mètre courant sur le contreventement, pour une pression de vent de 270 kilogrammes par mètre carré :

$$p_h = 270^k\,(1,189 + 0,414) = 433 \text{ kilogrammes.}$$

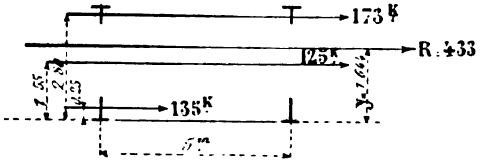


Fig. 290.

La recherche de la position de la résultante s'effectuerait de la manière suivante (*fig.* 290) :

Digitized by Google

Membrures supérieures :

Effort..... $270^k(0,400 + 0,240) = 173^k$

Diagonales et montants :

Effort. $270^k(0,198 + 0,091 + 0,119 + 0,055) = 125$

Membrure inférieure :

Effort..... $270^k \times 0^{m2},500 = 135$

TOTAL..... 433^k

Position de la résultante :

$$y = \frac{173^k \times 2^m,80 + 125^k \times 1^m,55 + 135^k \times 0^m,25}{433^k} = 1^m,644.$$

La charge verticale supplémentaire pour la poutre opposée au vent sera, par mètre courant :

$$p_v = \frac{433^k \times 1^m,644}{5^m} = 142 \text{ kilogrammes.}$$

B. *Pont pour voie de chemin de fer.* — Si le pont est construit pour voie de chemin de fer, il y aura lieu d'examiner le passage du train sur le pont en supposant alors une pression du vent de 170 kilogrammes par mètre carré.

Dans cet examen, il faudra tenir compte, d'une façon très précise, de la hauteur des véhicules par rapport aux poutres, car les surfaces de ces véhicules frappés *par le vent* ne sont pas toutes de la même catégorie, suivant qu'elles se trouvent en dehors des poutres ou à l'abri de celles-ci.

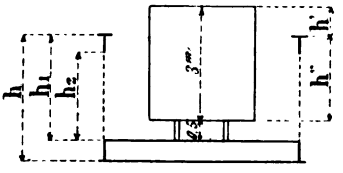


FIG. 291.

Pour la *première poutre* exposée au vent, on déterminera la surface nette au mètre courant d'après la méthode exposée pour la voie de terre, soit Ω cette surface.

Le train, dans le cas de la figure 291, dépasse la hauteur des poutres ; il y a donc deux catégories de surfaces à considérer :

Digitized by Google

1° Celle qui est frappée directement et qui donne une surface par mètre courant de :

$$\Omega_t = h' \times 1 \text{ mètre};$$

2° Celle qui est intérieure aux poutres et pour laquelle on doit faire une réduction, puisque le vent frappe d'abord la poutre en treillis.

Les parties de la poutre qui cachent le train sont la membrure supérieure, les diagonales et les montants :

Soient Ω_M, Ω_d et Ω_m les surfaces nettes par mètre courant de la membrure supérieure, des diagonales et des montants, et ω_t la surface *réelle* du train correspondant à la hauteur h', telle que :

$$\omega_t = h' \times 1^m.$$

Le rapport des vides à la surface totale relative aux parties seules qui cachent le train est de :

$$\rho = \frac{h_1 - (\Omega_M + \Omega_d + \Omega_m)}{h_1},$$

et la surface réduite pour la partie du train cachée par la première poutre sera de :

$$\omega'_t = \omega_t \times \rho.$$

Il y a lieu maintenant de rechercher les surfaces réduites pour la deuxième poutre.

D'après l'inspection de la figure, les seules pièces qui puissent être frappées par le vent sont : la membrure inférieure et les treillis, ces derniers sur une hauteur de $0^m,50$.

La membrure inférieure est cachée par le plancher, et il ne resterait donc que les diagonales et les montants sur une hauteur de $0^m,50$ environ, quantité négligeable par rapport au reste.

Toutefois, si on voulait évaluer la surface réduite de cette partie, on aurait comme rapport des vides à la surface totale relative aux diagonales et montants :

$$\rho_1 = \frac{h_2 - (\Omega_m + \Omega_d)}{h_2}.$$

Digitized by Google

Surfaces réduites pour $0^m,50$ de hauteur seulement :

$$\Omega'_d + \Omega'_m = (\Omega_m + \Omega_d) \times \rho_1 \times \frac{0,50}{h_2}.$$

Finalement, la charge horizontale par mètre courant due à un vent de 170 kilogrammes serait :

$$p_h = 170^k[\Omega + \Omega_t + \omega'_t + \Omega_d + \Omega'_m].$$

La résultante de toutes les charges partielles se déterminerait comme précédemment.

220. Exemple. — On examinera le passage du train sur le pont de l'exemple précédent (n° 219).

Poutre du côté du vent. — Surfaces nettes. — Mêmes résultats.

Membrure supérieure ...	$0^{m2},400$	$0^{m2},689$
Diagonales.....	0 ,198	
Montants.....	0 ,091	
Membrure inférieure....	0 ,500	
Surface nette.. $\Omega =$	$1^{m2},189.$	

Partie du train au-dessus des poutres :

Train :

$$\omega_t = 1^m \times 1^m = 1 \text{ mètre carré.}$$

Partie du train cachée par la poutre avant :

$$\omega_t = 2^m \times 1^m = 2 \text{ mètres carrés.}$$

Rapports des vides à la surface totale relative aux membrures supérieures, diagonales et montants, hauteur à considérer : $h_1 = 2^m,50$:

$$\rho = \frac{2^m,50 - 0,689}{2,50} = 0,72.$$

Surface réduite du train :

$$\omega'_t = 2^{m2} \times 0,72 = 1^{m2},44.$$

Digitized by Google

Diagonales et montants sur une hauteur de $0^m,50$. — Rapport des vides à la surface totale relative aux diagonales et montants seuls, hauteur à considérer : $h_2 = 2$ mètres :

$$\rho = \frac{2^m - (0,198 + 0,091)}{2^m} = 0,86.$$

Surfaces réduites pour $0^m,50$ de hauteur :

$$\Omega_d' + \Omega_m' = (0,198 + 0,091) \times 0,86 \times \frac{0,5}{2^m} = 0^{m2},062.$$

La charge horizontale par mètre courant due à un vent de 170 kilogrammes par mètre carré serait de :

$$p_h = 170^k(1^{m2},189 + 1^{m2} + 1^{m2},44 + 0^{m2},062) = 627 \text{ kilogr.}$$

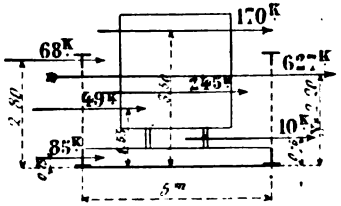


Fig. 292.

Cette charge est supérieure à celle qui avait été trouvée pour un vent de 270 kilogrammes ; il faudrait donc calculer le contreventement avec $p_h = 627$ kilogrammes.

Recherche de la position de la résultante (*fig.* 292). — Efforts :

Membrure supérieure.....	$0,400 \times 170^k$	=	68^k
Diagonales et montants, poutre avant.	$0,289 \times 170$	=	49
Membrure inférieure.....	$0,500 \times 170$	=	85
Train au-dessus des poutres.....	$1^{m2} \times 170$	=	170
Train caché par la poutre avant.....	$1,44 \times 170$	=	245
Diagonales et montants, poutre arrière	$0,062 \times 170$	=	10
TOTAL.....			627^k

Position de la résultante :

$$y = \frac{170^k \times 3^m,50 + 68^k \times 2^m,80 + 245^k \times 2^m + 49^k \times 1^m,55 + 10^k \times 0^m,75 + 85^k \times 0^m,25}{627^k}.$$

$$y = 2^m,20.$$

Digitized by Google

La charge verticale supplémentaire pour la poutre opposée au vent sera, par mètre courant :

$$p_v = \frac{627^k \times 2^m,20}{5^m} = 276^k.$$

§ 3. — PONT A VOIE INFÉRIEURE AVEC DEUX PLANS DE CONTREVENTEMENT

221. Généralités. — Les contreventements sont placés l'un à la partie inférieure, et l'autre à la partie supérieure.

Le contreventement supérieur ne peut être rendu bien efficace qu'à la condition de rencontrer sur les appuis un cadre résistant pour transmettre à la partie inférieure les réactions du contreventement supérieur.

Le cadre des appuis, qui ne peut être entretoisé transversalement par des croix de Saint-André, présentera toujours une déformabilité assez grande.

En conséquence, l'efficacité du contreventement supérieur dépendra de la raideur du cadre sur appuis.

Plusieurs cas peuvent donc se présenter, savoir :

1° L'entretoise supérieure a une raideur suffisante pour transmettre la réaction du contreventement supérieur.

Le cadre se présente alors comme l'indique la figure 293.

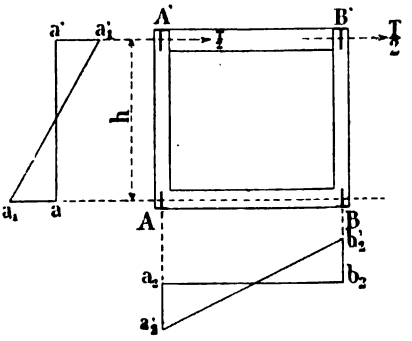


Fig. 293.

Si T est la réaction totale du contreventement supérieur, cette réaction agira par moitié sur chaque montant, et la ligne représentative des moments fléchissants, dans ces mon-

Digitized by Google

tants est une droite $a'a'_1$, telle que les ordonnées

$$a'a'_1 = aa_1 = \frac{Th}{4}.$$

Il se produit en même temps dans *les deux entretoises* supérieure et inférieure des moments fléchissants dont la ligne représentative est également une droite $a'_2b'_2$, telle que :

$$a_2a'_2 = b_2b'_2 = \frac{Th}{4}.$$

Il ressort donc que les moments fléchissants aux points A, A', B, B' sont les mêmes aussi bien dans les montants que dans les entretoises.

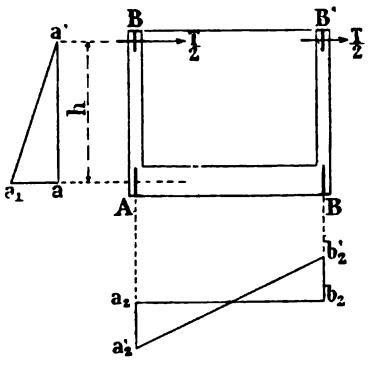


Fig. 294.

2° Le cadre des appuis n'a pas la raideur nécessaire pour résister à la réaction supérieure. Dans ce cas, on ne tient pas compte du contreventement supérieur et on fait supporter tout l'effort au contreventement inférieur (*fig.* 294).

Dans ces conditions, la ligne représentative des moments fléchissants dans les montants est la droite a_1a', telle que

$$aa_1 = \frac{Th}{2}.$$

Dans l'entretoise inférieure, il se produira les mêmes moments fléchissants, et on aura :

$$a_2a'_2 = b_2b'_2 = aa_1 = \frac{Th}{2}.$$

On pourrait, dans une certaine mesure, appliquer au con-

Digitized by Google

treventement supérieur une partie de l'effort que le cadre lui permet de transmettre, et le contreventement inférieur serait alors diminué d'autant.

Remarque importante. — Quelle que soit la raideur du cadre sur appui, les efforts dus au train sont toujours supportés par le *contreventement inférieur.*

222. Exemple d'un pont à voie inférieure ayant deux plans de contreventement avec cadres sur les appuis permettant d'intéresser les deux contreventements. — Le panneau moyen et la coupe transversale du pont sont représentés dans la figure 295.

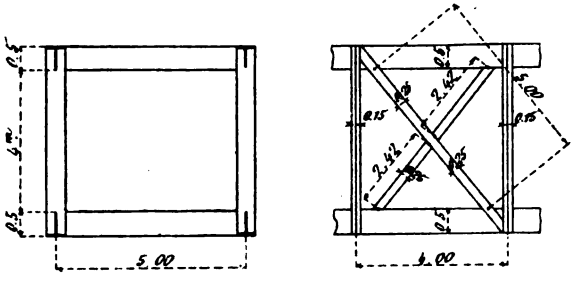


Fig. 295.

1° Vent de 270 kilogrammes par mètre carré sans surcharge. — Les surfaces frappées par le vent, par mètre courant de pont, sont :

Poutre côté du vent :

Membrure supérieure.....		$0^{m2},500$	
Membrure inférieure.....		0 ,500	
Diagonales.....	$\frac{(5,00 + 2 \times 2,42)\,0,25}{4^m,00}$ =	0 ,620	0,770
Montant.....	$\frac{4^m \times 0,15}{4^m,00}$ =	0 ,150	
	Total.....	$1^{m2},770$	

Digitized by Google

Poutre opposée au vent :

Le rapport des vides à la surface nette est de :

$$\rho = \frac{5^{m2} - 1^{m2},77}{5^{m2}} = 0,646.$$

Les surfaces réduites de la seconde poutre seront alors :

Membrure supérieure.	$0^{m2},500 \times 0,646 =$	$0^{m2},323$	
Diagonales.....	$0\ ,620 \times 0,646 =$	$0\ ,400$	0,497
Montants.....	$0\ ,150 \times 0,646 =$	$0\ ,097$	
	TOTAL.....	$0^{m2},820$	

NOTA. — La membrure inférieure est cachée et ne reçoit pas l'action du vent.

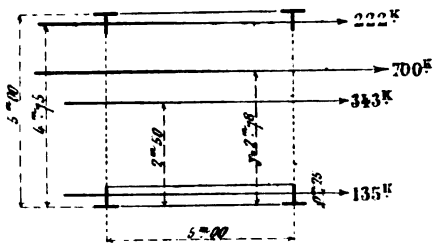


FIG. 296.

Recherche de la résultante pour une pression de 270 kilogrammes (fig. 296). — La charge sur chaque élément est :

Membrures supérieures $(0^{m2},500 + 0^{m2},323) \times 270^k =$	222^k
Diagonales et montants $(0^{m2},770 + 0^{m2},497) \times 270^k =$	343^k
Membrure inférieure... $0^{m2},500 \times 270^k =$	135^k
TOTAL.....	700^k

$$y = \frac{222^k \times 4^m,75 + 343^k \times 2^m,50 + 135^k \times 0^m,25}{700^k} = 2^m,78.$$

Si les plans de contreventement sont en AB et A'B, la

Digitized by Google

charge horizontale par mètre courant dans chacun de ces plans sera :

$$\text{Contreventement supérieur A'B'.} \quad \frac{700^k \times 2^m,78}{5^m} = 389^k.$$

$$\text{Contreventement inférieur AB...} \quad \frac{700^k \times 2^m,22}{5^m} = 311^k.$$

La charge verticale supplémentaire sur la poutre opposée au vent sera :

$$p_v = \frac{700^k \times 2^m,78}{5^m} = \mathbf{389} \text{ kilogrammes.}$$

Si le pont doit donner passage aux trains de chemins de fer, il y a lieu d'examiner le cas du vent de 170 kilogrammes avec le train sur le pont.

2° Vent de 170 kilogrammes avec surcharge sur le pont. — Les surfaces frappées par le vent sur la première poutre ne changent pas ; elles ont été déterminées pour le vent de 270 kilogrammes.

Après la première poutre, le vent frappe le train, qui a une surface de 3 mètres carrés par mètre courant.

Il y a lieu de réduire cette surface en tenant compte de l'obstacle présenté par les montants et les diagonales, seulement, de la première poutre.

Le rapport des vides présentés par les montants et les diagonales à la surface totale de ces mêmes pièces est :

$$\rho_1 = \frac{4^m - 0^m,77}{4^m} = 0,80 \text{ environ.}$$

La surface réduite du train sera donc :

$$3^{m2} \times 0,80 = 2^{m2},40.$$

Après le train, le vent rencontre la deuxième poutre. Les pièces qui peuvent être frappées sont : la membrure supérieure, les diagonales et les montants, savoir la membrure supérieure sur toute la hauteur, les diagonales et les montants sur 1 mètre de hauteur.

Le rapport des vides à la surface totale est le même que

Digitized by Google

celui déterminé pour le vent de 270 kilogrammes, soit :

$$\rho = 0,646.$$

On aura donc pour la seconde poutre :

Membrure supérieure..... $0^{m2},50 \times 0,646 = 0^{m2},323$

Diagonales et montants.. $0^{m2},77 \times 0,646 \times \frac{1^m}{4^m} = 0^{m2},124.$

Recherche des charges dans les contreventements (*fig.* 297). — On séparera cette recherche en deux parties :

1° Résultante des efforts sur les poutres seules et répartition des charges sur les deux plans de contreventement ;

2° Action du train sur le contreventement inférieur.

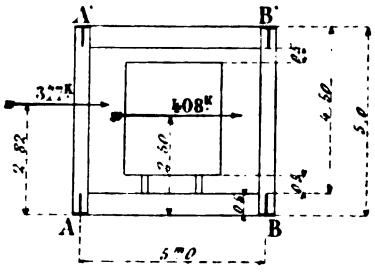


Fig. 297.

Les efforts élémentaires sur les pièces du pont sont, avec un vent de 170 kilogrammes :

Membrures supérieures. $(0^{m2},50 + 0^{m2},323) \times 170^k = 140^k$
Diagonales et montants. $(0^{m2},77 + 0^{m2},124) \times 170^k = 152^k$
Membrure inférieure..... $0^{m2},50 \times 170^k = 85^k$

TOTAL..... 377^k

La résultante de ces efforts élémentaires est à une hauteur :

$$y = \frac{140^k \times 4^m,75 + 152^k \times 2^m,50 + 85^k \times 0^m,25}{377^k} = 2^m,82.$$

La répartition des charges par mètre courant dans les contreventements sera :

Contreventement inférieur... $\frac{377^k \times 2^m,18}{5^m} = 164^k$

Contreventement supérieur .. $\frac{377^k \times 2^m,82}{5^m} = 213^k$

Digitized by Google

Le train transmet tout l'effort dans le contreventement inférieur; cet effort a pour valeur, par mètre courant de pont :

$$2^{m2},40 \times 170^k = 408^k.$$

De sorte que pour un vent de 170 kilogrammes :

Le contreventement supérieur recevra une charge par mètre courant de ..... 213^k

Le contreventement inférieur :

Pièces du pont.....	164^k
Train.....	408^k
Soit un total de....	572^k

La charge verticale supplémentaire sur la poutre opposée au vent se déterminera de la manière suivante :

La résultante totale de toutes les actions sur les poutres et sur le train se trouve située à une hauteur de :

$$Y = \frac{377^k \times 2^m,82 + 408^k \times 2^m,50}{785^k} = 2^m,65.$$

Valeur de la charge verticale par mètre courant :

$$p_v = \frac{785^k \times 2^m,65}{5^m} = 417^k \text{ environ.}$$

En résumé, d'après les résultats obtenus dans les deux cas de pression du vent, il ressort que :

Le *contreventement supérieur* devra être calculé avec une charge de 389 kilogrammes par mètre courant (vent de 270 kilogrammes);

Le *contreventement inférieur*, avec une charge de 572 kilogrammes par mètre courant (vent de 170 kilogrammes avec surcharge du train);

La poutre opposée au vent sera augmentée d'une charge de 417 kilogrammes environ par mètre courant (vent de 170 kilogrammes avec passage du train).

Cadre sur les appuis (*fig.* 298). — On a supposé que l'entretoise supérieure avait la raideur suffisante pour transmettre

Digitized by Google

la réaction du contreventement supérieur, qui est à calculer avec une charge de 389 kilogrammes par mètre courant, soit $p = 400$ kilogrammes.

Si $l = 40$ mètres est la portée du pont et, par suite, la portée de la poutre horizontale supérieure, la réaction totale de cette poutre sur le cadre des appuis sera :

$$T = p_h \frac{l}{2} = \frac{400^k \times 40^m}{2} = 8.000^k.$$

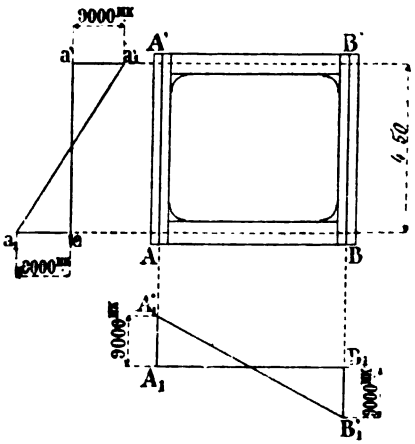


Fig. 298.

Soit pour chacun des montants :

$$\frac{T}{2} = \frac{8.000^k}{2} = 4.000^k.$$

La hauteur H entre les axes des entretoises supérieure et inférieure est de $4^m,50$; la ligne représentative des moments fléchissants dans les montants affectera la forme représentée sur la figure 298, et on aura :

$$a'a'_1 = a_1a = \frac{TH}{4} = \frac{8000^k \times 4^m,5}{4} = 9.000 \text{ kilogrammes-mètres.}$$

La ligne représentative des moments fléchissants dans les

Digitized by Google

entretoises est celle indiquée au bas de la figure, telle que :

$$A_1A'_1 = B_1B'_1 = 9.000 \text{ kilogrammes-mètres.}$$

Les montants et les entretoises du cadre devront donc être calculés pour pouvoir supporter les efforts dus aux charges verticales (charge permanente, charge verticale supplémentaire) et les moments de flexion développés par le vent.

Pour résister aux efforts de flexion qui se produisent aux quatre coins du cadre, il est nécessaire de prévoir la continuité entre les pièces qui le composent, soit des assemblages très rigides au moyen de goussets réunis par un nombre suffisant de rivets.

§ 4. — TABLIER A VOIE SUPÉRIEURE AVEC DEUX PLANS DE CONTREVENTEMENT ET AVEC ENTRETOISEMENT VERTICAL SUR TOUTE LA LONGUEUR

223. Généralités. — La figure 299 montre ce système de contreventement.

La voie de terre ou de chemin de fer se trouve en A'B', les poutres du pont sont AA' et BB'; les contreventements sont dans les plans A'B', AB; et l'entretoisement vertical est formé par les barres A'B et AB'.

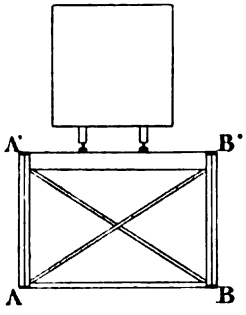


Fig. 299.

Si le pont est destiné à une voie de terre, on calculera les contreventements avec une pression de vent de 270 kilogrammes; si, au contraire, le pont donne passage aux trains de chemin de fer, il faudra examiner le cas du vent de 170 kilogrammes avec surcharge.

Les formules générales qui sont données ci-après pour déterminer les différents efforts produits par le vent sont tirées de l'ouvrage de M. Maurice Kœchlin (*Applications de la statique graphique*).

Digitized by Google

Soient (*fig.* 300) la coupe transversale, l'élévation et le plan des contreventements d'un pont.

Si p est la résultante par mètre courant de toutes les actions dues au vent (train compris, s'il y a lieu) sur le pont, cette résultante peut être transportée au milieu de la hauteur des poutres sur la ligne xx, pourvu qu'on lui adjoigne le couple pr.

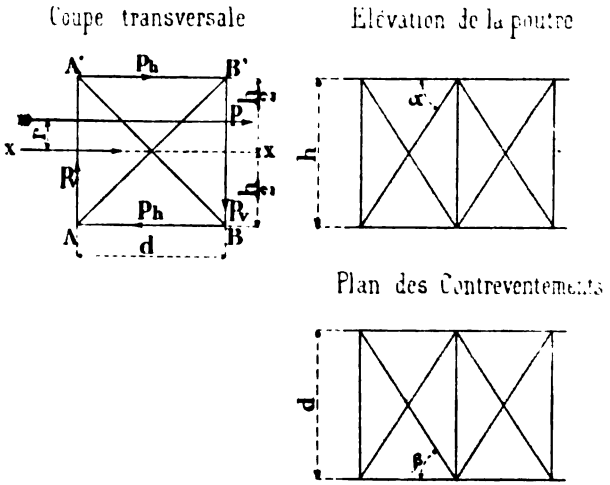


Fig. 300.

L'effort p se décompose en deux autres agissant dans le plan des contreventements A'B' et AB et qui auront pour valeur $\frac{p}{2}$; le sens de ces efforts sera celui de la résultante p.

Le couple pr se décompose en deux autres, savoir : l'un $p_h \times h$ dont les forces agissent dans le plan des contreventements, et l'autre $p_v \times d$ dont les forces agissent dans les montants.

La somme de ces deux couples doit être équivalente au couple pr, et on doit avoir pour valeur :

$$pr = p_h \times h + p_v \times d.$$

Digitized by Google

Il s'agit donc de déterminer les forces

$$p_h \text{ et } p_v.$$

A cet effet, il faut avoir une relation entre elles; la formule suivante donne cette relation :

$$\frac{p_v}{p_h} = \frac{\omega_v \sin\alpha \cos^2\alpha}{\omega_h \sin\beta \cos^2\beta} = k.$$

dans laquelle :

ω_v est la section de la diagonale du panneau moyen;
ω_h est la section de la barre de contreventement du panneau moyen;
α, l'angle que fait la diagonale avec la membrure;
β, l'angle que fait la barre de contreventement avec la membrure.

Le rapport k déterminé, on pourra évaluer les efforts p_v et p_h par les formules suivantes:

$$p_v = \frac{pr}{d + \frac{h}{k}}$$

et

$$p_h = \frac{pr}{kd + h}.$$

Ces efforts étant déterminés, le contreventement supérieur subira une charge par mètre courant de :

$$p_s = \frac{p}{2} + p_h,$$

et le contreventement inférieur une charge par mètre courant de :

$$p_t = \frac{p}{2} - p_h.$$

La poutre BB' se trouvera surchargée d'un effort:

$$p_v = \frac{pr}{d + \frac{h}{k}}$$

s'ajoutant à celui des charges verticales.

Digitized by Google

Remarque importante. — La détermination du coefficient k nécessite la connaissance de la section des barres du contreventement que l'on veut en somme déterminer.

Dans la pratique, on pourra, sans grande chance d'erreur, prendre le rapport $\frac{\omega_v}{\omega_h} = 4$, et alors la formule :

$$k = \frac{p_v}{p_h} = \frac{\omega_v}{\omega_h} \times \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha}{\sin\beta \cos^2\beta}$$

devient :

$$k = \frac{p_v}{p_h} = 4 \times \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha}{\sin\beta \cos^2\beta}.$$

Cadre sur les appuis. — Le cadre sur les appuis doit être robuste et doit posséder des entretoisements très rigides pour transmettre les réactions aux appuis.

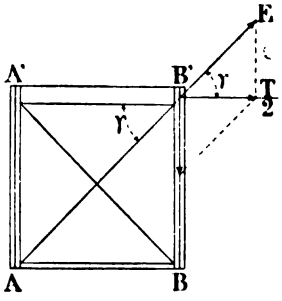


Fig. 301.

Soit T la réaction totale du contreventement supérieur, les deux barres d'entretoisement devront résister à l'effort :

$$E = \frac{T}{2\cos\gamma}.$$

γ étant l'angle que fait la barre d'entretoisement avec l'entretoise supérieure (*fig.* 301); on peut le déterminer par une simple décomposition graphique, comme l'indique la même figure.

224. Exemple d'application à un pont avec poutres à treillis dont le panneau moyen et la coupe transversale sont donnés figure 302. — I. Vent de 270 kilogrammes sans surcharge. — *Recherche de la position de la résultante.* — Le procédé est le même que celui déjà exposé précédemment.

Les *surfaces frappées* par le vent sont au mètre courant :

1° *Poutre côté du vent :*

Digitized by Google

Membrure supérieure.....		$0^{m2},600$	
Diagonales.....	$\frac{2^m,80 \times 0^m,20}{3^m} =$	$0\ ,187$	$0^{m2},287$
Montant.....	$\frac{2^m \times 0^m,15}{3^m} =$	$0\ ,100$	
Membrure inférieure.....		$0\ ,400$	
TOTAL.....		$1^{m2},287$	

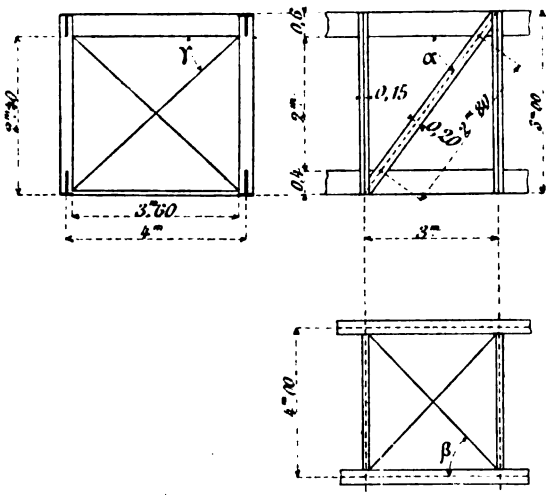


FIG. 302.

2° *Poutre opposée au vent.* — Rapport des vides à la surface totale :

$$\rho = \frac{3^{m2} - 1^{m2},287}{3^{m2}} = 0,57 \text{ environ.}$$

Surfaces réduites pour la poutre opposée au vent :

Diagonales.....	$0^{m2},187 \times 0,57 =$	$0^{m2},107$	$0^{m2},164$
Montants.....	$0^{m2},100 \times 0,57 =$	$0\ ,057$	
Membrure inférieure.	$0^{m2},400 \times 0,57 =$	$0\ ,228$	
TOTAL.....		$0^{m2},392$	

Digitized by Google

La membrure supérieure est cachée par le plancher.

Les efforts élémentaires seront alors :

Membrure supérieure	$0^{m2},600 \times 270^k$	$= 162^k$
Diagonales et montants.	$(0^{m2},287 + 0^{m2},164) \times 270^k$	$= 122^k$
Membrures inférieures.	$(0^{m2},400 + 0^{m2},228) \times 270^k$	$= 170^k$
TOTAL		454^k

Position de la résultante par rapport au niveau inférieur du tablier :

$$y = \frac{162^k \times 2^m,70 + 122^k \times 1^m,40 + 170^k \times 0^m,2}{454^k} = 1^m,42 \text{ env.}$$

Effort dans les contreventements. — Les contreventements doivent d'abord supporter la moitié de l'effort p par mètre courant, soit alors :

$$\frac{p}{2} = \frac{454^k}{2} = 227^k.$$

Le couple pr est ici négatif, r est égal à :

$$1^m,50 - 1^m,42 = 0^m,08,$$

et la valeur du moment du couple est :

$$pr = 454^k \times 0^m,08 = 36 \text{ kilogrammes-mètres,}$$

quantité négligeable.

On peut donc dire que, dans le cas d'un vent de 270 kilogrammes, les deux contreventements devront être calculés avec la même charge par mètre courant, soit :

$$\frac{p}{2} = 227 \text{ kilogrammes.}$$

II. Il y a lieu d'examiner maintenant le cas du passage du train, si le pont est destiné au chemin de fer, avec un vent de 170 kilogrammes.

La résultante partielle des efforts du vent sur le pont seulement se trouvera au même endroit que dans le cas du

Digitized by Google

vent de 270 kilogrammes; mais son intensité ne sera plus que :

$$p_p = 454^k \times \frac{170^k}{270^k} = 286 \text{ kilogrammes.}$$

D'autre part, la résultante des efforts du vent sur le train se trouvera à 5 mètres au-dessus des appuis et sa valeur sera par mètre courant de pont :

$$p_t = 3^{m2} \times 170^k = 510 \text{ kilogrammes.}$$

La position de la résultante unique de ces deux résultantes partielles, dont l'intensité est $P = 286 + 510 = 796$ kilogrammes, se trouve à une hauteur de :

$$y = \frac{286^k \times 1^m,42 + 510^k \times 5^m}{796^k} = 3^m,72 \text{ environ.}$$

Valeur du couple pr :

$$p = 796^k, r = 2^m,22, pr = 796^k \times 2^m,22 = 1.767 \text{ kilogr.-mètres.}$$

Valeur du rapport $k = \frac{p_v}{p_h}$:

$$\alpha = 45^\circ, \quad \sin\alpha = \cos\alpha = 0,707$$
$$\beta = 53^\circ, \quad \sin\beta = 0,80, \quad \cos\beta = 0,60.$$

En remplaçant ces valeurs dans la formule :

$$k = 4 \times \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha}{\sin\beta \cos^2\beta}.$$

on trouve :

$$k = 4 \times \frac{0,707 \times \overline{0,707}^2}{0,80 \times \overline{0,6}^2} = 4,9.$$

Valeur des efforts p_v *et* p_h :

Ces efforts sont donnés par les formules :

$$p_v = \frac{pr}{d + \frac{h}{k}} = \frac{1767^{Mk}}{4^m + \frac{3^m}{4,9}} = 383 \text{ kilogrammes environ,}$$

$$p_h = \frac{pr}{kd + h} = \frac{1767^{Mk}}{4,9 \times 4^m + 3^m} = 78 \text{ kilogrammes environ.}$$

Digitized by Google

Charges par mètre courant sur les contreventements :

Contreventement supérieur :

$$p_s = \frac{p}{2} + p_h = \frac{796^k}{2} + 78^k = 476 \text{ kilogrammes.}$$

Contreventement inférieur :

$$p_i = \frac{p}{2} - p_h = \frac{796^k}{2} - 78^k = 320 \text{ kilogrammes.}$$

Charge verticale supplémentaire sur la poutre opposée au vent :

Cette charge est égale à $p_v = 383$ kilogrammes par mètre courant.

Cadre des appuis :

L'effort dans les entretoisements des appuis est donné par la formule $E = \frac{T}{2 \cos \gamma}$, pour laquelle T est la réaction du contreventement supérieur.

Si nous supposons une portée de 21 mètres à la poutre, cet effort a pour valeur :

$$T = \frac{476^k \times 21^m}{2} = 4.998 \text{ kilogrammes.}$$

$$\gamma = 31 \text{ degrés}, \quad \cos \gamma = 0{,}86.$$

On tire alors :

$$E = \frac{4998^k}{2 \times 0{,}86} = 2.906 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

CHAPITRE XVI

CHARPENTES

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

225. Les charpentes sont généralement composées de *fermes* transversales au bâtiment sur lesquelles sont fixées les *pannes*, placées longitudinalement, qui portent la toiture avec ou sans intermédiaire de pièces secondaires, telles que les *chevrons* et les *lattis*.

Les *pannes*, qui transmettent les charges aux fermes, sont constituées par des fers à double **T** du commerce, par des poutres à âme pleine ou bien encore, pour les grandes portées, par des poutres à treillis avec membrures parallèles.

Le calcul de ces poutres n'offre rien de particulier ; il suffira d'appliquer, suivant le cas, les méthodes développées précédemment.

Les *fermes* sont presque toujours des poutres à treillis, d'une forme particulière appropriée au genre de bâtiment à couvrir.

Les membrures supérieures ont généralement l'inclinaison du toit et les membrures inférieures dépendent du système que l'on veut adopter.

Il existe différents types classiques de fermes ; mais, quel que soit ce type, à l'exception toutefois des fermes courbes, qui seront étudiées dans le deuxième volume, les fermes se composent toujours :

1° De membrures supérieures appelées *arbalétriers;*

2° De membrures inférieures appelées *entraits* ou *tirants;*

3° De treillis, qui prennent le nom de *croisillons* pour les

Digitized by Google

pièces inclinées, de *montants* pour les pièces verticales, de *bielles* pour celles qui sont perpendiculaires aux *arbalétriers*.

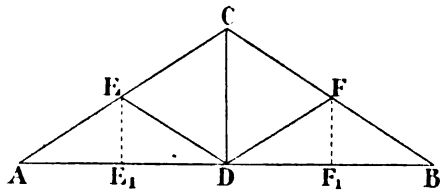


Fig. 303.

Ainsi, dans la ferme américaine de la figure 303, AC et CB sont les *arbalétriers*, AB est l'*entrait*, DE et DF les *croisillons*, enfin CD le *montant*.

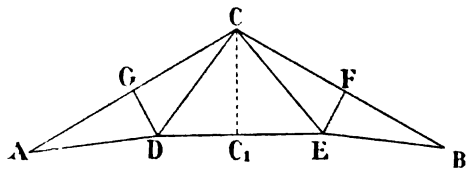


Fig. 304.

Dans la ferme Polonceau (*fig.* 304), AC et CB sont les *arbalétriers;* AD, DE, EB, DC et CE sont les *tirants;* enfin, DG et EF, les *bielles*.

Le calcul des *fermes* se fait d'une manière plus simple que celui des poutres à treillis destinées aux ponts, car, dans les charpentes, le mode de surcharge ne peut avoir lieu que de deux manières bien définies : les deux versants du toit entièrement surchargés, ou bien un seul versant.

Ces deux modes de surcharge seront appelés :

1° Surcharge totale;

2° Demi-surcharge.

La surcharge totale consiste en une couche de neige que l'on suppose couvrir les deux versants, et la demi-surcharge résulte de l'action du vent sur un seul côté de la toiture.

Outre les surcharges, il y a lieu de tenir compte de la

Digitized by Google

charge permanente, qui comprend tout le poids de la couverture, des pièces secondaires, et du poids propre de la ferme.

Cette charge permanente, qui s'étend presque toujours sur les deux versants, n'est donc qu'une variété de la surcharge totale et, dans la plupart des cas, il suffira de déterminer les efforts dus à la charge permanente pour obtenir, par une simple proportion, ceux résultant de la surcharge totale.

La charge permanente et la surcharge de neige s'établissent généralement par *mètre carré de projection horizontale*, tandis que l'action du vent est supposée agir suivant une direction qui fait un angle de 10° avec l'horizontale.

Le paragraphe ci-après donne toutes les indications nécessaires pour la détermination de la charge permanente et des surcharges que l'on emploie dans le calcul des charpentes.

§ 2. — CHARGE PERMANENTE ET SURCHARGES

A. — Charge permanente

Le poids dû à la charge permanente dépend naturellement du genre de couverture adoptée.

226. Poids des couvertures usuelles. — Le tableau suivant comporte la charge par mètre carré de toiture pour les différents types usuels.

La charge par mètre carré de projection horizontale, qui varie suivant l'inclinaison du toit, sera obtenue en divisant les poids du tableau par le *cosinus de l'angle* α que fait le toit avec l'horizontale.

Cette inclinaison, qui est toujours donnée, représente la tangente de l'angle α ; il sera donc aisé de déterminer les autres lignes trigonométriques dont on a besoin.

Digitized by Google

I. — Poids au mètre carré des couvertures pour une pente nulle

DÉSIGNATION DES COUVERTURES	POIDS AU MÈTRE CARRÉ
Tuiles à emboîtement posées sur pièces métalliques :	
Les tuiles seules	45k
Zinc n° 14 avec les supports en bois	33
Ardoises avec les supports en bois	45
Tôle ondulée galvanisée de 1 millimètre d'épaisseur, sur pièces métalliques :	
La tôle seule	13

227. Poids de la charpente métallique. — Le tableau suivant donne par mètre carré de projection horizontale le poids des différentes pièces métalliques de la charpente qui supporte la couverture.

Ce tableau comporte deux valeurs pour chaque couverture, une qui correspond au cas de surcharge, généralement employée pour les constructions légères, et l'autre relative aux surcharges définies par la circulaire ministérielle des travaux publics en date du 25 janvier 1902, qui sont plus élevées.

Ces différentes surcharges feront l'objet du paragraphe B.

II. — Poids au mètre carré de projection horizontale des charpentes métalliques

DÉSIGNATION DES PIÈCES COMPOSANT la charpente	COUVERTURE EN TUILES		COUVERTURE EN ARDOISES		COUVERTURE EN ZINC n° 14		COUVERTURE EN TÔLE ondulée de 1mm	
	surcharges ordinaires	surcharges de la circulaire	surcharges ordinaires	surcharges de la circulaire	surcharges ordinaires	surcharges de la circulaire	surcharges ordinaires	surcharges de la circulaire
Fermes (sans les piliers)	12k	16k	11k	15k	10k	14k	9k	12
Pannes	10	13	9	12	8	11	7	10
Chevrons	6	9	6	9	»	»	»	»
Lattis	9	12	»	»	»	»	»	»
Contreventement	2	3	2	3	2	3	2	3
Totaux	39k	53k	28k	39k	20k	28k	18k	25k

Digitized by Google

Ces poids ne sont bien entendu qu'approximatifs et se rapportent au fer. Dans le cas de l'acier, on affectera à ce poids le coefficient 0,80.

B. — Surcharges

228. Surcharges ordinaires. — Pour les petites charpentes avec fermes au-dessous de 10 mètres de portée, on prend généralement une surcharge uniforme de 50 kilogrammes par mètre carré de projection horizontale.

Pour les charpentes avec portée au-dessus de 10 mètres, on prend une surcharge de neige de 25 kilogrammes par mètre carré, qui constitue la surcharge totale, et on soumet la charpente à l'action du vent agissant sur un seul versant du toit.

On supposera que le vent souffle *horizontalement* et produit un effort de 100 kilogrammes par mètre carré de surface normale à sa direction.

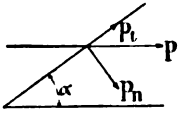


Fig. 305.

Lorsque le vent agit sur un toit, l'expérience a démontré qu'il se produit deux composantes (*fig.* 305) : une normale et l'autre parallèle au toit, et que cette dernière glisse sans produire d'action.

La valeur de la composante normale par mètre carré de surface inclinée est donnée par la formule suivante, si α est l'angle que fait le toit avec l'horizon :

$$p_n^{m^2} = 100 \times \sin^2 \alpha.$$

Cette force normale peut se décomposer en deux autres ; une verticale p_v et une horizontale p_h, qui sont également données par la même formule :

$$p = 100 \times \sin^2 \alpha.$$

Mais elles doivent être comptées par mètre carré de projection verticale ou de projection horizontale.

Digitized by Google

229. Surcharges prévues par la circulaire. — Les surcharges définies dans la circulaire sont :

Neige. — On admettra qu'elle peut atteindre 60 kilogrammes par mètre carré de projection horizontale.

Vent. — La pression du vent *soufflant d'un seul côté* sera de 150 kilogrammes par mètre carré de surface normale à sa direction, qui sera supposée dirigée vers la terre, suivant un angle de 10 degrés avec l'horizontale. On admettra que le vent peut produire son maximum d'effort même après une chute de neige.

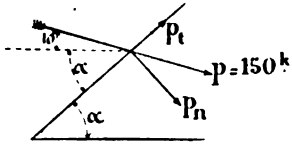


Fig. 306.

La figure 306 montre la direction de cette pression du vent qui fait 10 degrés avec l'horizontale, et, si α est l'angle du toit avec l'horizon, la valeur de la charge normale au toit par mètre carré de surface inclinée sera donnée par la formule :

$$p_n = 150^k \sin^2(\alpha + 10).$$

Les composantes horizontales et verticales de p_n seront données par la même formule, à condition de les compter par mètre carré de projection horizontale ou verticale.

§ 3. — TRACÉ DES EFFORTS DANS LES FERMES

On a maintenant toutes les données pour pouvoir déterminer les efforts dans une ferme quelconque.

A cet effet on supposera que les pannes transmettent les efforts de la toiture aux nœuds de la ferme, et c'est généralement ce qui se produit. Il arrive parfois que des charges agissent entre deux nœuds; il faut alors faire la répartition de ces charges à ces nœuds et tenir compte ensuite du moment de flexion développé dans la pièce qui reçoit les charges.

Les efforts sont presque toujours déterminés par un ou

Digitized by Google

plusieurs tracés de Crémona, qui sont d'une exécution rapide lorsque les charges sont fixes.

Pour le tracé de Crémona, on supposera toujours que les réactions sont parallèles à la direction de la résultante des forces.

Les applications suivantes feront ressortir pour quelques types de ferme comment on procède.

Un exemple seulement sera donné pour le cas de surcharge ordinaire.

Pour les autres applications, on fera usage des surcharges de la circulaire; mais, si l'on voulait se servir des surcharges ordinaires, les tracés seraient absolument les mêmes.

230. Ferme de 8 mètres de portée qui supporte, par l'intermédiaire de pannes, chevrons et lattis, une couverture en tuiles. — Les fermes sont espacées de 5 mètres. — Cas de surcharge ordinaire de 50 kilogrammes par mètre carré sur toute la toiture (*fig.* 307). — D'après les tableaux I et II, la charge permanente par mètre carré de projection horizontale sera, si l'inclinaison $\tang \alpha = 0,45$ et $\cos \alpha = 0,91$:

Tuiles, $\frac{45^k}{0,91} = 48^k,4$, soit.....	50^k
Ferme, pannes, chevrons, lattis : 39 kilogs, soit.....	40^k
Charge permanente	90^k
Surcharge	50^k
Soit un total de..	140^k

Les pannes sont attachées aux nœuds A, F, C, E, B; mais, pour le calcul des efforts dans la ferme, il y a lieu de ne considérer que les charges aux nœuds F, C, E.

L'espacement de tous les nœuds chargés étant le même suivant l'horizontale, on aura la même charge pour chacun d'eux.

Sa valeur est :

$$140^k \times 2^m \times 5^m = 1.400 \text{ kilogs.}$$

Digitized by Google

On tracera d'abord la ferme à une échelle convenue et on fera le tracé de Crémona suivant la méthode connue.

Dans l'exemple choisi, on a pris comme échelles :

Longueurs..... $0^m,015$ par mètre.
Forces..... $0^m,02$ pour 1 tonne.

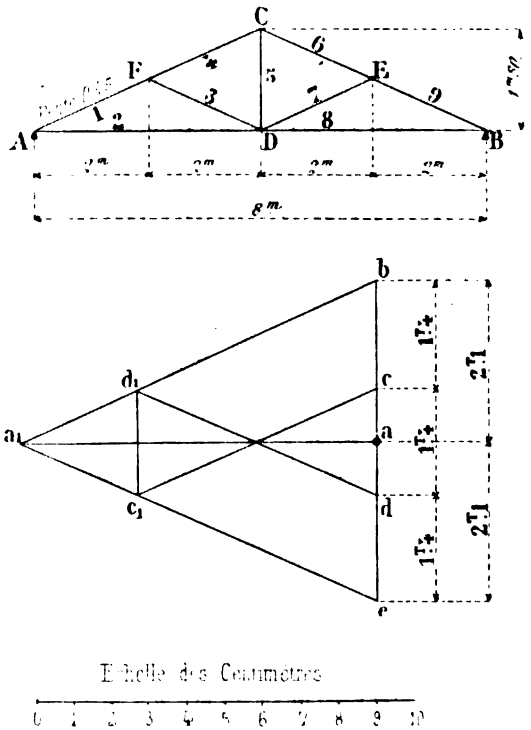


Fig. 307.

Tracé de Crémona. — La ferme et les charges étant symériques, les réactions sont égales et ont pour valeur :

$$1.400^k + \frac{1.400^k}{2} = 2.100 \text{ kilogs.}$$

Digitized by Google

On portera donc sur une verticale :

$$ab = R_A = 2^T,1 \times 2^{cm} = 4^{cm},2,$$

et, de b en c, de c en d et de d en e, la charge des nœuds F, C, E, soit :

$$bc = cd = de = 1^T,4 \times 2^{cm} = 2^{cm},8.$$

Enfin, de e, on portera vers le haut la réaction R_B qui doit fermer le polygone des forces en a.

On partira du nœud A où agit la réaction de gauche et on l'équilibrera suivant les deux barres 1 et 2.

On mènera donc de b une parallèle à 1 et de a une parallèle à 2; les deux droites se rencontrent en a_1; on obtiendra ainsi les efforts :

$$ba_1 = 1 \quad \text{et} \quad aa_1 = 2.$$

On passera ensuite au nœud F, où il n'y a que deux efforts inconnus 3 et 4, et on fermera le polygone des forces 1, 3, 4 et de la charge F aboutissant à ce nœud qui doivent se faire équilibre.

Les forces 1 et F sont déjà déterminées dans le polygone des forces : $1 = ba_1$ et $F = bc$; il suffira donc de mener de a_1 une parallèle à 3 et de c une parallèle à 4.

Ces deux droites se rencontrent en c_1; on obtiendra ainsi les efforts :

$$a_1c_1 = 3 \quad \text{et} \quad cc_1 = 4.$$

On passera ensuite au nœud C, où il n'y a que deux forces inconnues 5 et 6, les autres forces aboutissant à ce nœud : 4 et C sont connues, et elles sont représentées dans le polygone par :

$$cd = C \quad \text{et} \quad cc_1 = 4.$$

On mènera de d une parallèle à 6 et de c_1 une parallèle à 5. Ces deux droites se rencontrent en d_1; on obtiendra ainsi les efforts :

$$c_1d_1 = 5 \quad \text{et} \quad dd_1 = 6.$$

Digitized by Google

On remarquera que le point d_1 doit forcément se trouver sur la droite ba_1, puisque les charges sont symétriques et que DF est parallèle à CE.

On passera ensuite au nœud D, où cinq forces 2, 3, 5, 7 et 8 aboutissent; 2, 3 et 5 sont connues, elles sont représentées dans le polygone par $aa_1 = 2$, $a_1c_1 = 3$, $c_1d_1 = 5$.

On mènera de d_1 une parallèle à 7 et de a une parallèle à 8. Ces deux droites se rencontrent en a_1; on obtiendra ainsi les efforts :

$$d_1a_1 = 7 \quad \text{et} \quad a_1a = 8.$$

Enfin on passera ensuite au nœud E où la force 9 est seule inconnue; 7, 6 et E aboutissant à ce nœud sont déjà déterminées dans le polygone des forces.

$$6 = dd_1, \quad 7 = d_1a_1 \quad \text{et} \quad E = de.$$

Il suffira donc de mener par a_1 une parallèle à 9 qui doit passer forcément par le point e, afin de fermer le polygone; ce sera une vérification. On a alors :

$$a_1e = 9.$$

Lorsque la ferme est symétrique et symétriquement chargée, il n'est pas nécessaire d'effectuer tout le tracé, il suffira de le faire pour la moitié de la ferme, c'est-à-dire pour les barres 1, 2, 3, 4 et 5; on aura en même temps les efforts des barres symétriquement placées.

On relèvera ensuite la valeur de ces efforts, et on fera la distinction des tensions et des compressions (Voir n° 190). Dans ce genre de ferme, les arbalétriers AC et CB sont comprimés, les croisillons FD et DE sont également comprimés, l'entrait et le montant sont tendus.

Les efforts obtenus sont :

Arbalétriers...	1 et 9	Compression...	5T,15
— ...	4 et 6	— ...	3 ,40
Entraits.....	2 et 8	Tension.....	4 ,70
Croisillons.....	3 et 7	Compression...	1 ,70
Montant.....	5	Tension.....	1 ,40

Digitized by Google

231. Ferme américaine de 16 mètres de portée qui supporte par l'intermédiaire de pannes en fer une couverture en zinc. L'inclinaison du toit est 0m,45 par mètre et l'espacement des fermes est de 6 mètres. — Cas des surcharges de la circulaire (*fig.* 308). — Pour une inclinaison de tang $\alpha = 0,45$:

$$\cos \alpha = 0,91 \quad \text{et} \quad \sin \alpha = 0,41.$$

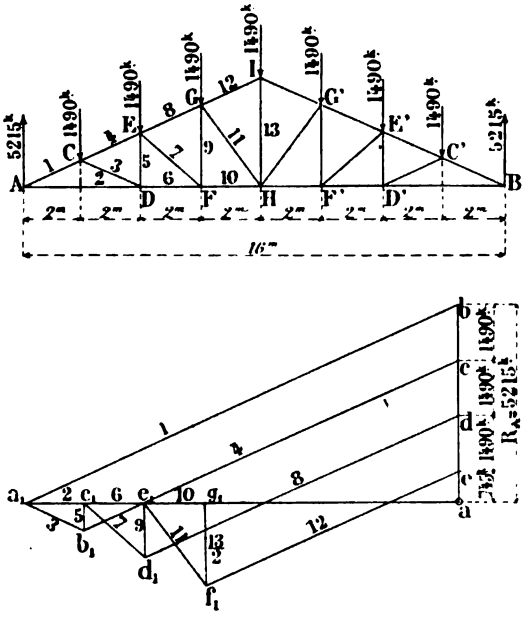


Fig. 308.

1° Charge permanente par mètre carré de projection horizontale. — D'après les tableaux I et II, la charge permanente peut être établie ainsi qu'il suit :

Zinc n° 14 avec les supports en bois..	$\frac{33^k}{0,91}$	$= 36^k,00$
Ferme, panne et contreventement...		$28^k,00$
Total.....	p'_v	$= 64^k,00$

Digitized by Google

2° Surcharges. — *Neige.* — On doit compter sur une charge totale de 60 kilogrammes par mètre carré de projection horizontale :

$$\text{soit } p''_v = 60^k,00.$$

Vent. — La charge normale au toit par mètre carré de toiture est donnée par la formule :

$$p_n = 150^k \sin^2(\alpha + 10^\circ),$$

soit, dans le cas présent, pour $\alpha = 24^\circ$ environ :

$$p_n = 150^k \sin^2(24^\circ + 10^\circ) = 150^k \times \overline{0,56}^2 = 47^k,00.$$

En résumé, la ferme devra être calculée avec deux cas de surcharges agissant simultanément, savoir :

1° *Surcharge totale*, comprenant la charge permanente et la surcharge de neige, ces deux actions étant verticales.

Soit alors par mètre carré de projection horizontale :

$$p_v = p'_v + p''_v = 64^k + 60^k = 124^k.$$

2° *Demi-surcharge*, ne comprenant que la pression du vent qui agit normalement à la toiture et sur un seul versant, soit alors par mètre carré de toiture :

$$p_n = 47^k.$$

Charges en chaque nœud de la ferme. — D'après le diagramme de la ferme, les nœuds sont espacés horizontalement de 2 mètres et, suivant le rampant de la toiture, de $2^m,20$ environ.

Les charges en chaque nœud seront alors :

1° *Surcharge totale :*

Nœuds C, E, G, I, G', E' et C'... $124^k \times 2^m \times 6^m = 1.488^k$.
Soit..... 1.490^k.

2° *Demi-surcharge :*

Nœuds C, E, G..... $47^k \times 2^m,2 \times 6^m = 620^k$

Nœuds I..... $47^k \times \frac{2^m,2}{2} \times 6^m = 310^k$.

Digitized by Google

Détermination des efforts dans les barres. — Les barres étant numérotées, on procédera pour chacun des cas de surcharges à un tracé de Crémona.

Pour la surcharge totale, la ferme étant symétrique et symétriquement chargée, il suffira de faire le tracé pour une moitié de la ferme ; à cet effet, on portera sur une verticale de a en b la réaction de gauche qui a pour valeur :

$$R_A = 3 \times 1.490^k + \frac{1.490^k}{2} = 5.215^k.$$

Ensuite on portera les charges des nœuds à partir de b et en descendant, soit :

$$bc = cd = de = 1.490^k,$$

et il reste ca, qui a pour valeur :

$$\frac{1.490^k}{2} = 745^k.$$

On commencera par le nœud A et on construira le polygone des forces R_A, 1 et 2. A cet effet, on mènera ba_1 parallèle à 1 et aa_1 parallèle à 2.

ba_1 est l'effort dans l'arbalétrier 1, et aa_1 est celui dans l'entrait 2.

On passera ensuite au nœud C, et on construira le polygone des forces 1, 3, 4 et 1.490 kilogrammes, parmi lesquelles 3 et 4 sont inconnues.

Dans le polygone de Crémona, 1 est déjà connu et l'effort 1.490 kilogrammes est représenté par bc. Pour déterminer 3 et 4, il suffira de mener par c une parallèle à 4 et par a_1 une parallèle à 3. La longueur cb_1 représente l'effort dans l'arbalétrier 4 et a_1b_1 l'effort dans le croisillon 3.

On passera ensuite au nœud D, et on construira le polygone des forces 2, 3, 5 et 6, parmi lesquelles 5 et 6 sont seules inconnues.

Dans le polygone de Crémona, 2 et 3 sont connues. Pour déterminer 5 et 6, il suffira de mener de l'extrémité de 3, c'est-à-dire en b_1, une parallèle à 5 qui rencontre en c_1 la parallèle menée à 6 par le point a.

Digitized by Google

b_1c_1 représente l'effort dans le montant 5 et ac_1 l'effort dans l'entrait 6.

Le polygone des efforts au nœud D serait le contour $aa_1b_1c_1a$.

On passera ensuite successivement aux nœuds E, F, G, I, en procédant comme il vient d'être fait.

Il y a lieu de remarquer que, pour le nœud I, la verticale f_1g_1 ne représente que la moitié de l'effort dans le montant 13.

L'épure qui a été faite en prenant comme échelle des forces $0^m,01$ pour 1 tonne donne les efforts suivants :

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
$1 = -12^T,7$	$2 = +11^T,5$	$3 = -1^T,8$	$5 = +0^T,7$
$4 = -10\ ,9$	$6 = +9\ ,9$	$7 = -2\ ,2$	$9 = +1\ ,5$
$8 = -9\ ,1$	$10 = +8\ ,3$	$11 = -2\ ,7$	$13 = +4\ ,4$
$12 = -7\ ,4$			

Nota. — Le signe — indique une compression et le signe + une tension.

Demi-surcharge. — Pour la demi-surcharge, on commencera par rechercher les réactions des composantes normales à la toiture au moyen d'un polygone funiculaire quelconque. A cet effet on construira le polygone des forces en portant sur la normale au toit xx les forces bout à bout, savoir (*fig.* 309) :

$$bc = cd = de = 620^k \qquad \text{et} \qquad ef = 310^k.$$

On prendra un pôle quelconque o et on tracera le *funiculaire* $A_1C_1E_1G_1I_1B_1$ en menant des parallèles aux rayons polaires ob, oc, od, oe et of.

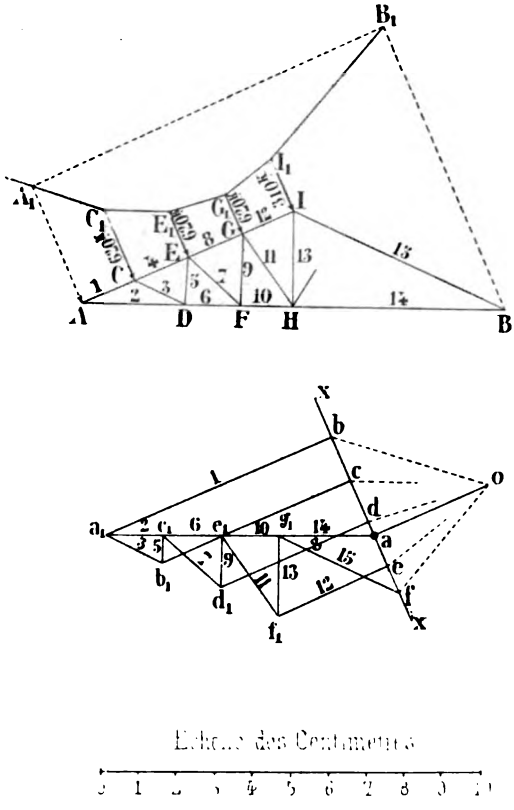
La droite A_1B_1 est la ligne de fermeture du funiculaire, et, en menant par le pôle o une parallèle à cette droite, on déterminera sur la résultante des forces bf les deux segments ba et af, qui sont les réactions de gauche et de droite.

Connaissant ces réactions, le tracé de Crémona pourra s'effectuer comme précédemment.

On commencera par le nœud A et on construira le polygone des forces 1, 2 et R_A, en menant les droites ba_1 et aa_1 respectivement parallèles à 1 et 2. On passera ensuite au

Digitized by Google

nœud C et on construira le polygone des forces 1, 3, 4 et 620 kilogrammes, en menant par c et a_1 les droites cb_1 et a_1b_1 respectivement parallèles à 4 et 3.



Échelle des Centimètres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 309.

On passera ensuite successivement aux nœuds D, E, F, G. Comme il a été fait précédemment, on obtiendra ainsi, pour le nœud G, les efforts $ag_1 = 14$ et $f_1g_1 = 13$.

Il ne reste alors plus que la barre 15 à déterminer, car les

Digitized by Google

efforts dans les croisillons et les montants de la partie de droite sont nuls, les barres 13, 14 et 15 formant un triangle.

Pour avoir l'effort dans la barre 15, il suffira de mener par le point g_1 une parallèle à 15, qui doit passer par l'extrémité f du polygone des forces. Cette condition est une vérification du tracé, et la longueur g_1f représente donc l'effort dans l'arbalétrier 15.

L'épure qui a été faite en prenant comme échelle des forces $0^m,01$ pour 500 kilogrammes donne les efforts suivants :

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
$1 = -3^T,2$	$2 = +3^T,5$	$3 = -0^T,8$	$5 = +0^T,35$
$4 = -2\ ,7$	$6 = +2\ ,8$	$7 = -1\ ,0$	$9 = +0\ ,70$
$8 = -2\ ,1$	$10 = +2\ ,0$	$11 = -1\ ,3$	$13 = +1\ ,05$
$12 = -1\ ,6$	$14 = +1\ ,25$		
$15 = -1\ ,7$			

Nota. — Le vent pouvant souffler indifféremment des deux côtés de la ferme, il faudra choisir comme effort maximum, dans l'arbalétrier 12, l'effort développé dans l'arbalétrier 15 qui lui est supérieur.

Les efforts totaux dans les différentes barres sont donnés dans le tableau ci-après.

DÉSIGNATION des BARRES	EFFORTS			DÉSIGNATION des BARRES	EFFORTS		
	Surcharge totale	Vent	Totaux		Surcharge totale	Vent	Totaux
Arbalétriers				Croisillons			
1	$-12^T,7$	$-3^T,2$	$-15^T,9$	3	$-1^T,8$	$-0^T,8$	$-2^T,6$
4	$-10\ ,9$	$-2\ ,7$	$-13,6$	7	$-2\ ,2$	$-1\ ,0$	$-3\ ,2$
8	$-9\ ,1$	$-2\ ,1$	$-11,2$	11	$-2\ ,7$	$-1\ ,3$	$-4\ ,0$
12	$-7\ ,4$	$-1\ ,7$	$-9,1$				
Entraits				Montants			
2	$+11\ ,5$	$+3\ ,5$	$+15\ ,0$	5	$+0\ ,7$	$+0\ ,35$	$+1\ ,05$
6	$+9\ ,9$	$+2\ ,8$	$+12\ ,7$	9	$+1\ ,5$	$+0\ ,70$	$+2\ ,20$
10	$+8\ ,3$	$+2\ ,0$	$+10\ ,3$	13	$+4\ ,4$	$+1\ ,05$	$+5\ ,45$

232. **Fermes Polonceau.** — On emploie généralement deux types de ferme Polonceau, savoir :

Digitized by Google

1° **Type à une seule contre-fiche.** — La figure 310 donne ce type de ferme dans laquelle CD est la contre-fiche qui est normale au milieu de l'arbalétrier AE; les tirants DE et AD ont même longueur; enfin le tirant DF se trouve légèrement surélevé par rapport à la ligne des appuis.

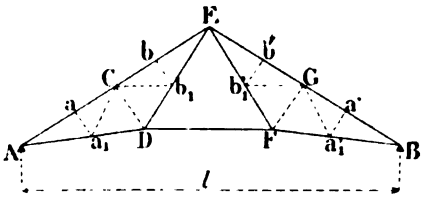


Fig. 310.

Il arrive fréquemment qu'en outre des nœuds C, E, G, il se trouve entre les nœuds A, C, E, G, B des pannes en a, b, b', a'.

Dans ce cas, les arbalétriers devront être calculés non seulement pour un effort agissant dans l'axe de la pièce, mais aussi pour un moment de flexion à déterminer suivant les circonstances; pratiquement, on pourra supposer l'arbalétrier AC libre au point A et encastré en C et l'arbalétrier CE encastré à ses deux extrémités.

2° **Type à trois contre-fiches.** — Pour éviter ces moments de flexion dans l'arbalétrier, on munit la ferme de contre-fiches supplémentaires normales aux points d'attache a, b, a', b', des pannes intermédiaires, et on adjoint à ces contre-fiches des tirants, a_1C, Cb_1, b_1'G et Ga'_1.

On a ainsi la ferme à trois contre-fiches.

Il pourrait se faire que la portée de la ferme fût très grande, et alors il serait encore nécessaire de placer des pannes entre les nœuds nouvellement formés.

Il faudrait dans ce cas, si l'on ne veut pas adjoindre de nouvelles contre-fiches, tenir compte des moments de flexion dans les arbalétriers.

233. Ferme Polonceau à une seule contre-fiche. — Le tracé des efforts n'offre rien de particulier. On procédera comme pour les fermes américaines.

On déterminera d'abord les charges qui agissent aux différents nœuds, savoir :

Digitized by Google

D'une part, les charges *verticales* dues à la charge permanente et à la surcharge de neige;

D'autre part, les charges normales dues au vent.

Soit la ferme Polonceau (*fig.* 311) et les charges verticales en chaque nœud.

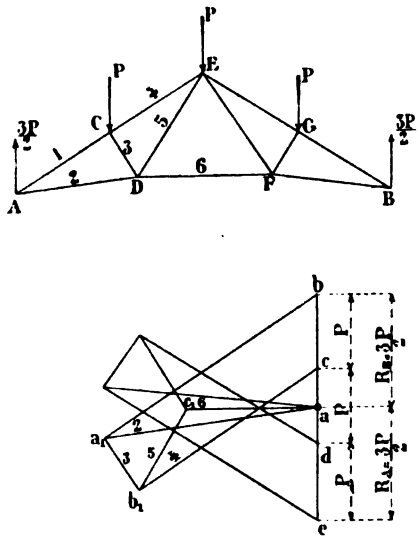


Fig 311.

Avec trois charges égales à P, les réactions seront identiques, et leur valeur sera :

$$R_A = R_B = \frac{3P}{2}.$$

On portera donc sur une verticale

$$ab = ae = \frac{3P}{2} \qquad \text{et} \qquad bc = cd = de = P.$$

On commencera le tracé de Crémona par le nœud A et on construira le polygone aba_1 des forces 1, 2 et R_A, cette der-

Digitized by Google

nière étant connue et égale à ba; le polygone donne :

$$a_1b = 1 \qquad \text{et} \qquad aa_1 = 2,$$

On passera ensuite au nœud C, et on construira le polygone bcb_1a_1b des forces 1, 3, 4 et P. Les forces 1 et P sont connues et égales à ba_1 et bc.

$$a_1b_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad cb_1 = 4.$$

On passera ensuite au nœud D et on construira le polygone $aa_1b_1c_1a$ des forces 2, 3, 5 et 6, parmi lesquelles 2 et 3 sont connues et égales à :

$$aa_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad a_1b_1 = 3.$$

On continuerait de même par les nœuds E, G et F; mais,

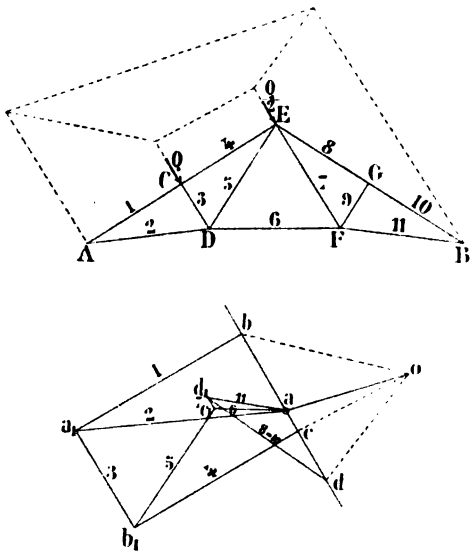


Fig. 312.

à cause de la symétrie de la ferme et des charges, il suffit de tracer les efforts de la première moitié de gauche.

Digitized by Google

En ce qui concerne les charges normales dues au vent, appliquées aux nœuds C et E seulement, on recherchera d'abord les réactions au moyen d'un funiculaire et on procédera ensuite au tracé de Crémona. Il faudra, pour ce cas, faire le tracé complet de la ferme.

Ainsi soient Q et $\frac{Q}{2}$ les charges normales aux nœuds C et E ; *bc* et *cd* ces charges (*fig.* 312).

Le funiculaire donne comme réactions $R_A = ab$ et $R_B = ad$.

Nœud A. — Polygone (aba_1) : $a_1b = 1$ et $aa_1 = 2$.
Nœud C. — Polygone (bcb_1a_1b) : $a_1b_1 = 3$ et $b_1c = 4$.
Nœud D. — Polygone $(aa_1b_1c_1a)$: $b_1c_1 = 5$ et $ac_1 = 6$.
Nœud E. — Polygone $(cdd_1c_1b_1c)$: $dd_1 = 8$ et $d_1c_1 = 7$.
Nœud G. — Polygone (dd_1d) : $d_1d = 10$ et $d_1 = 0 = 9$.

L'effort dans la contre-fiche 9 se réduit dans le tracé à un point d_1 ; cet effort est donc nul.

Nœud F. — Polygone (ac_1d_1a) : $ad_1 = 11$.

Comme vérification, ad_1 doit être parallèle à la barre 11.

234. **Ferme Polonceau à trois contre-fiches.** — Le tracé des efforts de la ferme à trois contre-fiches comporte, lorsqu'on arrive au nœud C (*fig.* 313), une indétermination, car en ce point on rencontre cinq barres, dont deux seulement sont connues.

Cette indétermination n'est qu'apparente et elle est levée par un procédé particulier.

Soient P_1, P_2, P_3, ..., P_7 les charges verticales quelconques en chaque nœud de la ferme.

Les charges n'étant pas égales, on déterminera par un funiculaire les réactions R_A et R_B ; soient *ab* et *ai* ces réactions, et *bi* la résultante de toutes les charges.

Nœud A. — Polygone (aba_1a) : $ba_1 = 1$ et $a_1a = 2$.
Nœud A'. — Polygone (bcb_1a_1b) : $a_1b_1 = 3$ et $cb_1 = 4$.
Nœud A'. — Polygone $(aa_1b_1c_1a)$: $c_1b_1 = 5$ et $ac_1 = 6$.
Nœud C. — C'est le nœud où se trouvent cinq barres, dont deux, 4 et 5, sont seulement connues. Pour déterminer les

Digitized by Google

autres : 7, 8 et 9, on mènera par c_1 une parallèle à 7, par d et e des parallèles dn et ep à 8 et à 12.

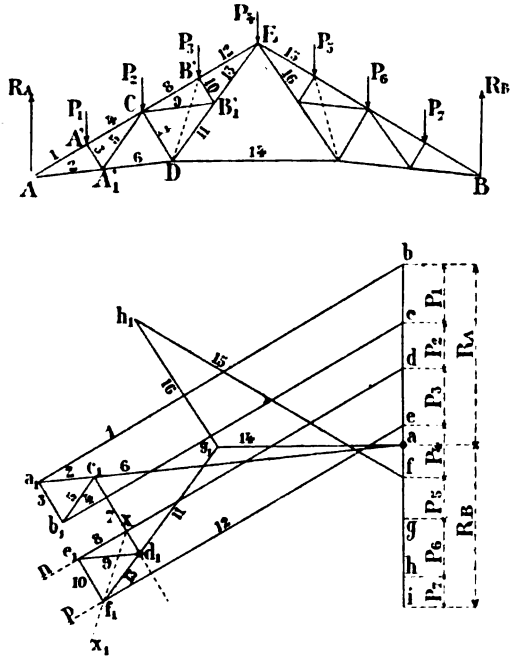


Fig. 313.

Par le point de rencontre x de la parallèle menée de c_1 avec dn, on mènera xx_1 parallèle à la droite qui joint les nœuds B' et D. Cette droite xx_1 rencontre la droite ep au point f_1.

De ce point on mènera une parallèle à la contre-fiche 10 et on déterminera ainsi le point e_1 sur la droite dn.

Enfin, par le point e_1, on mènera une parallèle au tirant 9 jusqu'à la rencontre d_1 de c_1x prolongée.

Le polygone des forces agissant au nœud C sera donc le contour :

$$(cde_1d_1c_1b_1c),$$

Digitized by Google

dans lequel :

$$cd = P_2, \qquad de_1 = 8, \qquad e_1d_1 = 9,$$
$$d_1c_1 = 7, \qquad c_1b_1 = 5 \quad \text{et} \quad b_1c = 4.$$

Nœud D..... Polygone $(ac_1d_1g_1a)$:

$$d_1g_1 = 11 \quad \text{et} \quad g_1a = 14.$$

Nœud B'..... Polygone (def_1e_1d) :

$$f_1e = 12 \quad \text{et} \quad f_1e_1 = 10.$$

Nœud B'_1..... Polygone $(g_1d_1e_1f_1g_1)$:

$$f_1g_1 = 13.$$

On passerait ensuite au nœud E, pour lequel on construirait le polygone $(efh_1g_1f_1e)$, lequel donnerait :

$$g_1h_1 = 16 \quad \text{et} \quad fh_1 = 15.$$

Il suffirait de continuer en allant de nœud en nœud et de faire pour le nœud où agit la force P_6 le même tracé que celui exécuté pour le nœud C.

On ferait les mêmes constructions pour les charges normales dues au vent, mais en ne considérant ces charges qu'aux nœuds A'CB'E.

Remarque importante. — Si la poutre armée qui constitue l'arbalétrier est symétrique par rapport à la contre-fiche médiane et si les charges sur cet arbalétrier sont symétriques, ce qui est généralement le cas, le tracé du polygone relatif au nœud C se simplifie beaucoup, car alors les efforts 5 et 9 sont égaux ; il en est de même des efforts 3 et 10.

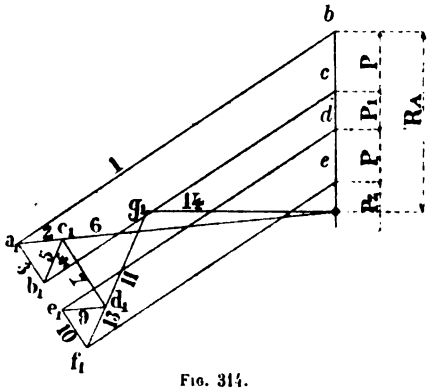


Fig. 314.

Les efforts 5 et 9 sont représentés dans le polygone des forces par les longueurs b_1c_1 et e_1d_1, et,

Digitized by Google

comme $a_1b_1 = e_1f_1$, il faut, par suite du parallélisme des trois contre-fiches, que a_1b_1 et e_1f_1 se trouvent sur une même parallèle à c_1d_1.

La construction du polygone pour le nœud C est alors la suivante (*fig.* 314) :

On prolongera a_1b_1 jusqu'à la rencontre e_1 de la parallèle à l'arbalétrier issue de d. Par le point c_1 on mènera une parallèle à a_1b_1 jusqu'à la rencontre d_1 avec la parallèle à la contre-fiche 9, issue de e_1.

Tous les efforts des barres concourant au nœud C seront alors déterminés, savoir :

$$cb_1 = 4, \qquad de_1 = 8, \qquad b_1c_1 = 5,$$
$$e_1d_1 = 9 \quad \text{et} \quad c_1d_1 = 7.$$

Il suffira ensuite de continuer le tracé de Crémona à la manière ordinaire.

235. Exemple. — **Ferme Polonceau à une contre-fiche de 12 mètres de portée qui supporte, par l'intermédiaire de pannes, une couverture en tôle ondulée de 1 millimètre d'épaisseur. Pente du toit, 0m,45. Écartement des fermes, 4 mètres.**

La disposition de la ferme et des pannes qui transmettent les charges de la couverture est indiquée figure 315.

Pour une inclinaison de $\tan\alpha = 0{,}45$:

$$\cos\alpha = 0{,}91 \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = 0{,}41.$$

Charges par mètre carré de projection horizontale. — Les tableaux I et II donnent :

Tôle ondulée galvanisée, $\frac{13^k}{0{,}91} = 14^k{,}3$, soit....		15^k
Fermes, pannes et contreventement.....		25^k
Total.....	$p'_v =$	40^k
Neige.....	$p''_v =$	60^k

Digitized by Google

Soit alors pour la charge verticale un total de :

$$p_v = p'_v + p''_v = 40^k + 60^k = 100 \text{ kilogrammes.}$$

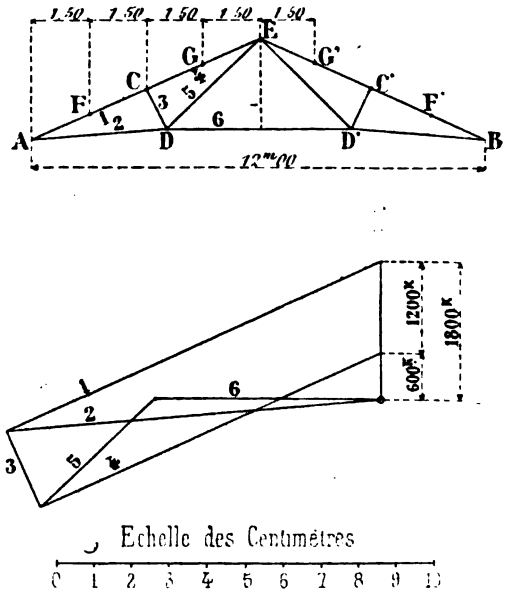


Fig. 315.

Charge normale à la toiture. — La charge normale par mètre carré de toiture sera, pour un vent de 150 kilogrammes :

$$p_n = 150 \sin^2(\alpha + 10^\circ).$$

Dans le cas présent, $\alpha = 24^\circ$ environ :

$$p_n = 150 \sin^2(\alpha + 10^\circ) = 150 \times \overline{0,56}^2 = 47 \text{ kilogrammes.}$$

Charges au droit des pannes. — 1° Charges verticales :

$$100^k \times 1^m,50 \times 4^m = 600 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

2° Charges normales :

$$47^k \times 1^m,65 \times 4^m = 310 \text{ kilogrammes.}$$

Charges au droit des nœuds de la ferme. — Les nœuds de la ferme reçoivent, outre la charge de la panne, qui y aboutit, la moitié des charges des pannes intermédiaires.

1° Charges verticales :

Nœuds C, E, C' : $600^k + 600^k = 1.200$ kilogrammes.

2° Charges normales :

Nœud C : $310^k + 310^k = 620$ kilogrammes.
Nœud E : $155^k + 155^k = 310$ —

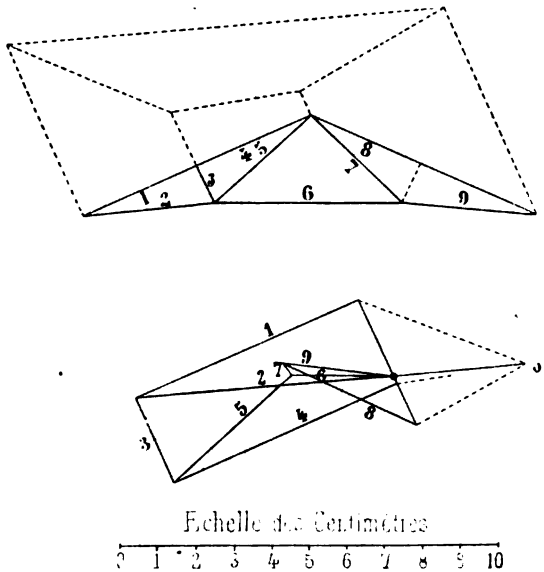


Fig. 316.

Avec ces éléments, on pourra tracer les efforts dans les différentes barres. Les tracés font l'objet des épures

Digitized by Google

figures 315, pour les charges verticales (échelle des forces de $0^m,01$ pour 500 kilogrammes), et 316, pour les charges normales (échelle des forces, $0^m,01$ pour 250 kilogrammes).

Ces épures donnent les résultats qui sont consignés dans les tableaux ci-après :

DÉSIGNATION des BARRES	EFFORTS			DÉSIGNATION des BARRES	EFFORTS		
	Surcharge totale	Vent	Totaux		Surcharge totale	Vent	Totaux
Arbalétriers				Tirants			
1	$-5^T,45$	$-1^T,62$	$-7^T,07$	2	$+5^T,00$	$+1^T,72$	$+6^T,72$
4	$-4,95$	$-1,62$	$-6,57$	5	$+2,10$	$+1,05$	$+3,15$
Contrefiches							
3	$-1,10$	$-0,62$	$-1,72$	6	$+3,00$	$+0,68$	$+3,68$

Outre les efforts de compression agissant dans les arbalétriers, il faut tenir compte des moments de flexion développés par les charges des pannes intermédiaires.

A cet effet on supposera l'arbalétrier AC libre en A et encastré en C, et l'arbalétrier CE encastré aux deux extrémités.

Pour déterminer ces moments de flexion, on décomposera les charges verticales en deux composantes, l'une normale à l'arbalétrier et l'autre suivant la direction de cet arbalétrier.

Si P est la charge verticale, on aura :

Composante normale..... $P_n = P \cos \alpha$.
— direction arbalétrier... $P_t = P \sin \alpha$.

La charge P_n donne un moment de flexion et la charge P_t une compression dans l'arbalétrier qui vient s'ajouter à la compression déterminée par le tracé de Crémona.

Dans le cas présent, P = 600 kilogrammes.

$$P_n = 600 \times \cos \alpha = 600 \times 0{,}91 = 546 \text{ kilogrammes.}$$
$$P_t = 600 \times \sin \alpha = 600 \times 0{,}41 = 246 \text{ kilogrammes.}$$

A la charge P_n due aux charges verticales, il faut ajouter la

Digitized by Google

charge produite par le vent et transmise par la panne, soit 310 kilogrammes.

En résumé, les arbalétriers sont soumis à une charge normale de :

$$546^k + 310^k = 856 \text{ kilogrammes,}$$

qui produit un moment de flexion, et à une charge de 246 kilogrammes, qui produit une compression supplémentaire.

Moments de flexion. — *Arbalétrier* AC. — Portée : $3^m,30$.

Pour une charge agissant au milieu, le moment fléchissant maximum se produit sur l'appui encastré, c'est-à-dire en C, et il a pour valeur :

$$M = -\frac{5}{32} Pl,$$

soit dans le cas présent :

$$M = -\frac{5}{32} \times 856^k \times 3^m,3 = -441 \text{ kilogrammes-mètres.}$$

Arbalétrier CE. — Portée : $3^m,30$.

Pour une charge agissant au milieu, le moment fléchissant maximum se produit sur les deux appuis, et il a pour valeur :

$$M = -\frac{Pl}{8},$$

soit dans le cas présent :

$$M = -\frac{856^k \times 3^m,3}{8} = -351 \text{ kilogrammes-mètres.}$$

En résumé, les arbalétriers 1 et 4 seront soumis :

1° A un effort de compression de :

Arbalétrier 1..... $(5.450^k + 246^k) = -5.696^k$,
— 4..... $(4.950^k + 246^k) = -5.196^k$.

2° A un moment de flexion maximum de :

Arbalétrier 1..... 441^{Km},
— 4..... 351^{Km}.

Digitized by Google

236. Fermes anglaises et belges. — Ces fermes ne sont qu'une variété de la ferme américaine; mais les croisillons, au lieu de monter à gauche, montent à droite.

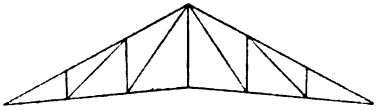


Fig. 317.

La ferme anglaise (*fig.* 317) comporte des montants, tandis que, dans la ferme belge, les montants sont remplacés par des contre-fiches normales à l'arbalétrier (*fig.* 318).

Pour ces fermes, comme d'ailleurs pour les fermes américaines, l'entrait peut être relevé.

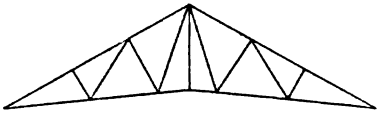


Fig. 318.

Dans ces deux systèmes, les arbalétriers sont toujours comprimés, les entraits tendus, les croisillons tendus et les montants ou les contre-fiches comprimés.

Le tracé des efforts dans ces deux systèmes de ferme s'effectue de la même manière que pour les fermes américaines.

237. Exemple. — **Ferme de 16 mètres de portée du système anglais, recevant les charges par des pannes espacées horizontalement tous les 2 mètres. La charge verticale en chaque nœud transmise par la panne est de 1.000 kilogrammes** (*fig.* 319, échelle des forces : $0^m,01$ pour 1 tonne). — La ferme étant symétrique et symétriquement chargée, on ne fera le tracé des efforts que pour la moitié de gauche.

La réaction :

$$R_A = 1.000^k \times 3 + \frac{1.000^k}{2} = 3.500 \text{ kilogrammes},$$

que l'on portera de a en b.

Les charges aux nœuds seront placées bout à bout, soit $bc = cd = de = 1.000$ kilogrammes, et il restera une demi-charge $a = 500$ kilogrammes pour le nœud F.

Digitized by Google

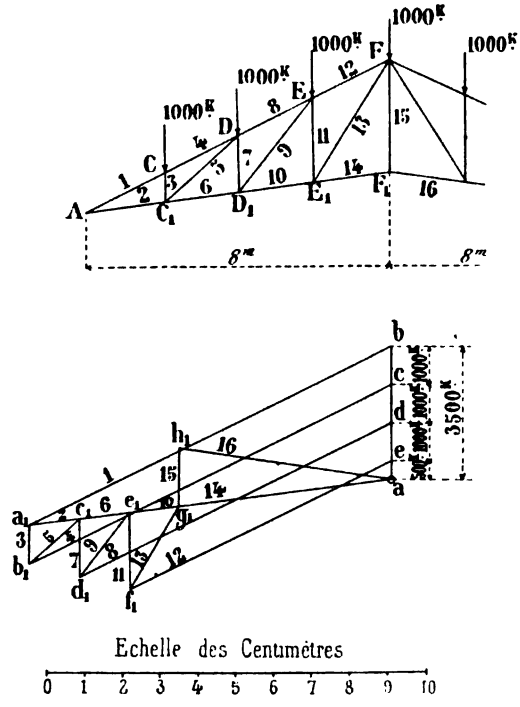


Fig. 319.

On fera le tracé à partir du nœud A, soit :

Nœud A : Polygone (aba_1a)
Efforts $a_1b = 1$ et $aa_1 = 2$.

Nœud C : Polygone (bcb_1a_1b)
Efforts $b_1a_1 = 3$ et $cb_1 = 4$.

Nœud C_1 : Polygone ($aa_1b_1c_1a$)
Efforts $b_1c_1 = 5$ et $c_1a = 6$.

Nœud D : Polygone ($cdd_1c_1b_1c$)
Efforts $dd_1 = 8$ et $d_1c_1 = 7$.

Nœud D_1 : Polygone ($ac_1d_1e_1a$)
Efforts $d_1e_1 = 9$ et $e_1a = 10$.

Digitized by Google

Nœud E : Polygone ($def_1e_1d_1d$)
Efforts $ef_1 = 12$ et $f_1e_1 = 11$.

Nœud E_1 : Polygone ($ae_1f_1g_1a$)
Efforts $f_1g_1 = 13$ et $g_1a = 14$.

Nœud F_1 : Polygone (ag_1h_1a)
Efforts $g_1h_1 = 15$.

Les résultats sont consignés ci-après :

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
$1 = -10^T,7$	$2 = +9^T,6$	$5 = +1^T,8$	$3 = -1^T,0$
$4 = -10\ ,7$	$6 = +8\ ,3$	$9 = +2\ ,1$	$7 = -1\ ,5$
$8 = -\ 9\ ,2$	$10 = +7\ ,0$	$13 = +2\ ,6$	$11 = -2\ ,0$
$12 = -\ 7\ ,7$	$14 = +5\ ,6$		$15 = +1\ ,5$

Nota. — S'il fallait rechercher les efforts dus au vent, on procéderait comme dans les exemples précédents.

238. Ferme à entrait brisé. — On emploie assez fréquemment un genre de ferme dont l'entrait est composé d'une série de droites inscrites dans une courbe.

L'exemple ci-après comporte les explications nécessaires pour effectuer les tracés.

239. Ferme de 18 mètres de portée avec entrait brisé qui supporte, par l'intermédiaire de pannes placées aux nœuds supérieurs de la ferme, une charge verticale de 2.000 kilogrammes. — La figure 320 donne le diagramme de cette ferme.

La ferme étant symétrique et symétriquement chargée, il suffira de faire le tracé pour une moitié seulement.

La réaction de gauche a pour valeur :

$$R_A = 2 \times 2^T + \frac{2^T}{2} = 5 \text{ tonnes.}$$

Echelle des forces : $0^m,01$ pour 1 tonne.

On portera la réaction de *a* en *b* et les charges aux nœuds C et D en *bc* et *cd*. La demi-charge au nœud E sera représentée par *da*.

Digitized by Google

Dans le tracé des efforts, les barres AA_1 et A_1C_1 ne doivent pas entrer en ligne de compte.

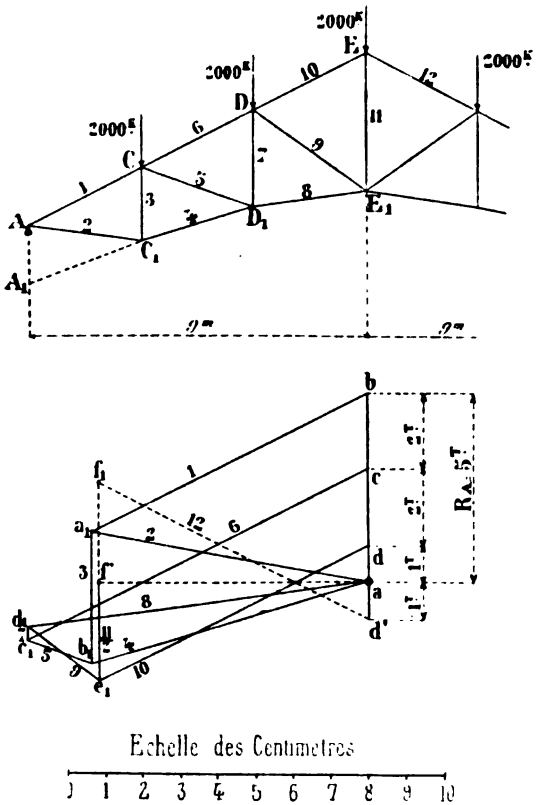


Fig. 320.

On partira donc du nœud A et on équilibrera la réaction R_A suivant les barres 1 et 2.

Nœud A : Polygone (aba_1a)

Efforts $ba_1 = 1$ et $a_1a = 2$.

Digitized by Google

Nœud C_1 : Polygone (aa_1b_1a)
Efforts $a_1b_1 = 3$ et $b_1a = 4$.

Nœud C : Polygone $(bcc_1b_1a_1b)$
Efforts $c_1b_1 = 5$ et $cc_1 = 6$.

Nœud D_1 : Polygone $(ab_1c_1d_1a)$
Efforts $c_1d_1 = 7$ et $d_1a = 8$.

Nœud D : Polygone $(cde_1d_1c_1c)$
Efforts $e_1d_1 = 9$ et $de_1 = 10$.

Nœud E : Polygone complet $(dd'f_1e_1d)$
Efforts $f_1e_1 = 11$ et $d'f_1 = 12$.

Au lieu de tracer la ligne $d'f_1$ parallèle à 12, on peut arrêter la parallèle e_1f_1 à 11, au point de rencontre f' avec l'horizontale menée du point A.

Mais alors e_1f' ne représentera que la moitié de l'effort dans le montant 11.

Le tableau ci-après donne les efforts dans les différentes barres.

Le signe — indique une compression et le signe + une tension.

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
1 = — 8T,3	4 = + 7T,7	2 = + 7T,5	3 = — 3T,5
6 = — 10 ,2	8 = + 9 ,2	5 = + 1 ,8	7 = + 0 ,4
10 = — 8 ,1		9 = — 2 ,4	11 = + 5 ,2

240. **Ferme à treillis double.** — Pour une ferme à treillis double, on pourra opérer comme on l'a fait pour les poutres à treillis simple.

On décomposera la ferme en ses deux systèmes et on appliquera à chacun d'eux la moitié des charges qui agissent aux nœuds.

On effectuera les tracés des efforts pour chaque système et on fera la somme algébrique des efforts pour les barres.

241. **Ferme à treillis double de 20 mètres de portée chargée en chaque nœud de 2.000 kilogrammes.** — La figure 321 donne le diagramme de la ferme, les traits pleins constituent les

Digitized by Google

croisillons du premier système et les traits pointillés ceux du deuxième système.

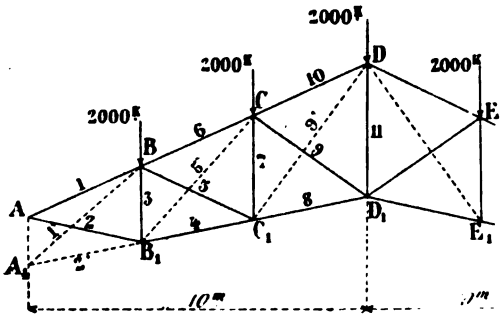


Fig. 321.

Les deux fermes seront alors constituées comme l'indiquent les diagrammes établis pour le tracé des efforts.

Les nœuds de chaque système seront donc soumis à une charge de 1.000 kilogrammes.

La réaction de gauche aura pour valeur dans les deux cas :

$$R_A = 2 \times 1^T + \frac{1^T}{2} = 2^T,5 .$$

Premier système (*fig.* 322) (échelle des forces $0^m,01$ pour 500 kilogrammes) :

Nœud A : Polygone (aba_1a)
Efforts $ba_1 = 1$ et $a_1a = 2$.

Nœud B_1 : Polygone (aa_1b_1a)
Efforts $a_1b_1 = 3$ et $b_1a = 4$.

Nœud B : Polygone $(bcc_1b_1a_1b)$
Efforts $c_1b_1 = 5$ et $cc_1 = 6$.

Nœud C_1 : Polygone $(ab_1c_1d_1a)$
Efforts $c_1d_1 = 7$ et $d_1a = 8$.

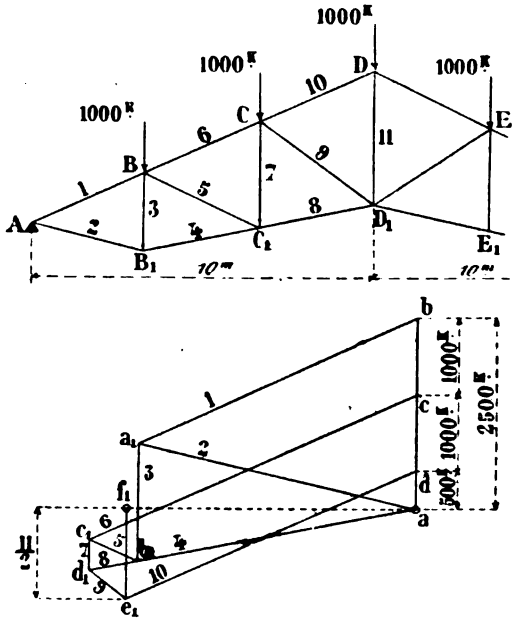
Nœud C : Polygone $(cde_1d_1c_1c)$
Efforts $e_1d_1 = 9$ et $de_1 = 10$.

Digitized by Google

Nœud D: Effort dans le montant 11

$$e_1f_1 = \frac{11}{2}.$$

Premier Système



Echelle des Centimètres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

FIG. 322.

Deuxième système (*fig.* 323) (échelle des forces 0m,01 pour 500 kilogrammes) :

Nœud A_1: Polygone (aba_1a)

Efforts $ba_1 = 1'$ et $a_1a = 2'$.

Nœud B: Polygone (bcb_1a_1b)

Efforts $b_1a_1 = 3$ et $cb_1 = 6$.

Digitized by Google

Nœud B_1 : Polygone $(aa_1b_1c_1a)$
Efforts $b_1c_1 = 5'$ et $c_1a = 4$.

Nœud C : Polygone $(cdd_1c_1b_1c)$
Efforts $d_1e_1 = 7$ et $dd_1 = 10$.

Nœud C_1 : Polygone $(ac_1d_1e_1a)$
Efforts $d_1e_1 = 9'$ et $e_1a = 8$.

Nœud D_1 : Demi-effort dans le montant 11

$$e_1f_1 = \frac{11}{2}.$$

Deuxième Système

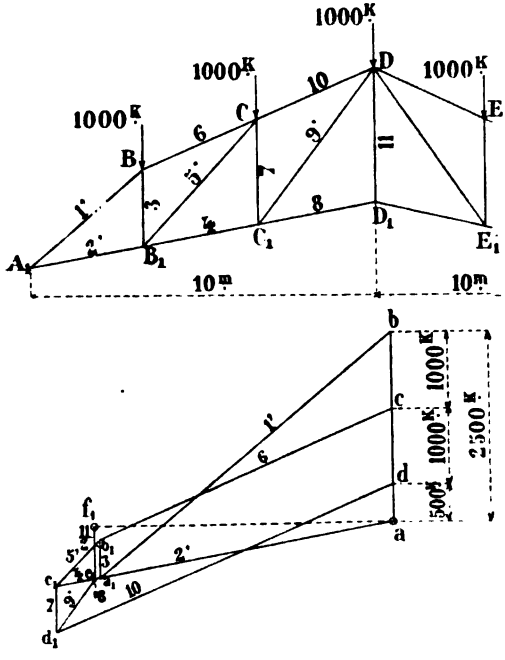


Fig. 323.

Les efforts étant relevés sur les épures, avec leurs signes, on a dressé le tableau ci-après, qui donne les efforts dans chaque barre.

NUMÉROS des BARRES	EFFORTS 1er système	EFFORTS 2e système	EFFORTS RÉSULTANTS	NUMÉROS des BARRES	EFFORTS 1er système	EFFORTS 2e système	EFFORTS RÉSULTANTS
Arbalétriers				Croisillons			
1	— 4T,0	0	—4T,00	1′	0	— 5T,00	—5T,00
6	— 4 ,7	— 4T,4	—9 ,10	2	+ 3T,75	0	+3 ,75
10	— 4 ,2	— 4 ,85	—9 ,05	5	+ 0 ,70	0	+0 ,70
Entraits				5′	0	— 0 ,85	—0 ,85
2′	0	+ 3 ,95	+3 ,95	9	— 0 ,60	0	—0 ,60
4	+ 3 ,75	+ 4 ,50	+8 ,25	9′	0	— 0 ,85	—0 ,85
8	+ 4 ,40	+ 4 ,00	+8 ,40	Montants			
				3	— 1 ,55	+ 0, 50	—1 ,05
				7	— 0 ,40	— 0 ,60	—1 ,00
				11	+ 2 ,50	+ 1 ,40	+3 ,90

242. Ferme quelconque dissymétrique. — On a parfois à déterminer les efforts dans une ferme composée d'une manière quelconque et chargée par cela même de charges différentes en chaque nœud.

Les tracés sont toujours les mêmes ; mais il faudra avoir soin de déterminer d'abord les réactions par un *funiculaire* et de faire le polygone de Crémona complètement.

Ainsi soit la ferme dont le diagramme est donné dans la figure 324, et soumise en chaque nœud aux charges indiquées sur la figure.

On commencera par porter sur une verticale *ac* les charges aux nœuds C, D, E, F ; on aura ainsi :

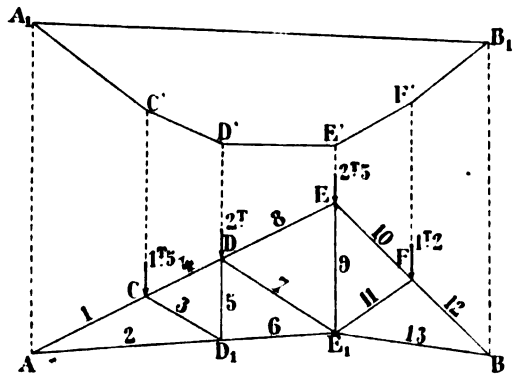
$$ab = 1^{T},5, \quad bc = 2^{T}, \quad cd = 2^{T},5 \quad \text{et} \quad de = 1^{T},2.$$

On prendra un pôle quelconque *o*, et on mènera les rayons polaires *oa*, *ob*, ..., *oe*, ce qui permettra de tracer le funiculaire $A_1C'D'E'F'B_1$.

En menant par le pôle *o* une parallèle à la ligne de fermeture A_1B_1, on déterminera le point *f* sur la résultante des forces *ac*.

Digitized by Google

La longueur *af* représentera, à l'échelle des forces, dans le cas présent $0^m,01$ pour 1 tonne, la réaction de gauche R_A, et *fe* la réaction de droite R_B.



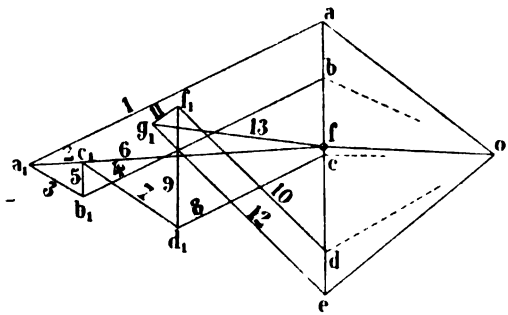


Fig. 324.

Connaissant les réactions, on procédera ensuite au tracé de Crémona ; on obtiendra successivement :

Digitized by Google

Nœud A : Polygone (faa_1f)
Efforts $aa_1 = 1$ et $a_1f = 2$.

Nœud C : Polygone (abb_1a_1a)
Efforts $bb_1 = 4$ et $b_1a_1 = 3$.

Nœud D_1 : Polygone $(fa_1b_1c_1f)$
Efforts $b_1c_1 = 5$ et $c_1f = 6$.

Nœud D : Polygone $(bcd_1c_1b_1b)$
Efforts $d_1c_1 = 7$ et $cd_1 = 8$.

Nœud E : Polygone (cdf_1d_1c)
Efforts $f_1d_1 = 9$ et $df_1 = 10$.

Nœud E_1 : Polygone $(fc_1d_1f_1g_1f)$
Efforts $f_1g_1 = 11$ et $g_1f = 13$.

Nœud F : Polygone (deg_1f_1d)
Effort $eg_1 = 12$.

Comme vérification, g_1c doit être parallèle à la barre 12.
Le tableau ci-après donne les efforts dans les barres.

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
$1 = -8^T,6$	$2 = +7^T,7$	$3 = -1^T,6$	$5 = +0^T,9$
$4 = -7,0$	$6 = +6,3$	$7 = -3,0$	$9 = +3,1$
$8 = -4,2$	$13 = +4,5$	$11 = -0,8$	
$10 = -5,4$			
$12 = -6,3$			

243. Fermes portant des charges sur les arbalétriers et en même temps sur l'entrait. — Si les charges inférieures sont fixes, comme dans le cas d'un faux plancher, on déterminera les charges aux nœuds inférieurs de la ferme et on fera alors deux tracés de Crémona, savoir :

L'un avec les charges aux nœuds supérieurs et l'autre avec les charges aux nœuds inférieurs.

Il ne restera plus qu'à faire la somme algébrique des deux efforts obtenus pour la même barre.

244. Exemple d'une ferme américaine de 12 mètres de portée qui supporte aux nœuds supérieurs une charge de 2.000 kilogrammes et aux nœuds inférieurs une charge de 1.500 kilo-

Digitized by Google

grammes. — Le diagramme de cette ferme (*fig.* 325) est donné dans la figure 326.

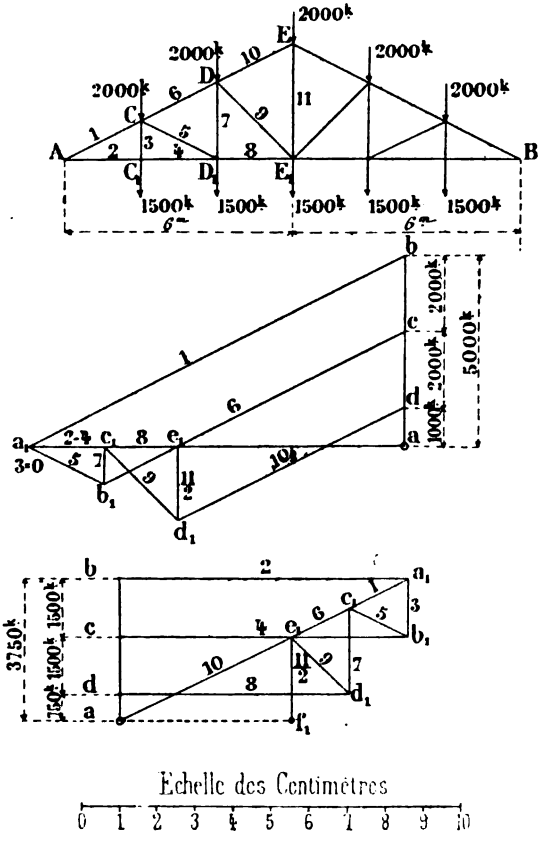


Fig. 325 et 326.

1° Nœuds supérieurs seulement chargés. — Réactions :

$$R_A = R_B = 2 \times 2^T + \frac{2^T}{2} = 5 \text{ tonnes.}$$

ab = 5 tonnes, *bc* = *cd* = 2 tonnes, *da* = 1 tonne.

Digitized by Google

Echelle des forces : $0^m,01$ pour 1 tonne :

Nœud A : Polygone (aba_1a)
Efforts $ba_1 = 1$ et $a_1a = 2$.

Nœud C_1 : Polygone (aa_1a)
Efforts $a_1 = 0 = 3$ $a_1a = 4$.

Nœud C : Polygone (bcb_1a_1b)
Efforts $cb_1 = 6$ et $b_1a_1 = 5$.

Nœud D_1 : Polygone $(ac_1b_1a_1a)$
Efforts $ac_1 = 8$ et $c_1b_1 = 7$.

Nœud D : Polygone $(cdd_1c_1b_1c)$
Efforts $dd_1 = 10$ et $d_1c_1 = 9$.

Nœud E : Polygone dd_1e_1
Effort $d_1e_1 = \frac{11}{2}$.

2° Nœuds inférieurs chargés. — Les nœuds inférieurs étant chargés, toutes les membrures supérieures ou arbalétriers partiront du même point origine de la réaction et les membrures inférieures ou entraits découperont, sur la résultante des forces, des segments égaux à ces forces (Voir n° 190. — Remarque I).

$$\text{Réactions } R_A = R_B = 2 \times 1^T,5 + \frac{1^T,5}{2} = 3^T,75.$$

$$ab = 3^T,75, \quad bc = cd = 1^T,5 \quad \text{et} \quad da = 0^T,75,$$

Echelle des forces : $0^m,01$ pour 1 tonne :

Nœud A : Polygone (aba_1a)
Efforts $ba_1 = 2$ et $a_1a = 1$.

Nœud C_1 : Polygone (bcb_1a_1b)
Efforts $cb_1 = 4$ et $b_1a_1 = 3$.

Nœud C : Polygone $(ac_1b_1a_1a)$
Efforts $ac_1 = 6$ et $c_1b_1 = 5$.

Nœud D_1 : Polygone $(cdd_1c_1b_1c)$
Efforts $dd_1 = 8$ et $d_1c_1 = 7$.

Nœud D : Polygone $(ac_1d_1c_1a)$
Efforts $ac_1 = 10$ et $c_1d_1 = 9$.

Digitized by Google

Nœud E : Polygone ae_1f_1

$$\text{Effort } e_1f_1 = \frac{11}{2}.$$

Le tableau ci-après donne les résultats obtenus.

NUMÉROS des BARRES	EFFORTS			NUMÉROS des BARRES	EFFORTS		
	Charges supérieures	Charges inférieures	Totaux		Charges supérieures	Charges inférieures	Totaux
Arbalétriers				Croisillons			
1	$-11^T,1$	$-8^T,5$	$-19^T,6$	5	$-2^T,2$	$-1^T,7$	$-3^T,9$
6	$-8,9$	$-6,7$	$-15,6$	9	$-2,8$	$-2,2$	$-5,0$
10	$-6,7$	$-5,1$	$-11,8$				
Entraits				Montants			
2	$+9,9$	$+7,6$	$+17,5$	3	0	$+1,5$	$+1,5$
4	$+9,9$	$+7,6$	$+17,5$	7	$+1,0$	$+2,2$	$+3,2$
8	$+7,9$	$+6,0$	$+13,9$	11	$+4,0$	$+4,4$	$+8,4$

Remarque. — Il peut arriver que les charges agissant sur l'entrait soient mobiles, ce qui a lieu notamment lorsque l'entrait doit servir à accrocher un palan en n'importe quel point pour soulever des poids.

Généralement, les points d'attache de la charge doivent être prévus aux nœuds de la ferme, afin d'éviter un moment de flexion dans les barres inférieures et nécessiter, par suite, un renforcement.

Les efforts de traction ou de compression dans les barres de la ferme seront toujours maxima lorsque la charge sera placée à un nœud, savoir :

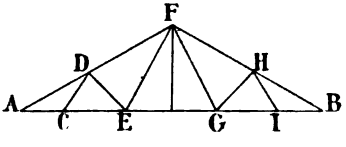


Fig. 327.

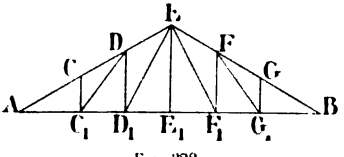


Fig. 328.

L'arbalétrier directement opposé au nœud chargé, l'entrait situé immédiatement à gauche de ce nœud et les deux barres de treillis placées immédiatement à droite.

Digitized by Google

Ainsi, pour la ferme (*fig.* 327), on obtiendra les efforts maxima dans les barres DF, CE, EF et FG en plaçant la charge au nœud E.

Pour la ferme (*fig.* 328), la charge placée au nœud D_1 donnera les efforts maxima dans les barres DE, C_1D_1, D_1E et EF_1.

Tandis que dans la ferme (*fig.* 329), la charge placée au nœud D_1 donnera les efforts maxima dans les barres CD, C_1D_1, DD_1 et DE_1.

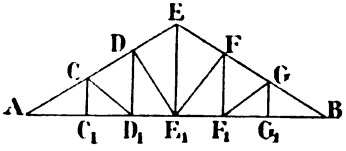


Fig. 329.

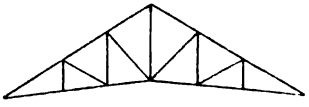


Fig. 330.

Pour cette dernière ferme, le montant aboutissant au nœud chargé supportera un effort toujours égal à la charge. Il en serait de même si l'entrait était brisé au milieu de la ferme, comme celui de la figure 330, sauf pour le montant milieu, qui supportera un effort plus grand que la charge.

Si le point d'attache de la charge doit avoir lieu à un point quelconque de l'entrait, il est nécessaire de combiner pour celui-ci le moment de flexion maximum, pour une position à rechercher, avec l'effort normal développé pour la même position.

On supposera, pour évaluer ce moment de flexion, que la partie d'entrait entre deux nœuds est encastrée sur ces nœuds.

245. Ferme de 12 mètres de portée qui doit recevoir en un point quelconque de l'entrait une charge unique de 6.000 kilogrammes. — La charge devant être appliquée à chaque nœud inférieur, il serait nécessaire, pour avoir les efforts maxima dans les barres, de déterminer les réactions pour chaque position de cette charge.

Digitized by Google

Mais, pour une ferme divisée en 6 panneaux égaux par exemple (*fig.* 331), ces différentes réactions s'obtiennent rapi-

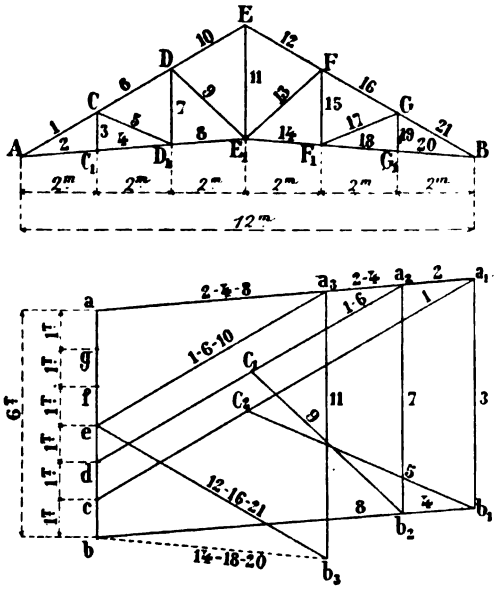


Fig. 331.

dement en remarquant que, si λ est l'écartement constant entre deux nœuds et P la charge, on aura successivement :

Charge placée au nœud C_1 : $R_A = P \times \frac{5\lambda}{6\lambda} = \frac{5}{6}$ P

— — D_1 : $R_A = P \times \frac{4\lambda}{6\lambda} = \frac{4}{6}$ P

— — E_1 : $R_A = P \times \frac{3\lambda}{6\lambda} = \frac{3}{6}$ P

et ainsi de suite pour la moitié droite de la ferme.

Digitized by Google

Il suffira donc de diviser la charge P en 6 parties égales et de choisir parmi ces divisions celle qui correspond au nœud considéré.

Dans le cas présent, la charge est de 6.000 kilogrammes, ce qui donne pour chaque division 1.000 kilogrammes.

On portera donc sur une verticale *ab* la charge de 6.000 kilogrammes que l'on divisera en 6 parties; on obtiendra ainsi les points *g*, *f*, *e*, *d*, *c*.

Le point *c* correspond au nœud C_1, et *ca* représente la réaction de gauche lorsque la charge est placée sur le nœud; le point *d* correspond au nœud D_1, et *da* représente la réaction de gauche, et ainsi de suite.

Le tracé des efforts dans les barres s'effectue alors de la manière suivante :

Echelle des forces : $0^m,01$ pour 1 tonne.

1° Charge placée en C_1.

Nœud A : Polygone $(ca a_1 c)$
Efforts $aa_1 = 2$ et $a_1c = 1$.

Nœud C_1 : Polygone (abb_1a_1a)
Efforts $bb_1 = 4$ et $b_1a_1 = 3$.

Nœud C : Polygone $(ca_1b_1c_2c)$
Efforts $cc_2 = 6$ et $c_2b_1 = 5$.

Il n'est pas nécessaire de retenir l'effort $cc_2 = 6$, car le maximum dans la barre 6 sera donné en plaçant la charge au nœud D_1.

Le sens des efforts déterminés est le suivant:

Arbalétrier 1 et croisillon 5, *compression*,
Entrait 2 et montant 3, *tension*.

2° Charge placée en D_1. — Le point de séparation des réactions est le point *d*.

Nœud A : Polygone (da_2ad)
Efforts $da_2 = 1$ et $a_2a = 2$.

Nœud C_1 : Polygone (aa_2a)
Efforts $aa_2 = 4$ et $a_2 = 0 = 3$.

Digitized by Google

Nœud C : Polygone (da_2d)
Efforts $a_2d = 6$ et $a_2 = 0 = 5$.

Nœud D_1 : Polygone (abb_2a_2a)
Efforts $bb_2 = 8$ et $b_2a_2 = 7$.

Nœud D : Polygone $(da_2b_2c_1d)$
Efforts $dc_1 = 10$ et $c_1b_2 = 9$.

L'effort 10 n'est pas à retenir.

Le sens des efforts déterminés est le suivant :

Arbalétrier 6 et croisillon 9, *compression*,
Entrait 4 et montant 7, *tension*.

3° Charge placée en E_1. — Le point de séparation des réactions est en e, point milieu de la charge ab.

Pour ce nœud milieu, le tracé des efforts se simplifie beaucoup : en effet, les efforts dans les arbalétriers 10 et 12 sont égaux, les efforts dans les diagonales 9 et 13 sont nuls.

Il suffit de mener ea_3 parallèle à AE et eb_3 parallèle à EB, aa_3 et bb_3 étant respectivement parallèles à AE_1 et E_1B, et de joindre les points a_3 et b_3.

La ligne a_3b_3 doit être verticale ; elle représente l'effort dans le montant 11, qui est dans ce cas supérieur à la charge.

Les efforts sont :

$$aa_3 = 2.\ 4.\ 8, \qquad ea_3 = 1.\ 6.\ 10 \qquad \text{et} \qquad a_3b_3 = 11.$$

Les arbalétriers sont comprimés, les entraits tendus et le montant également tendu.

En résumé, d'après ce qui précède, le tracé des efforts peut se faire rapidement, quel que soit le type de la ferme.

Les efforts maxima relevés sur l'épure seraient les suivants :

Arbalétriers	Entraits	Croisillons	Montants
$1 = -11^T,6$	$2 = +10^T,0$	$5 = -6^T,5$	$3 = +6^T,0$
$6 = -9,5$	$4 = +10,0$	$9 = -5,4$	$7 = +6,0$
$10 = -7,1$	$8 = +8,2$		$11 = +7,1$

En ce qui concerne la flexion de l'entrait, on supposera

Digitized by Google

que chaque tronçon intermédiaire C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 et F_1G_1 est encastré aux deux extrémités et que les tronçons d'about AC_1 et G_1B sont libres aux appuis A et B et encastrés en C_1 et G_1.

1° Tronçons intermédiaires. — Pour une poutre encastrée aux deux bouts, le moment fléchissant maximum se produit sur l'un des appuis, et le maximum maximorum a lieu lorsque la charge unique se trouve placée au tiers de la portée voisine de cet appui (n° 152).

Ce moment fléchissant maximum maximorum a pour valeur :

$$\mu = -0{,}148Pl,$$

P étant la charge, et l la portée.

Dans le cas présent, en ne tenant pas compte de l'inclinaison de l'entrait qui est faible,

$$l = 2 \text{ mètres} \qquad \text{et} \qquad P = 6 \text{ tonnes},$$

d'où un moment fléchissant maximum maximorum de :

$$\mu = -0{,}148 \times 6^{T} \times 2^{m} = -1^{Tm},776.$$

2° Tronçons d'about. — Pour une poutre encastrée en un bout et libre à l'autre, le moment fléchissant maximum maximorum se produit également sur l'appui encastré, lorsque la charge est à $x = 0{,}423l$ de cet appui (n° 161).

Le moment fléchissant maximum maximorum a alors pour valeur :

$$\mathfrak{M} = -0{,}1925Pl,$$

soit dans le cas présent :

$$\mathfrak{M} = -0{,}1925 \times 6^{T} \times 2^{m} = -2^{Tm},310.$$

Efforts de tension dans les entraits pour la position de la charge qui donne les moments de flexion maxima. — Il y aurait lieu évidemment de rechercher pour chaque entrait l'effort de tension développé par la charge lorsqu'elle est placée entre deux nœuds, et *au tiers* de la distance qui sépare ces

Digitized by Google

deux nœuds pour les tronçons intermédiaires, et aux $\frac{423}{1000}$ de cette distance pour les tronçons d'about.

Il faudrait alors, pour chaque entrait, répartir la charge sur les nœuds qui le limitent et faire un tracé de Crémona avec deux nœuds chargés.

Ces tracés sont laborieux, et dans la pratique on se contente de prendre les efforts de tension développés dans les entraits lorsque la charge est placée aux différents nœuds.

On obtient des résultats un peu plus forts ; mais, comme l'encastrement des tronçons sur les nœuds n'est qu'une hypothèse, on agit avec plus de sécurité.

246. Ferme en forme de marquise. — Cette ferme s'emploie pour les auvents, les appentis, etc.

Elle est encastrée en un bout et en porte-à-faux. Le tracé des efforts dans une pareille ferme se fait toujours par le polygone de Crémona, mais avec une petite variante.

On décompose directement les charges qui agissent aux nœuds, suivant les barres.

Ainsi soit la ferme (*fig.* 332), qui reçoit aux nœuds supérieurs les charges P_1, P_2 et P_3.

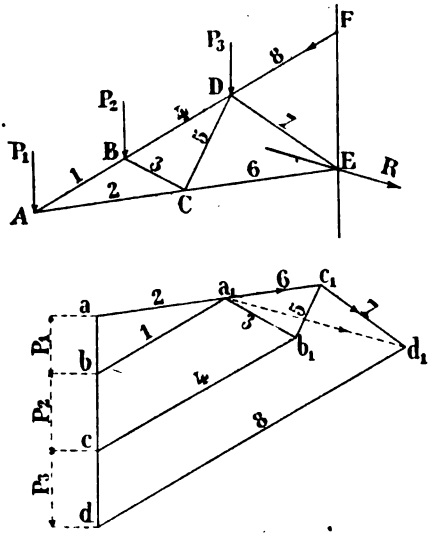


Fig. 332.

On porte sur une verticale ces charges bout à bout, soit alors :

$$ab = P_1, \qquad bc = P_2 \qquad \text{et} \qquad cd = P_3.$$

Digitized by Google

On commencera par équilibrer la charge P_1, qui agit au nœud A, suivant les deux barres 1 et 2, en remarquant que les barres qui constituent la membrure non chargée doivent toutes partir du point a et que les barres qui constituent la membrure chargée doivent découper sur la verticale des segments égaux aux charges.

On mènera donc de a une parallèle à 2 et de b une parallèle à 1.

On détermine ainsi le polygone (aba_1a).

Les efforts dans les barres sont :

$$ba_1 = 1 \text{ (tension)} \qquad \text{et} \qquad a_1a = 2 \text{ (compression)}.$$

On passera ensuite au nœud B où agissent les forces P_2, 1, 3 et 4, parmi lesquelles P_2 et 1 sont connues.

On constituera donc le polygone (bcb_1a_1b) en menant par les points c et a_1 des parallèles à 4 et à 3 qui se rencontrent en b_1.

Les efforts dans les barres sont :

$$cb_1 = 4 \text{ (tension)},$$
$$b_1a_1 = 3 \text{ (compression)}.$$

On passera ensuite au nœud C où agissent les forces 2, 3, 5 et 6, parmi lesquelles 2 et 3 sont connues.

On constituera donc le polygone $(aa_1b_1c_1a)$ en menant par les points b_1 et a_1 des parallèles à 5 et à 6 qui se rencontrent en c_1.

Les efforts dans les barres sont :

$$a_1c_1 = 6 \text{ (compression)},$$
$$c_1b_1 = 5 \text{ (tension)}.$$

Enfin on passera au nœud D où agissent les forces P_3, 4, 5, 7, 8, parmi lesquelles P_3, 4 et 5 sont connues; on constituera donc le polygone $(cdd_1c_1b_1c)$ en menant par les points d et c, des parallèles à 8 et à 7 qui se rencontrent au point d_1.

Les efforts dans les barres sont :

$$dd_1 = 8 \text{ (tension)} \qquad \text{et} \qquad d_1c_1 = 7 \text{ (compression)}.$$

Les efforts agissant aux points F et E sont les suivants :

Digitized by Google

En F, une force dirigée suivant la barre 8 et égale à la tension dans cette barre. Le sens de cette force va de F vers A.

Au point E, les deux forces qui agissent sont les efforts 6 et 7, tous deux des compressions ; en conséquence, le sens de ces efforts tend à rapprocher les flèches vers le nœud E. Si on reporte le sens de ces flèches dans le polygone de Crémona aux efforts $a_1c_1 = 6$ et $c_1d_1 = 7$, la résultante de ces deux efforts sera a_1d_1 avec un sens de a_1 vers d_1.

Il suffira d'évaluer à l'échelle des forces la longueur a_1d_1 pour avoir la résultante R agissant en E.

Sa direction sera donnée en menant par ce point une parallèle à a_1d_1.

Si la ferme recevait en même temps des charges aux nœuds inférieurs, le tracé serait analogue ; mais dans le polygone de Crémona, toutes les barres de la membrure supérieure partiraient du point supérieur de la résultante des charges, et les barres de la membrure inférieure découperaient sur cette résultante des segments égaux aux charges.

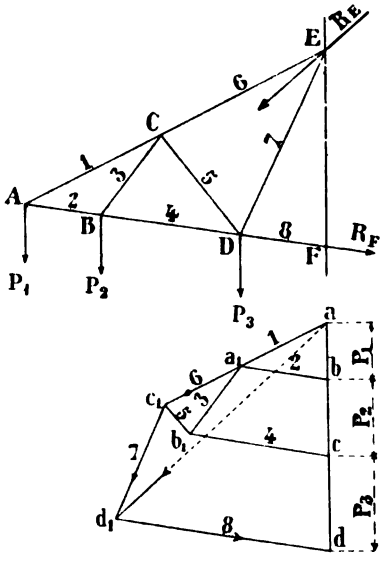


Fig. 333.

Soit la ferme en porte-à-faux (*fig.* 333) recevant aux nœuds inférieurs les charges P_1, P_2 et P_3.

On portera sur une verticale les charges bout à bout, soit :

$$ab = P_1, \qquad bc = P_2 \quad \text{et} \quad cd = P_3.$$

Digitized by Google

Les barres de l'arbalétrier partiront toutes du point a:

Nœud A : Polygone (aba_1a)
Efforts $ba_1 = 2$ (compression);
$a_1a = 1$ (tension).

Nœud B : Polygone (bcb_1a_1b)
Efforts $cb_1 = 4$ (compression);
$b_1a_1 = 3$ (tension).

Nœud C : Polygone ($aa_1b_1c_1a$)
Efforts $ac_1 = 6$ (tension);
$c_1b_1 = 5$ (compression).

Nœud D : Polygone ($cdd_1c_1b_1c$)
Efforts $dd_1 = 8$ (compression);
$d_1c_1 = 7$ (tension).

Les efforts agissant aux points E et F sont les suivants :

En E, la résultante des efforts 6 et 7, soit, dans le polygone, la longueur ad_1 évaluée en force.

Par le point E, on mènera une parallèle à ad_1 ; on obtiendra la résultante R_E en position. Le sens va de E vers A.

Au point F, la force R_F est égale à la compression dans la barre 8, et elle agit suivant la direction de cette barre. Le sens va de F vers la droite.

247. Application à une console à treillis de 3 mètres de porte-à-faux qui porte à la partie supérieure trois charges (*fig.* 334). — On remarquera tout d'abord que l'extrémité de la console est à âme pleine, ce qui a lieu généralement dans le but de constituer les assemblages d'about nécessaires pour supporter une poutrelle qui a pour hauteur la distance AA_1.

La première charge n'agissant pas à un nœud de la console à treillis, le départ du tracé de Crémona ne peut être effectué.

Pour les trois premières barres 1, 2 et 3, on emploiera la méthode de Culmann. A cet effet, on décomposera la force extérieure à une section mn suivant les trois barres considérées.

On portera donc sur une verticale à l'échelle de $0^m,01$ pour

Digitized by Google

1 tonne toutes les charges bout à bout :

$ab = 1^T,5$, $bc = 3$ tonnes et $cd = 2$ tonnes.

La force extérieure à la section *mn* est la charge de $1^T,5$ représentée par *ab*.

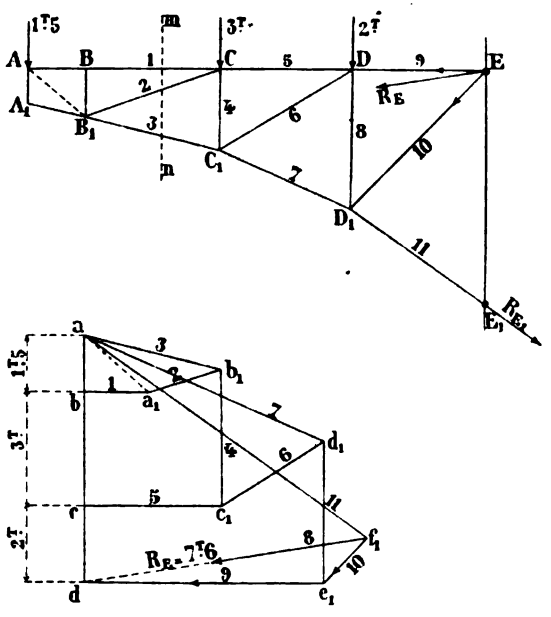


Fig. 334.

Dans le diagramme de la console, la barre 1 prolongée rencontre la charge de $1^T,5$ au point A ; on joindra donc par une droite le point A au point d'intersection B_1 des deux autres barres 2 et 3.

Digitized by Google

Dans le polygone des forces, il suffira de mener par b une parallèle à 1 jusqu'à la rencontre a_1 d'une parallèle à AB_1, issue de a.

Ensuite, du point a_1, on mènera une parallèle à 2 et de a une parallèle à 3. Ces deux parallèles se rencontrent au point b_1.

Les efforts sont alors :

$$ba_1 = 1 \text{ (tension)};$$
$$a_1b_1 = 2 \text{ (tension)};$$
$$b_1a = 3 \text{ (compression)}.$$

Ces trois efforts déterminés, on pourra continuer la détermination des efforts par un tracé de Crémona :

Nœud C : Polygone $(bcc_1b_1a_1b)$
Efforts $cc_1 = 5$ (tension);
$c_1b_1 = 4$ (compression).

Nœud C_1 : Polygone $(ab_1c_1d_1a)$
Efforts $ad_1 = 7$ (compression);
$d_1c_1 = 6$ (tension).

Nœud D : Polygone $(cde_1d_1c_1c)$
Efforts $de_1 = 9$ (tension);
$e_1d_1 = 8$ (compression).

Nœud D_1 : Polygone $(ad_1e_1f_1a)$
Efforts $af_1 = 11$ (compression);
$f_1e_1 = 10$ (tension).

Les efforts dans les différentes barres sont consignés ci-après :

Membrures supérieures	Membrures inférieures	Diagonales	Montants
$1 = + 1^T,75$	$3 = - 3^T,7$	$2 = + 1^T,9$	$4 = - 3^T,60$
$5 = + 3\ ,55$	$7 = - 6\ ,9$	$6 = + 3\ ,2$	$8 = - 3\ ,65$
$9 = + 6\ ,30$	$11 = - 9\ ,2$	$10 = + 1\ ,7$	

Efforts aux points E_1 *et* E. — Au point E_1, l'effort est $R_{E_1} = 9^T,2$; il agit en compression sur l'appui E_1.

Au point E, les efforts qui agissent sont les barres 9 et 10,

Digitized by Google

toutes deux tendues; en conséquence, le sens de la direction de ces efforts s'éloigne de ce point.

Dans le polygone des forces, la résultante des efforts 9 et 10 est :

$$R_E = df_1 = 7^T,6, \text{ avec un sens de } f_1 \text{ vers } d.$$

Il suffira donc de mener par le point E une parallèle à df_1 pour avoir l'effort résultant en ce point.

Digitized by Google

CHAPITRE XVII

DÉFORMATIONS DES POUTRES

FLÈCHES

Le calcul des déformations des poutres comporte deux cas, savoir :

1° Poutres à âme pleine ;

2° Poutres à treillis.

§ 1. — POUTRES A AME PLEINE

A. — Poutres a section constante

248. Formules types. — Lorsque les poutres sont à section constante et chargées d'un poids uniformément réparti ou bien d'une charge unique placée au milieu de la portée, la flèche en un point quelconque et la flèche maxima sont données par les formules ci-après, dans lesquelles :

x est la distance de l'appui de gauche au point considéré ;
E, le coefficient d'élasticité ;
I, le moment d'inertie ;
l, la portée de la poutre.

1° **Poutre sur deux appuis libres.** — *a*) Charge uniformément répartie de p par mètre courant. — Flèche en un point quelconque :

$$y = \frac{1}{EI} \times \frac{px}{24}(2lx^2 - x^3 - l^3);$$

Digitized by Google

Flèche maxima au milieu :

$$f_m = -\frac{5pl^4}{384EI}.$$

b) Charge unique placée au milieu de la poutre. — Flèche en un point quelconque situé entre l'appui de gauche et le milieu de la poutre, l'autre moitié étant symétrique :

$$y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3xl^2);$$

Flèche maxima au milieu :

$$f_m = -\frac{Pl^3}{48EI}.$$

2° **Poutre encastrée aux deux appuis.** — *a*) Charge uniformément répartie de p par mètre courant. — Flèche en un point quelconque :

$$y = \frac{px^2}{24EI}(2lx - x^2 - l^2);$$

Flèche maxima au milieu :

$$f = -\frac{pl^4}{384EI}.$$

b) Charge unique placée au milieu de la poutre. — Flèche en un point quelconque compris entre l'appui de gauche et le milieu :

$$y = \frac{P}{48EI}x^2(4x - 3l);$$

Flèche maxima au milieu :

$$f_m = -\frac{Pl^3}{192EI}.$$

3° **Poutre encastrée sur un appui et libre à l'autre.** — L'abscisse x est comptée à partir de l'appui encastré :

Digitized by Google

a) Charge uniformément répartie par mètre courant. — Flèche en un point quelconque :

$$y = \frac{px^2}{48EI}(5lx - 2x^2 - 3l^2);$$

Flèche maxima pour $x = 0{,}5785l$:

$$f_m = -\frac{pl^4}{192EI}.$$

b) Charge unique placée au milieu. — Flèche en un point quelconque ; entre l'appui encastré et le milieu :

$$y = \frac{P}{96EI}(11x^3 - 9lx^2);$$

Du milieu à l'appui libre :

$$y = \frac{P}{96EI}(-5x^3 + 15lx^2 - 12l^2x + 2l^3).$$

Flèche maxima pour $x = 0{,}5528l$:

$$f_m = -0{,}00932\frac{Pl^3}{EI}.$$

4° **Poutre encastrée sur un appui et en porte-à-faux.** — L'abscisse x est comptée à partir de l'encastrement.

a) Charge uniformément répartie. — Flèche en un point quelconque :

$$y = \frac{p}{24EI}(4lx^3 - x^4 - 6l^2x^2);$$

Flèche maxima à l'extrémité du porte-à-faux :

$$f_m = -\frac{pl^4}{8EI}.$$

b) Charge unique sur la poutre placée a une distance l

Digitized by Google

DE L'ENCASTREMENT. — Flèche en un point quelconque compris entre l'encastrement et la charge :

$$y = \frac{P}{6EI} x^2 (x - 3l);$$

Flèche sous la charge :

$$f = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

5° **Tracé de la ligne élastique déformée.** — Avec les formules ci-dessus on calculera les flèches en différents points de la poutre. On portera ces flèches en ordonnées aux points considérés et on joindra les extrémités de ces ordonnées par une ligne continue, qui sera la *ligne élastique déformée*.

249. Application à une poutre en fer de 6 mètres de portée posée sur deux appuis libres et chargée d'une charge uniformément répartie de 500 kilogrammes par mètre courant. — La section de la poutre est en forme de double T, elle est constante et se compose d'une âme de 300 × 8 et de quatre cornières de 60 × 60 × 8. — Les tables des moments d'inertie donnent :

Ame.....	300 × 8	= 0,000018
4 cornières.....	60 × 60 × 8	= 0,000064
	Moment d'inertie I	= 0,000082

Pour la tôlerie de fer rivée, on prend :

$$E = 18 \times 10^9.$$

La formule qui donne la flèche en un point quelconque :

$$y = \frac{1}{EI} \times \frac{px}{24} (2lx^2 - x^3 - l^3),$$

devient, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$y = \frac{1}{18 \times 10^9 \times 0,000\ 082} \times \frac{500^k}{24} x \left(2 \times 6 \times x^2 - x^3 - \overline{6}^3\right)$$

$$y = 0,000014x(12x^2 - x^3 - 216).$$

Digitized by Google

La charge étant symétrique par rapport au milieu, il suffira de calculer les ordonnées pour une moitié seulement.

On divisera la poutre en six parties égales, par exemple, ce qui donne des écartements de 1 mètre (*fig.* 335).

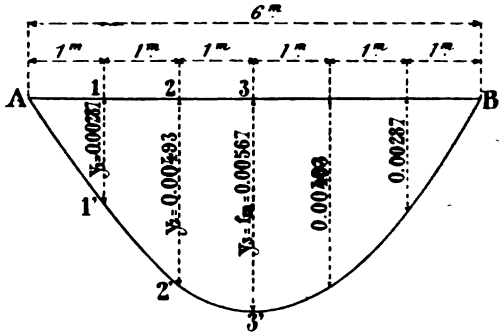


Fig. 335.

La flèche sur les appuis est nulle :

Point A.....	$x = 0$,	$y_A = 0$.
Point 1.....	$x = 1^m$,	$y_1 = -0^m,00287$.
Point 2.....	$x = 2^m$,	$y_2 = -0^m,00493$.
Point 3 (milieu)...	$x = 3^m$,	$y_3 = -0^m,00567$.

On portera ces valeurs en ordonnées, en prenant comme échelle 1 centimètre par millimètre de flèche par exemple; on aura ainsi :

Au point 1.....	ordonnée $1.1' = 2^{cm},87$
Au point 2.....	ordonnée $2.2' = 4^{cm},93$
Au point 3.....	ordonnée $3.3' = 5^{cm},67$

A droite du point 3, on aurait les mêmes ordonnées placées symétriquement. On joindra les points A, 1', 2', 3', et leurs symétriques par une ligne continue qui sera la *ligne élastique déformée*.

On procéderait de la même manière pour une poutre chargée au milieu d'un poids unique.

Digitized by Google

Remarque. — Si la poutre était soumise à l'action d'une charge uniformément répartie et d'un poids placé au milieu, on calculerait séparément les flèches pour chaque type de charge et on construirait la ligne élastique pour chacune d'elles, à la même échelle bien entendu. Il suffirait ensuite de faire la somme des deux ordonnées d'un même point pour obtenir la ligne élastique pour les deux charges réunies.

250. Application à une poutre en acier de 6 mètres de portée encastrée à un bout et librement posée à l'autre, soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de 1.000 kilogrammes et d'un poids de 5.000 kilogrammes placé au milieu. — La section de la poutre est constante, elle est en forme de double T et est composée d'une âme de 400 × 8 et de quatre cornières de 70 × 70 × 8. — Les tables des moments d'inertie donnent :

Ame.....	$400 \times 8 =$	0,000043
4 cornières.....	$70 \times 70 \times 8 =$	0,000138
	Moment d'inertie $I =$	0,000181

Pour la tôlerie d'acier doux :

$$E = 20 \times 10^9.$$

1° *Recherche de la ligne élastique sous l'action de la charge uniformément répartie.* — La formule qui donne la flèche en un point quelconque est :

$$y = \frac{px^2}{48 \,.\, EI} (5lx - 2x^2 - 3l^2),$$

soit, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$y = \frac{1000^k \, x^2}{48 \times 20 \times 10^9 \times 0{,}000181} (5 \times 6^m \times x - 2x^2 - 3 \times 6^2)$$

$$y = 0{,}000.005.75 \times x^2 (30x - 2x^2 - 108).$$

Digitized by Google

La poutre sera divisée en 6 parties égales de 1 mètre, (*fig.* 336).

Point A :	$x = 0$,	$y_A = 0$.
Point 1 :	$x = 1$,	$y_1 = -0^m,00046$.
Point 2 :	$x = 2$,	$y_2 = -0^m,00129$.
Point 3 :	$x = 3$,	$y_3 = -0^m,00185$.
Point 4 :	$x = 4$,	$y_4 = -0^m,00184$.
Point 5 :	$x = 5$,	$y_5 = -0^m,00115$.
Point B :	$x = 6$,	$y_B = 0$.

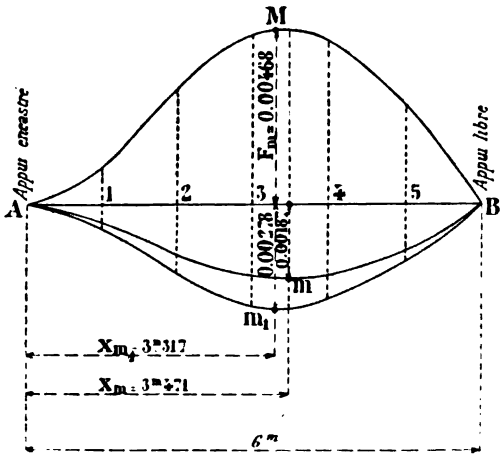


Fig. 336.

La flèche maxima se produit à une distance de l'appui encastré A égale à :

$$x = 0,5785l = 0,5785 \times 6^m = 3^m,471,$$

et sa valeur est :

$$f_m = -\frac{pl^4}{192EI} = \frac{1000 \times 6^4}{192 \times 20 \times 10^9 \times 0,000181} = -0,00187.$$

La ligne élastique est représentée sur la figure par la courbe A*m*B à l'échelle de $0^m,01$ par millimètre de flèche.

Digitized by Google

2° *Recherche de la ligne élastique sous l'action de la charge unique de* 5.000 *kilogrammes placée au milieu.* — Les formules qui donnent la flèche en un point quelconque sont :

De l'appui encastré au milieu :

$$y = \frac{P}{96EI}(11x^3 - 9lx^2); \qquad (1)$$

Du milieu à l'appui libre :

$$y = \frac{P}{96EI}(-5x^3 + 15lx^2 - 12l^2x + 2l^3). \qquad (2)$$

En remplaçant les lettres par leur valeur, il vient :

$$y = \frac{5000^k}{96 \times 20 \times 10^9 \times 0{,}000181}(11x^3 - 9 \times 6^m \times x^2)$$

Formule (1) $y = 0{,}000014\,(11x^3 - 54x^2)$.

$$y = \frac{5000}{96 \times 20 \times 10^9 \times 0{,}000181}(-5x^3 + 15 \times 6 \times x^2 - 12 \times 6^2 \times x + 2 \times 6^3)$$

Formule (2) $y = 0{,}000014\,(-5x^3 + 90x^2 - 432x + 432)$.

On prendra les mêmes divisions de la poutre :

La formule (1) doit être appliquée du point d'appui encastré A jusqu'au milieu (point 3), et la formule (2) à partir du point milieu jusqu'à l'appui *libre* :

Point A :	$x = 0$,	formule (1)	$y_A = 0$.
Point 1 :	$x = 1$,	—	$y_1 = -0{,}00060$.
Point 2 :	$x = 2$,	—	$y_2 = -0{,}00179$.
Point 3 :	$x = 3$,	—	$y_3 = -0{,}00265$.
Point 4 :	$x = 4$,	formule (2)	$y_4 = -0{,}00246$.
Point 5 :	$x = 5$,	—	$y_5 = -0{,}00144$.
Point B :	$x = 6$,	—	$y_B = 0$.

La flèche maxima se produit à une distance de l'appui encastré A égale à :

$$x_{m1} = 0{,}5528l = 0{,}5528 \times 6^m = 3^m{,}317,$$

Digitized by Google

et sa valeur est :

$$f_{m_1} = -0{,}00932 \frac{Pl^3}{EI} = -0{,}00932 \frac{5000 \times 6^3}{20 \times 10^9 \times 0{,}000181} = -0{,}00278$$

La ligne élastique due à la charge unique est représentée sur la même figure 336 par Am_1B,

Pour obtenir la ligne élastique relative aux deux charges, il suffira de faire la somme des ordonnées, et on obtiendra ainsi la courbe AMB.

La flèche maxima se produit au point M, et sa valeur relevée à l'échelle des déformations est de :

$$F_m = 0^m{,}00468$$

Remarque I. — Par suite du principe sur les encastrements, toutes les courbes représentant les lignes élastiques sont tangentes à la droite AB, à l'appui encastré A. De ce fait, il se produit entre cet appui et le milieu de la poutre un point d'inflexion.

Sur l'appui B, qui est libre, les tangentes aux courbes sont obliques par rapport à la ligne AB.

Remarque II. — Si l'on est en présence de charges placées d'une manière quelconque sur la poutre, on pourrait déterminer pour chaque cas particulier l'équation de la ligne élastique et calculer les flèches, mais ce procédé est parfois très laborieux, et il convient alors d'employer la méthode graphique qui est exposée ci-après pour les poutres à section variable, en tenant compte bien entendu de la section constante.

B. — Poutre a section variable

251. **Généralités.** — Lorsqu'on procède au calcul des déformations d'une poutre sous l'action de charges définies en position, on connaît la ligne représentative des moments fléchissants pour cette position et, en outre, les sections de la poutre.

Soit alors une poutre AB divisée en parties AC, CD, DE, EF,

Digitized by Google

et FB, qui comportent des sections différentes les unes des autres (*fig.* 337).

Soit $A_1C_1'D_1'E_1'F_1'B_1$ la ligne représentative des moments fléchissants produits par les charges données.

On mènera par les points C, D, E et F des verticales qui décomposent la *surface des moments*, comprise entre la ligne de fermeture A_1B_1 et la ligne représentative des moments fléchissants, en éléments

$A_1C_1C_1'$,

$C_1C_1'D_1D_1'\ldots F_1F_1'B_1$

On déterminera la surface de chacun des éléments.

A cet effet on pourra regarder les éléments intermédiaires comme des trapèzes et ceux d'about comme des triangles.

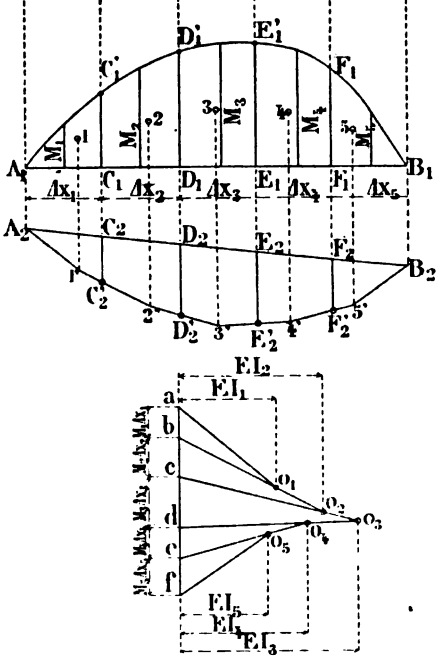


Fig. 337.

Pour exprimer les surfaces, il suffira d'évaluer à l'échelle des moments fléchissants l'ordonnée moyenne de chaque élément et de multiplier la valeur trouvée par la longueur de l'élément. On aura ainsi les surfaces suivantes :

$$M_1\Delta x_1, \qquad M_2\Delta x_2, \ \ldots \qquad M_5\Delta x_5.$$

Digitized by Google

On considérera ces surfaces comme des forces verticales qui seront appliquées aux centres de gravité 1, 2, 3, ..., 5 des éléments; on construira un polygone des forces des $M\Delta x$ en portant sur une verticale les forces bout à bout, soit :

$$ab = M_1\Delta x_1, \quad bc = M_2\Delta x_2, \quad cd = M_3\Delta x_3,$$
$$de = M_4\Delta x_4, \quad ef = M_5\Delta x_5.$$

On prendra pour chaque section un pôle dont la distance polaire sera égale au produit du coefficient d'élasticité E de la matière de la poutre par le moment d'inertie I de la section. Soit alors EI.

On aura ainsi pour les différentes sections :

De A en C :	EI_1 — Pôle o_1
De C en D :	EI_2 — Pôle o_2
De D en E :	EI_3 — Pôle o_3
De E en F :	EI_4 — Pôle o_4
De F en B :	EI_5 — Pôle o_5

Il y a lieu de remarquer que, dans le placement des pôles, tous les rayons polaires doivent être des lignes droites.

Les rayons polaires étant tracés, il suffira de construire un polygone funiculaire des charges issues des centres de gravité des éléments. A cet effet on mènera d'un point quelconque A_2 de la verticale de l'appui A : $A_2.1'$ parallèle à o_1a jusqu'à la rencontre de la verticale du point 1 ; ensuite : $1'2'$ parallèle à o_2b jusqu'à la rencontre de la verticale du point 2, et ainsi de suite jusqu'au dernier côté $5'B_2$ parallèle à o_5f, qui rencontre la verticale de l'appui B en B_2.

Le polygone ainsi obtenu enveloppe la ligne élastique, et les points de tangence correspondent aux points de division des éléments, c'est-à-dire en A_2, C_2', D_2', E_2', F_2' et B_2.

Les flèches sont données en ces points par les ordonnées comprises entre le polygone et la ligne de fermeture A_2B_2.

C'est-à-dire :

$$A_2 = 0, \quad C_2C_2', \quad D_2D_2', \quad E_2E_2', \quad F_2F_2', \quad B_2 = 0.$$

252. **Échelle des déformations.** — Il reste à évaluer à quelle échelle il faut lire les ordonnées représentant les flèches.

Digitized by Google

Si :

ε_d est l'échelle du dessin;
$\varepsilon_{M.\Delta x}$, l'échelle des surfaces des moments, et
ε_{EI}, l'échelle des produits EI,

l'échelle des déformations sera donnée par la formule :

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_{M.\Delta x} \times \varepsilon_d}{\varepsilon_{EI}}.$$

Ainsi, si le dessin est à l'échelle de $0^m,01$ par mètre, soit $\varepsilon_d = \frac{1}{100}$; les surfaces des moments, $0^m,001$ pour 5.000 mètres-kilogrammes, soit :

$$\varepsilon_{M\Delta x} = \frac{0^m,001}{5.000} = \frac{1}{5.000.000},$$

et les EI à l'échelle de 0,001 pour 1.000.000 d'unités, soit :

$$\varepsilon_{EI} = \frac{0,001}{1.000.000} = \frac{1}{1.000.000.000},$$

l'échelle des déformations sera de :

$$\varepsilon_f = \frac{\frac{1}{5.000.000} \times \frac{1}{100}}{\frac{1}{1.000.000.000}} = \frac{1.000.000.000}{5.000.000 \times 100} = 2.$$

Ce qui veut dire que les ordonnées donnant les flèches sont sur l'épure *deux fois grandeur*.

Il suffira donc de prendre la moitié des ordonnées pour avoir les flèches grandeur.

Si l'on voulait obtenir directement les flèches en vraie grandeur, il faudrait que l'échelle des EI soit égale au produit des échelles des $M\Delta x$ et du dessin, ce qui s'exprime par la formule :

$$\varepsilon_{EI} = \varepsilon_{M\Delta x} \times \varepsilon_d.$$

Digitized by Google

Ainsi, dans l'exemple précédent, il faudrait que :

$$\varepsilon_{EI} = \frac{1}{5.000.000} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{500.000.000}.$$

soit alors $0^m,001$ pour 500.000 unités.

253. Remarques importantes. — Remarque I. — Il arrive parfois, dans les poutres encastrées notamment, qu'une partie de la surface des moments est positive et l'autre néga-

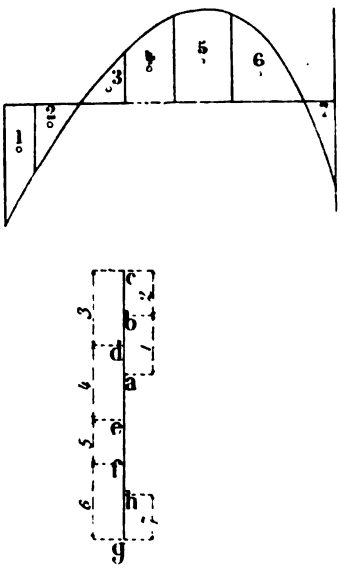


Fig. 338.

tive, comme par exemple dans la figure 338, où la surface des moments est divisée en sept éléments, savoir :

Éléments 1, 2 et 7 *négatifs*

et

Éléments 3, 4, 5 et 6 *positifs*.

Digitized by Google

Il faudra alors considérer les $M\Delta x$ négatifs comme des forces ascendantes et les positifs comme des forces descendantes. Cela a son importance dans la construction du polygone des $M\Delta x$, car dans le cas présent il faut porter :

De bas en haut :

$$ab = M\Delta x_1, \qquad bc = M\Delta x_2;$$

De haut en bas :

$$cd = M\Delta x_3, \quad de = M\Delta x_4, \quad ef = M\Delta x_5 \quad \text{et} \quad fg = M\Delta x_6;$$

De haut en bas :

$$gh = M\Delta x_7.$$

La répartition des pôles se ferait de la même manière que précédemment.

Remarque II. — Les centres de gravité des trapèzes peuvent, sans erreur sensible, être confondus avec la verticale de l'ordonnée milieu.

Quant aux triangles d'about, le centre de gravité se trouve au $\frac{1}{3}$ à partir de la base.

Remarque III. — Si l'on désirait obtenir la flèche au milieu de la poutre, il faudrait faire en ce point une division d'éléments de surface.

Remarque IV. — Si la ligne représentative des moments fléchissants était un polygone, ce qui se produit lorsque les charges sont des poids concentrés en un point, il y aurait lieu de faire des divisions d'éléments, non seulement aux points de changements de section, mais également aux sommets du polygone.

Remarque V. — Enfin, si la poutre était de section constante, la distance polaire EI serait toujours la même, et on n'aurait alors qu'un pôle.

254. Application à une poutre en fer de 12 mètres de portée qui donne passage à trois charges roulantes de 5 tonnes chacune, écartées de 2 mètres (*fig.* 339).

Digitized by Google

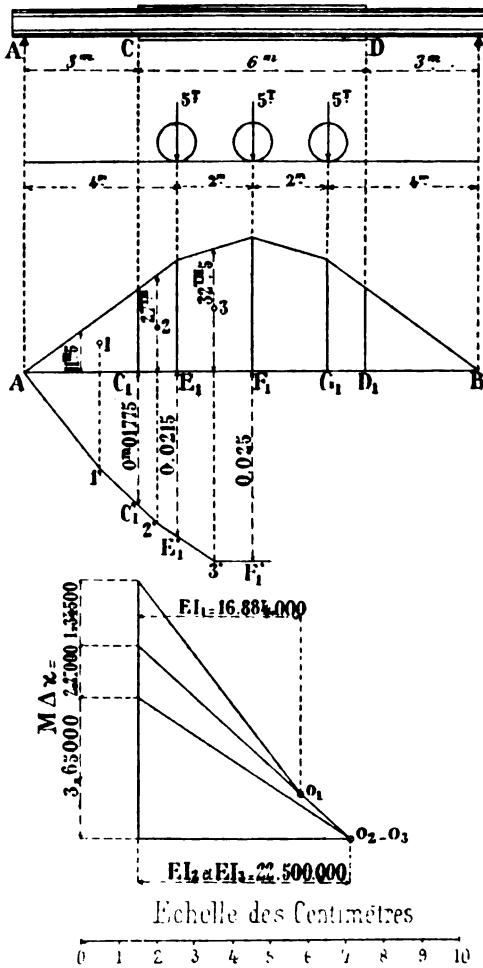


Fig. 339.

Digitized by Google

Les sections sont les suivantes :

de A en C et de D en B :	âme de 600 × 10. 4 cornières de 80 × 80 × 10. une semelle haut et bas de 200 × 8.
de C en D :	section précédente et une semelle supplémentaire haut et bas de 200 × 8.

1° *Tracé de la ligne représentative des moments fléchissants.* — Le moment fléchissant maximum sera produit au milieu de la poutre lorsque la roue milieu se trouvera en ce point. Il suffit donc, pour avoir la ligne représentative, de rechercher les moments fléchissants, au droit des charges, dans la position ci-dessus.

Réaction de l'appui de gauche :

$$R_A = 5^T + \frac{5^T}{2} = 7^T,5.$$

Moment fléchissant sous la première et la dernière roues :

$$M_1 = 7^T,5 \times 4^m = 30 \text{ tonnes-mètres.}$$

Moment fléchissant sous la roue milieu :

$$M_2 = 7^T,5 \times 6^m - 5^T \times 2^m = 35 \text{ tonnes-mètres.}$$

La ligne représentative des moments fléchissants est celle située au-dessus de AB. Les moments ont été portés à l'échelle de $0^m,01$ pour 10.000 mètres-kilogrammes.

On divisera la surface des moments en six éléments correspondants aux points C et D, où la section change, et au droit des charges.

Les produits $M\Delta x$ ont été évalués en prenant, comme moment, l'ordonnée moyenne de chaque élément; on a alors à cause de la symétrie :

$$M\Delta x_1 = M\Delta x_6 = 11.500^{Mk} \times 3^m = 34.500 \text{ unités}$$
$$M\Delta x_2 = M\Delta x_5 = 27.000 \times 1^m = 27.000 \quad —$$
$$M\Delta x_3 = M\Delta x_4 = 32.500 \times 2^m = 65.000 \quad —$$

Digitized by Google

Les produits EI ont pour valeur, en prenant pour $E = 18 \times 10^9$:

Eléments 1 et 6 :

$$I = 0{,}000938$$

$$EI_{1 \text{ et } 6} = 18 \times 10^9 \times 0{,}000938 = 16.884.000;$$

Eléments 2 à 4 :

$$I = 0{,}001250$$

$$EI_{2 \text{ à } 4} = 18 \times 10^9 \times 0{,}001250 = 22.500.000.$$

L'échelle du dessin est de $0^m{,}01$ par mètre, soit $\varepsilon_d = \frac{1}{100}$. On prendra pour les $M_{\Delta x}$: $0^m{,}001$ pour 2.000, soit

$$\varepsilon_{M\Delta x} = \frac{0{,}001}{2.000} = \frac{1}{2.000.000},$$

et pour les EI l'échelle de $0^m{,}001$ pour 400.000, soit :

$$\varepsilon_{EI} = \frac{0{,}001}{400.000} = \frac{1}{400.000.000}.$$

Les flèches seront alors à l'échelle de :

$$\varepsilon_f = \frac{\frac{1}{2.000.000} \times \frac{1}{100}}{\frac{1}{400.000.000}} = 2,$$

c'est-à-dire *double grandeur*.

On portera sur une verticale les $M_{\Delta x}$, savoir :

$$M_{\Delta x_1} = \frac{34.500}{2.000} = 17^{mm},25;$$

$$M_{\Delta x_2} = \frac{27.000}{2.000} = 13^{mm},5;$$

$$M_{\Delta x_3} = \frac{65.000}{2.000} = 32^{mm},5.$$

Digitized by Google

Il n'est pas nécessaire de continuer le polygone des forces à cause de la symétrie.

On prendra comme distance polaire :

$$EI_1 = \frac{16.884.000}{400.000} = 42^{mm},21 \text{ avec le pôle } o_1.$$

$$EI_2 = EI_3 = \frac{22.500.000}{400.000} = 56^{mm},25 \text{ avec le pôle } o_{2\ 3}.$$

On a pris le pôle o_{2-3} sur l'horizontale de l'extrémité de $M\Delta x_3$, pour obtenir la ligne de fermeture horizontale, afin de ne pas avoir à tracer la ligne élastique dans la moitié de droite de la poutre.

Il suffira de construire le polygone funiculaire en partant du point A, par exemple, et on mènera :

$A_1 1'$ parallèle au premier rayon ;
$1'2'$ — deuxième rayon ;
$2'3'$ — troisième rayon ;
$3'F_1'$ (horizontale).

Les flèches relevées à l'échelle double grandeur sont :

$$C_1C_1' = 0^m,01775 ;$$
$$E_1E_1' = 0\ ,0215.$$
$$\text{Au milieu } F_1F_1' = 0\ ,025.$$

§ 2. — POUTRES A TREILLIS

Il existe bien des méthodes pour déterminer les déformations d'une poutre à treillis ; mais ces méthodes ont pour point de départ le coefficient de travail des différentes pièces composant la poutre.

Il s'ensuit que ces méthodes sont très laborieuses à appliquer, et les résultats obtenus ne sont qu'approchés.

Aussi préfère-t-on appliquer la *méthode des poutres à âme pleine à section variable*, mais avec un certain correctif, car la déformation des poutres à treillis est plus grande que

Digitized by Google

celle des poutres à âme pleine, et cela à cause des treillis, qui sont plus ou moins flexibles.

Le correctif que l'on fait entrer en ligne de compte est la diminution du coefficient d'élasticité de la matière composant la poutre.

On prendra pour les poutres à treillis :

Tôlerie de fer.....	$E = 13 \times 10^9$
Tôlerie d'acier doux.....	$E = 15 \times 10^9$

Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE

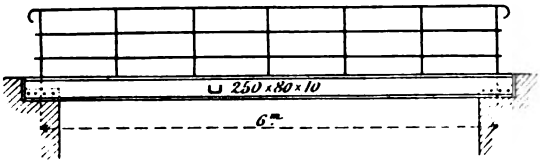
CALCULS COMPLETS DE PASSERELLES, DE PONTS POUR VOIES DE TERRE ET DE FER

CHAPITRE XVIII

PASSERELLES

255. Passerelle de 6 mètres de portée composée de poutres écartées de 1^{m},50 qui supportent un platelage en bois placé

Elévation



Coupe transversale

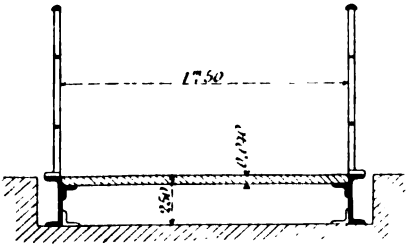


Fig. 340.

transversalement. — La passerelle est destinée au passage des piétons seulement. — L'élévation et la coupe transversale de la passerelle montrent la disposition adoptée (*fig.* 340).

Digitized by Google

Les poutres se composent d'un fer à U du commerce de 250 × 80 × 10, qui porte une cornière rivée destinée à supporter le platelage en bois formé par des madriers en chêne de 0,220 de largeur sur $0^m,04$ d'épaisseur. Le garde-corps est boulonné directement sur les poutres.

La surcharge sera comptée, dans le cas d'une foule, à raison de quatre hommes par mètre carré, soit environ 300 kilogr.

MADRIERS DU PLATELAGE. — *Portée.* — La portée des madriers est de $l = 1^m,50$.

Charge par mètre courant.

Poids du madrier....	$0,22 \times 0,04 \times 900^k =$	$7^k,92$
Surcharge.....	$0,22 \times 300^k =$	$66^k,00$
Charge totale au mètre courant.....		$73^k,92$
Soit.....	$p =$	74^k.

Moment fléchissant maximum. — Pour une pièce posée sur deux appuis et chargée d'un poids uniformément réparti, le moment fléchissant maximum se produit au milieu, et il a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2.$$

Soit, en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$M_m = \frac{1}{8} \times 74^k \times \overline{1^m,5}^2 = 20^{mk},8.$$

Travail du bois.

Le moment de résistance $\frac{I}{v}$ est donné par la formule :

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,22 \times \overline{0,04}^2}{9} = 0,000058.$$

Soit un travail par mètre carré de :

$$R = \frac{20^{mk},8}{0,000058} = 358.620 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

Soit par centimètre carré :

$$R^{cm2} = \frac{358620}{10.000} = 35^k,86.$$

Limite admise à la flexion : 60^k par centimètre carré.

Poutres de la passerelle. — *Portée.* — La portée d'axe en axe des appuis est ... $l = 6$ mètres.

Charge par mètre courant et par poutre. — 1° *Charge permanente.*

Madrier du platelage..	$\frac{1^m,50}{2} \times 0^m,04 \times 900^k =$	27^k
Garde-corps, environ		20
Poids propre de la poutre et des supports du platelage.....		43
Total.....		90^k

2° *Surcharge.* — La surcharge de 300 kilogrammes par mètre carré donne un poids par mètre courant de :

$$300^k \times \frac{1^m,50}{2} = 225 \text{ kilogrammes.}$$

La charge totale par mètre courant de poutre sera alors de :

$$p = 90^k + 225 = 315 \text{ kilogrammes.}$$

Moment fléchissant maximum. — La section étant constante, il suffit de connaître le moment fléchissant maximum. Il se produit au milieu, et a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 315^k \times \overline{6}^2 = 1.418 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Travail du métal. — La poutre est composée d'un fer à U du commerce de 250 × 80 × 10, dont le moment de résistance rapporté au millimètre carré est donné dans les albums des forges; sa valeur est :

$$\frac{I}{\iota} = 298.$$

Digitized by Google

Le travail maximum du métal ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{1418}{293} = 4^k,79.$$

Limite admise : $6^k,5$.

Cisaillement vertical de l'âme. — L'effort tranchant maximum se produit aux appuis, sa valeur est, pour une surcharge couvrant complètement la passerelle :

$$T_m = \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} 315^k \times 6^m = 945 \text{ kilogrammes.}$$

La section de l'âme seule du fer à **U** est de :

$$\Omega = 250 \times 10 = 2500 \text{ millimètres carrés.}$$

Travail au cisaillement vertical :

$$R^{mm2} = \frac{945^k}{2.500^{mm2}} = 0^k,37.$$

Limite admise :

$$4,5 \times 6^k,5 = 5^k,2.$$

Appuis. — Les poutres reposent directement sur les maçonneries, et à cet effet on a rivé à chaque extrémité une cornière de $80 \times 80 \times 10$ pour augmenter la surface de contact.

Cette surface de contact est de :

$$0,30 \times 0,16 = 0^{m2},048,$$

soit :

480 centimètres carrés.

La réaction maxima a été déterminée ; elle est de 945 kilogrammes, soit alors une pression sur la maçonnerie de :

$$R^{cm2} = \frac{945^k}{480^{cm2}} = 1^k,97.$$

256. Passerelle pour piétons de $11^m,40$ d'ouverture et de 2 mètres de longueur avec platelage en bois. Les poutres

Digitized by Google

sont à treillis et servent de garde-corps (*fig.* 341). — La portée de la passerelle est de 12 mètres d'axe en axe des appuis sur les maçonneries; elle est divisée en huit panneaux de $1^m,50$ de longueur.

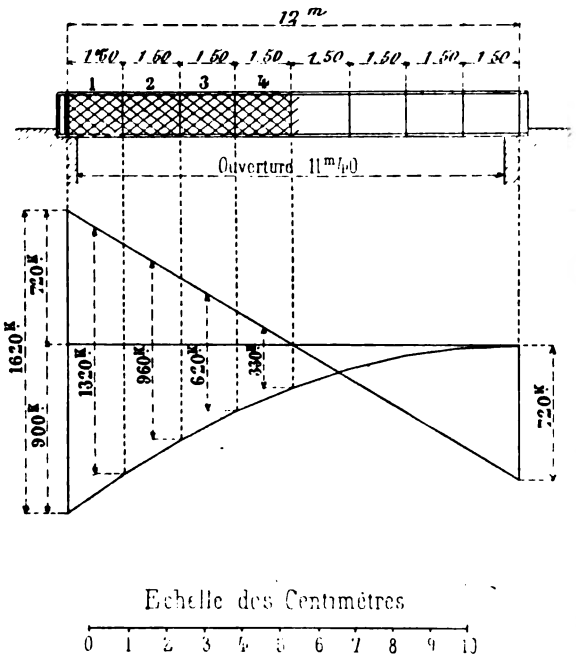


Fig. 341.

A chaque division de ces panneaux se trouve une *entretoise* composée d'un fer à U de 120 × 60 × 7,5, qui supporte les madriers en bois du platelage de 0,22 × 0,04 placés longitudinalement.

Ces entretoises sont rivées sur les montants de la poutre, qui est à treillis à quatre mailles, c'est-à-dire composée de huit systèmes simples.

Ces poutres comportent deux membrures en forme de

Digitized by Google

simple **T** composées de deux cornières de $60 \times 60 \times 6$.

Les diagonales ont une section constante dans toute la longueur de la poutre et se composent d'un fer plat de 45×6.

La hauteur des poutres est de $1^m,200$; leur écartement, de 2 mètres d'axe en axe, et leur longueur totale, de $12^m,40$.

Un contreventement en fer plat à croix de Saint-André règne sous les poutres.

Calculs justificatifs. — La surcharge adoptée pour le calcul de la passerelle est de 300 kilogrammes par mètre carré.

1° MADRIERS DE PLATELAGE. — *Portée*, d'axe en axe, des entretoises : $l = 1,50$.

Charge par mètre courant du madrier :

Poids propre du madrier....	$0,22 \times 0,04 \times 900^k =$	$7^k,92$
Surcharge.....	$0,22 = 300^k =$	$66^k,00$
TOTAL.....		$73^k,92$

soit :

$$p = 74 \text{ kilogrammes.}$$

Moment fléchissant maximum. — Il se produit au milieu, il a pour valeur :

$$M = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 74^k \times \overline{1,5}^2 = 20^{mk},8.$$

Travail du bois. — La section du madrier donne comme moment de résistance :

$$\frac{I}{v} = \frac{0,22 \times \overline{0,04}^2}{6} = 0,000058,$$

soit un travail par mètre carré de :

$$R^{m2} = \frac{20,8}{0,000058} = 358620 \text{ kilogrammes,}$$

soit par centimètre carré :

$$R^{cm2} = \frac{358620}{10\,000} = 35^k,86.$$

Limite admise : 60 kilogrammes.

Digitized by Google

2° Entretoises. — *Portée*, d'axe en axe, des poutres :

$$l = 2 \text{ mètres.}$$

Charge par mètre courant d'entretoise. — Les entretoises étant espacées de $1^m,50$, on a :

Madriers en bois...	$0^m,04 \times 900^k \times 1^m,50 =$	$54^k,0$
Poids propre de l'entretoise.....		$16\ ,0$
Surcharge de 300^k par m^2....	$1^m,50 \times 300^k =$	$450\ ,0$
Total.....	$p =$	$520^k,0$

Moment fléchissant maximum. — Il se produit au milieu, et il a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} \times 520^k \times \overline{2}^2 = 260 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Travail du métal. — Les entretoises courantes sont composées seulement d'un fer à U du commerce de $120 \times 60 \times 7,5$. Le fer est doublé d'une cornière de 60×60 à la partie supérieure pour l'entretoise milieu où se font les joints des madriers.

Les albums des forges donnent pour le profil courant un moment de résistance, rapporté au millimètre carré, de :

$$\frac{I}{v} = 67.$$

Travail du métal :

$$R^{mm^2} = \frac{M}{\frac{I}{v}} = \frac{260^{mk}}{67} = 3^k,88.$$

3° Poutres principales. — On a employé la méthode exposée aux numéros 215 et 216. — *Portée*, d'axe en axe, des appuis :

$$l = 12 \text{ mètres.}$$

Charge permanente par mètre courant de poutre. — Elle peut

Digitized by Google

s'établir comme suit :

Madriers de platelage .... $0{,}04 \times \frac{2^m}{2} \times 900^k = 36^k$

Entretoises et poutres principales et contre-ventement en fer plat..... 84^k

TOTAL..... $p = 120^k$

Surcharge par mètre courant de poutre. — La surcharge de 300 kilogrammes par mètre carré de platelage donne une charge par mètre courant de :

$$p' = \frac{2^m}{2} \times 300^k = 300 \text{ kilogrammes.}$$

Moments fléchissants. — La section de la poutre étant constante, il suffira de rechercher le moment fléchissant maximum.

Ce moment fléchissant maximum se produit au milieu de la poutre où se trouve placée une entretoise ; il a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8}(p + p')\, l^2$$

$$= \frac{1}{8}(120^k + 300^k) \times \overline{12}^2 = 7.560 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

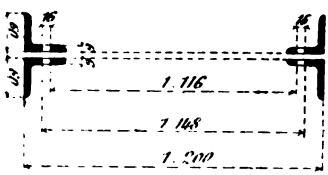


FIG. 342.

Travail du métal. — La poutre a une hauteur de $1^m{,}20$ hors cornières, et elle est composée de deux membrures comprenant chacune deux cornières de $60 \times 60 \times 6$ (*fig.* 342).

Les tables des moments d'inertie donnent pour cette section :

4 cornières de $60 \times 60 \times 6$..... $I_c = 0{,}000930$

à déduire les trous de rivets de 16^{mm} :

$$I_{trous} = \frac{1}{12} \times 0{,}012\, [\overline{1{,}148}^3 - \overline{1{,}116}^3] = 0{,}000123$$

$$I_{net} = 0{,}000807$$

Digitized by Google

Le moment de résistance a pour valeur :

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{\frac{h}{2}} = \frac{0,000807}{0^{m},60} = 0,001345.$$

Le travail maximum du métal ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{7.560^{mk}}{0,001345} \times \frac{1}{10^{6}} = 5^{k},62.$$

Diagonales de la poutre. — Les diagonales doivent résister aux efforts tranchants. La poutre étant symétrique par rapport au milieu, il suffira d'étudier la moitié de gauche par exemple.

La ligne représentative des efforts tranchants pour la *charge permanente* seule est une droite qui découpe sur les appuis des segments égaux à : $\frac{1}{2} pl$, soit :

$$T_{p} = \frac{1}{2} \times 120^{k} \times 12^{m} = 720 \text{ kilogrammes.}$$

La ligne représentative des efforts tranchants pour une charge uniformément répartie p', qui se déplace, est une parabole tangente à l'un des appuis et découpe sur l'autre un segment égal à :

$$\frac{1}{2} p'l,$$

soit :

$$T_{p'} = \frac{1}{2} \times 300^{k} \times 6^{m} = 900 \text{ kilogrammes.}$$

La répartition des charges étant faite par les entretoises, l'effort tranchant dans chaque panneau est constant, celui dû à la charge permanente est donné par l'ordonnée milieu du panneau, et l'effort produit par la surcharge variable serait donné en chargeant la poutre jusqu'au point K correspondant à ce panneau.

Pour une petite portée, on se contentera de charger jusqu'au premier montant limitant le panneau.

Digitized by Google

Les lignes représentatives étant tracées à une échelle des forces de $0^m,01$ pour 200^k, les efforts tranchants totaux dans les quatre premiers panneaux seront (*fig.* 341) :

Panneau 1..... $T_1 = 1320^k$.
Panneau 2..... $T_2 = 960^k$.
Panneau 3..... $T_3 = 620^k$.
Panneau 4..... $T_4 = 330^k$.

Une section entre deux nœuds rencontre *huit barres*, et ces barres font avec les membrures un angle $\alpha = 38° 41'$, dont le sinus est : 0,625.

L'effort dans une barre est donné par la formule :

$$\varepsilon = \frac{T}{\sin \alpha} \times \frac{1}{n},$$

n étant le nombre des barres rencontrées par la section. On aura alors :

Panneau 1 : $\varepsilon_1 = \frac{1320^k}{0,625} \times \frac{1}{8} = 264^k$.

Panneau 2 : $\varepsilon_2 = \frac{960^k}{0,625} \times \frac{1}{8} = 192^k$.

Panneau 3 : $\varepsilon_3 = \frac{620^k}{0,625} \times \frac{1}{8} = 124^k$.

Panneau 4 : $\varepsilon_4 = \frac{330^k}{0,625} \times \frac{1}{8} = 66^k$.

Toutes les barres ont la même section : un fer plat de 45×6.

La section d'une barre, déduction faite d'un trou de rivet de 16 millimètres de diamètre, est :

$$\Omega_{net} = (45 - 16)\, 6^{mm} = 174 \text{ millimètres carrés,}$$

soit un travail maximum par millimètre carré de :

$$R^{mm2} = \frac{264}{174} = 1^k,52.$$

Rivets d'attache des diagonales. — La diagonale est comprise

Digitized by Google

entre les deux cornières de chaque membrure ; il s'ensuit que le rivet ne peut se rompre que par double cisaillement.

La section d'un rivet de 16 millimètres est de 201 millimètres carrés, soit pour une double section :

$$\omega_r = 2 \times 201 = 402 \text{ millimètres carrés.}$$

Le travail maximum d'un rivet se produira dans le premier panneau où l'effort dans la diagonale est de 264 kilogrammes.

Soit :

$$R^{mm2} = \frac{264}{402} = 0^k,65.$$

Remarque. — Si l'on ne comptait que les diagonales tendues, l'effort maximum dans ces diagonales serait double, ainsi que pour les rivets.

On aurait alors :

Diagonales : $R^{mm2} = 2 \times 1^k,52 = 3^k,04.$
Rivets : $R^{mm2} = 2 \times 0^k,65 = 1^k,30.$

Travaux admissibles, puisque le coefficient adopté pour le fer est de $6^{kg},5$.

4° Contreventement. — Le platelage, étant placé longitudinalement, ne peut faire fonction de contreventement. Mais, pour une petite passerelle, les efforts dus au vent sont faibles, et on peut se contenter de placer sous les poutres des croisillons en fer plat de 50×7 réunissant les deux membrures inférieures, et formant croix de Saint-André.

5° Montants. — Les montants sont ici des pièces accessoires destinées à raidir les membrures dans le sens transversal.

Ils pourront être composés de deux cornières de $50 \times 50 \times 6$ placées, l'une extérieure et l'autre intérieure aux membrures, et rivées sur celles-ci.

La cornière intérieure servira en outre à assembler l'entretoise sur la poutre, au moyen d'un gousset en tôle de 7 millimètres.

6° Pression sur les maçonneries. — Les poutres reposent

Digitized by Google

directement sur les maçonneries par l'intermédiaire d'une platine de $0^m,40$ de longueur, de $0^m,20$ de largeur et de $0^m,010$ d'épaisseur.

La surface d'appui en *centimètres carrés* est donc de :

$$S = 40 \times 20 = 800 \text{ centimètres carrés.}$$

La réaction sur l'appui relevée sur l'épure est égale à $R_g = 1.620$ kilogrammes, la pression sur les maçonneries sera donc de :

$$\frac{1620^k}{800} = 2^{kg},02 \text{ par centimètre carré.}$$

7° Flèche maxima prise par les poutres. — On a appliqué la méthode des âmes pleines à section constante.

Pour une poutre chargée d'un poids uniformément réparti p, la flèche maxima se produit au milieu et est donnée par la formule (p. 483) :

$$f_m = -\frac{5pl^4}{384EI}.$$

pour laquelle p est la charge totale par mètre courant pour une poutre..... $= 420^k$
l, la portée de la poutre..... $= 12^m$
E, le coefficient d'élasticité, qui est pour la tôlerie de fer et pour les poutres à treillis..... $= 13 \times 10^9$
I, le moment d'inertie brut de la section. $= 0,000930$

La flèche maxima sera alors, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$f_m = \frac{5 \times 420^k \times \overline{12}^4}{384 \times 13 \times 10^9 \times 0,000930} = 0^m,0094,$$

soit $9^{mm},4$,

Digitized by Google

CHAPITRE XIX

PONTS POUR VOIES DE TERRE

257. Pont pour voie de terre de 4 mètres de largeur et de 8 mètres d'ouverture de nu à nu des culées. — Le pont se compose de deux poutres maîtresses à âme pleine de $8^m,35$ de portée et de 1 mètre de hauteur totale. Leur écartement d'axe en axe est de $4^m,10$ (*fig.* 343 et 344).

Ces poutres sont réunies par des entretoises porteuses de $0^m,400$ de hauteur espacées de $1^m,30$ d'axe en axe.

Les entretoises supportent des voûtes en briques de $0^m,22$ d'épaisseur.

Les reins de ces voûtes sont bétonnés et le tout est recouvert d'une chape en ciment de $0^m,03$ d'épaisseur.

Enfin, sur cet ensemble, se trouve l'empierrement de la chaussée, qui a une épaisseur au milieu de $0^m,360$.

Un garde-corps règne, sur chaque poutre, sur toute la longueur du pont.

Les poutres, les entretoises et les garde-corps sont en fer.

La section des poutres est constante et se compose d'une âme de 980×10, de quatre cornières de $80 \times 80 \times 11$, et d'une semelle haut et bas de 220×10.

Les entretoises sont également à section constante, et se composent d'une âme de 400×11, et de quatre cornières de $110 \times 110 \times 13$.

Calculs justificatifs. — Les calculs justificatifs ont été faits conformément aux prescriptions de la circulaire ministérielle du 29 août 1891.

1° Entretoises porteuses. — Portée d'axe en axe des poutres principales :

$$l = 4^m,10.$$

Charge permanente par mètre courant d'entretoise. — Malgré

Digitized by Google

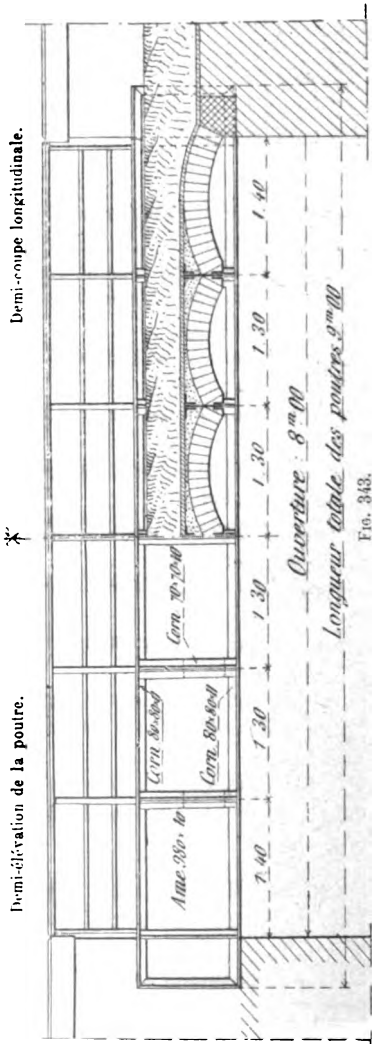


Fig. 343.

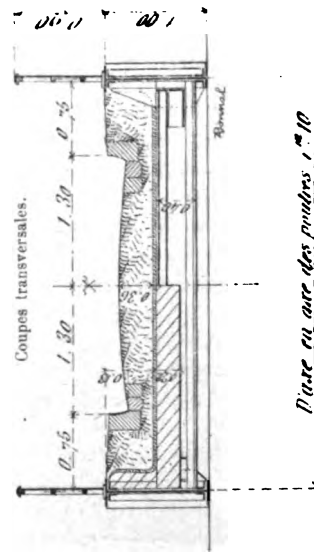


Fig. 344.

Digitized by Google

la surépaisseur de l'empierrement sur les trottoirs, on a pris pour cet empierrement une épaisseur moyenne de $0^m,40$.

La charge par mètre courant peut alors s'établir comme suit :

Voûtes en briques (développement $1^m,35$) entre deux entretoises :

	$1^m,35 \times 0^m,22 \times 1.800^k =$	535^k
Béton des reins.....	$0^m,70 \times 0^m,15 \times 1.600^k =$	168^k
Empierrement.....	$1^m,35 \times 0^m,40 \times 1.700^k =$	918^k
Poids propre de l'entretoise.....		179^k
	TOTAL.....	1.800^k

Moments fléchissants dus à la charge permanente. -- On a supposé l'entretoise assimilée à une poutre reposant sur deux appuis libres.

Les moments fléchissants sont donnés par une parabole à axe vertical, dont le sommet est au milieu de la portée, et dont la flèche en ce point a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2,$$

soit alors

$$M_m = \frac{1}{8} \times 1^T,800 \times \overline{4^m,1}^2 = 3^{Tm},783.$$

Surcharges. — Les surcharges à examiner sont :

1° Surcharge de 400 kilogrammes par mètre carré de tablier, y compris les trottoirs ;

2° Passage d'une file de tombereaux de 6 tonnes, les trottoirs étant chargés de 400 kilogrammes au mètre carré ;

3° Passage d'une file de tombereaux de 6 tonnes, y compris un tombereau de 11 tonnes, les trottoirs étant chargés de 400 kilogrammes au mètre carré ;

4° Passage d'une file de voitures à deux essieux et pesant 16 tonnes, soit 8 tonnes par essieu, les trottoirs étant également chargés de 400 kilogrammes par mètre carré.

Avec les deux derniers cas de surcharge, la circulaire admet 1 kilogramme de plus pour le travail du métal.

Premier cas de surcharge. — La surcharge de 400 kilogrammes

Digitized by Google

par mètre carré donne une charge par mètre courant de :

$$p' = 400^k \times 1^m,35 = 540 \text{ kilogrammes.}$$

Les moments fléchissants sont donnés, comme pour la charge permanente, par une parabole dont la flèche au milieu a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8}\, 0^T,54 \times \overline{4,1}^2 = 1^{Tm},135.$$

Cas de surcharge avec les véhicules. — Le moment fléchissant, pour chaque catégorie de véhicules, sera maximum, lorsque les roues de ce véhicule se trouveront sur l'entretoise considérée.

L'écartement des entretoises n'étant que de $1^m,30$, le passage des voitures de 16 tonnes n'est pas à examiner, puisque les essieux sont espacés de 3 mètres.

Quel que soit celui des deux tombereaux de 6 tonnes ou de 11 tonnes, le maximum du moment fléchissant sera produit lorsque le milieu de l'entretoise se trouvera à égale distance d'une des roues et de la résultante du tombereau, c'est-à-dire le milieu du véhicule.

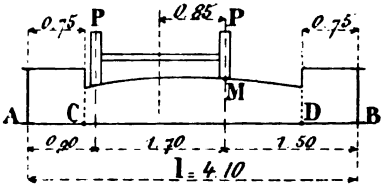


Fig. 345.

Dans cette position, la roue de gauche empiéterait sur le trottoir ; il y a donc lieu, pour avoir le maximum d'effet, de placer la roue de gauche contre la bordure du trottoir, et on obtient alors la position de la figure 345.

D'un autre côté, les roues étant placées sur l'entretoise, le poids des chevaux qui se trouvent à $2^m,75$ de l'axe de l'essieu doit donc être mis hors de cause, puisque l'écartement des entretoises n'est que de $1^m,30$.

Si P est alors le poids transmis par une roue, le moment fléchissant maximum se produit en M, et il a pour valeur :

$$M_M = \frac{P\,(0,90 + 2,60)}{4,10} \times 1,50 = 1,28P.$$

Digitized by Google

En remplaçant la charge P par sa valeur, on obtient :

Tombereaux de 6^T... $M_M = 1,28 \times 3^T = 3^{Tm},84$.
Tombereaux de 11^T... $M_M = 1,28 \times 5^T,5 = 7^{Tm},04$.

Surcharge des trottoirs. — En même temps que se produit l'action des véhicules, les trottoirs se trouvent chargés de 400 kilogrammes par mètre carré.

Soit alors par mètre courant d'entretoise pour les parties AC et DB :

$$p_t = 1^m,30 \times 400^k = 520 \text{ kilogrammes.}$$

On a vu (n° 115) que, dans ce cas de charge, le moment fléchissant est constant de C en D, et qu'il a pour valeur :

$$M_t = p_t \frac{\alpha^2}{2},$$

α étant la longueur de la charge uniformément répartie, soit dans le cas présent : $\alpha = 0,75$.

$$M_t = 0^T,520 \times \frac{\overline{0,75}^2}{2} = 0^{Tm},147.$$

Comparaison des divers cas de surcharges, y compris la charge permanente. — 1° *Charge permanente et surcharge totale de 400 kilogrammes par mètre carré.* — Moment fléchissant maximum :

$$3^{Tm},783 + 1^{Tm},135 = 4^{Tm},918.$$

2° *Charge permanente, tombereaux de 6 tonnes et trottoirs surchargés.* — Sans grande erreur on supposera que du milieu de l'entretoise au point M sous la roue de droite, la somme des moments dus à la charge permanente et au poids du tombereau est constante, et on choisira pour le moment de la charge permanente celui qui est produit au milieu.

Moment fléchissant maximum :

$$3^{Tm},783 + 3^{Tm},840 + 0^{Tm},147 = 7^{Tm},770.$$

3° *Charge permanente, tombereau de 11 tonnes et trottoirs*

Digitized by Google

surchargés. — Moment fléchissant maximum :

$$3^{Tm},783 + 7^{Tm},040 + 0^{Tm},147 = 10^{Tm},970.$$

Travail du métal. — L'entretoise se compose d'une âme de 400×11 et de 4 cornières $\frac{110 \times 110}{13}$; la rivure est faite par des rivets de 22 millimètres de diamètre.

La section de l'entretoise donne, déduction faite des trous de rivets (*fig.* 346) :

$$I_{net} = \frac{1}{12}\left[0,231\left(\overline{0,4}^3 - \overline{0,374}^3\right) + \right.$$

$$\left. + 0,037\left(\overline{0,374}^3 - \overline{0,299}^3 + \overline{0,255}^3 - \overline{0,180}^3\right) + 0,011 \times \overline{0,180}^3\right].$$

$$I_{net} = 0,000342.$$

Le moment de résistance rapporté au mètre sera :

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000342}{0,20} = 0,001710.$$

Le travail dans les différents cas de surcharge sera :

1° *Surcharge totale :*

$$R^{mm2} = \frac{4.918^{mk}}{0,001710} \times \frac{1}{10^6} = 2^k,87;$$

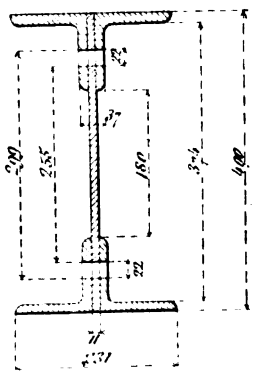


Fig. 346.

2° *Tombereau de 6 tonnes :*

$$R^{mm2} = \frac{7.770^{mk}}{0,001710} \times \frac{1}{10^6} = 4^k,54;$$

3° *Tombereau de 11 tonnes :*

$$R^{mm2} = \frac{10970^{mk}}{0,001710} \times \frac{1}{10^6} = 6^k,42.$$

Le coefficient limite, fixé par la circulaire pour le fer, est de $6^k,50$ pour les tombereaux de 6 tonnes et de $7^k,50$ pour ceux de 11 tonnes. Dans ces conditions, la section de l'entretoise est suffisante.

Digitized by Google

Remarque. — Presque toujours les tombereaux de 11 tonnes donnent le travail maximum dans les entretoises.

Résistance de l'âme au cisaillement vertical. — La position des charges de la figure 345 donne l'effort tranchant maximum dans l'entretoise ; il se produit à l'appui A avec le tombereau de 11 tonnes, et il a pour valeur :

$$T_m = \begin{cases} \text{Charge permanente} = \dfrac{1800^k \times 4^m,1}{2} = & 3690^k \\ \text{Surcharge des trottoirs} = 520^k \times 0,75 = & 390 \\ \text{Tombereau de } 11^T = \dfrac{5500^k}{4,10}(1,5+3,20) = & 6305 \end{cases}$$

$$\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots = 10385^k$$

La section nette de l'âme est (*fig.* 346) :

$$\Omega_{net} = (400^{mm} - 2 \times 22^{mm})\, 11^{mm} = 3.916 \text{ millimètres carrés,}$$

soit un travail par millimètre carré de :

$$R^{mm2} = \frac{T_m}{\Omega} = \frac{10385^k}{3916} = 2^k,65.$$

Limite admise avec les tombereaux de 11 tonnes :

$$R' = \frac{4}{5}(6^k,5 + 1^k) = 6 \text{ kilogrammes.}$$

Travail des rivets d'attache des cornières sur l'âme verticale. — On appliquera la formule donnée au n° 37, qui est :

$$S = \frac{T}{I}\, m'dx,$$

dans laquelle S est l'effort sur un rivet ; T, l'effort tranchant maximum dans la section considérée ; I, le moment d'inertie de la section ; m', le moment statique, par rapport à l'axe neutre, de la partie attachée à l'âme ; enfin, dx, l'écartement des rivets.

Digitized by Google

On a pour l'appui :

$T_m = 10385^k$ $\quad$ $I = 0,000342$

$dx = 0,120$

La figure 347 donne comme moment statique :

$$m' = 0,22 \times 0,013 \times 0,1935 + 0,097 \times 0,026 \times 0,1385 = 0,000903.$$

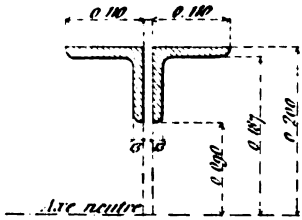


Fig. 347.

On trouve :

$$S = \frac{10385^k \times 0,000903 \times 0^m,12}{0,000342} = 3290^k.$$

L'âme étant pincée entre les deux cornières, le rivet d'attache ne peut se rompre que par double cisaillement.

La section d'un rivet de 22 millimètres est de 380 millimètres carrés; soit pour la section résistante :

$$\omega_r = 2 \times 380 = 760^{mm2}.$$

$$\text{Travail du rivet : } R^{mm2} = \frac{S}{\omega_r} = \frac{3290^k}{760} = 4^k,33.$$

$$\text{Travail limite admissible : } R' = \frac{4}{5}(6^k,5 + 1^k) = 6^k,00.$$

Assemblage de l'entretoise sur la poutre principale. — L'attache comporte verticalement huit rivets de 22 millimètres travaillant au double cisaillement; le travail d'un rivet sera :

$$R^{mm2} = \frac{T_m}{\omega_r} = \frac{10385^k}{2 \times 8 \times 380^{mm2}} = \frac{10385^k}{6080^{mm2}} = 1^k,70.$$

Travail limite admissible : $R' = 6$ kilogrammes.

2° Poutres principales. — *Portée* d'axe en axe des appuis : $l = 8^m,35$.

Digitized by Google

Charge permanente par mètre courant de poutre. — La charge permanente par mètre courant de poutre peut s'établir comme suit :

Le poids permanent par *mètre courant d'entretoise* a été déterminé, et il est égal à 1.800 kilogrammes pour un écartement d'entretoise de $1^m,30$; la longueur des entretoises étant de $4^m,10$, la charge par mètre courant de poutre transmise par les entretoises sera :

$$\frac{1800^k \times \frac{4.1}{2}}{1,30} = 2838^k \ldots\ldots \quad \text{soit} \quad 2840^k$$

Poids propre de la poutre		190^k
Garde-corps.....		30
TOTAL.....	$p =$	3060^k

Moment fléchissant produit par la charge permanente. — La poutre est posée sur deux appuis libres et les moments fléchissants sont donnés par une parabole dont la flèche au milieu a pour valeur :

$$M_m = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} \times 3^T,06 \times \overline{8,35}^2 = 26^{Tm},668.$$

Surcharges. — De toutes les surcharges, c'est un véhicule de 16 tonnes qui donne le moment fléchissant maximum et, la section étant constante, il suffit de rechercher le moment fléchissant maximum maximorum.

La poutre comportant une entretoise au milieu, il est certain que ce moment sera produit en ce point lorsqu'un des deux essieux s'y trouvera.

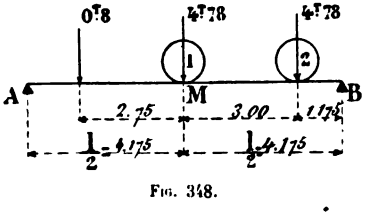


FIG. 348.

La charge des roues et des chevaux transmise par le tablier sera maxima dans la position du véhicule définie par la figure 345.

Digitized by Google

Ces charges sont alors sur la poutre de gauche de :

$$\text{Essieu : } \frac{4^{T}(1^{m},50 + 3^{m},20)}{4^{m},10} = 4^{T},585.$$

$$\text{Chevaux : } \frac{1^{T},4 \times 2^{m},35}{4,10} = 0^{T},800 \text{ environ.}$$

Il n'est pas nécessaire de faire un tracé pour déterminer le moment fléchissant maximum au milieu de la poutre; la figure 348 donne une des positions du véhicule pour laquelle ce résultat est obtenu.

Réaction de gauche :

$$R_g = \frac{0^{T},8 \times 6^{m},925 + 4^{T},585(4^{m},175 + 1^{m},175)}{8^{m},35} = 3^{T},60 \text{ environ.}$$

Le moment fléchissant, au milieu M, a pour valeur :

$$M_M = 3^{T},60 \times 4^{m},175 - 0^{T},8 \times 2^{m},75 = 12^{Tm},83.$$

Surcharge des trottoirs. — La charge par mètre courant de poutre produite par la surcharge de 400 kilogrammes par mètre carré est de :

$$p_t = 0^{m},75 \times 400^{k} = 300 \text{ kilogrammes.}$$

Le moment fléchissant maximum au milieu de la poutre produit par cette surcharge est :

$$M_m = \frac{1}{8}\, 0^{T},300 \times \overline{8^{m},35}^{2} = 2^{Tm},610 \text{ environ.}$$

Moment fléchissant maximum total au milieu. — Il est égal à la somme des moments fléchissants partiels déterminés ci-dessus, savoir :

Charge permanente.....	$26^{Tm},668$
Véhicule de 16 tonnes...	12 ,830
Surcharge des trottoirs..	2 ,610
Moment total....	$42^{Tm},108$

Digitized by Google

Travail du métal. — La poutre est composée d'une âme de 980 × 10, de quatre cornières de 80 × 80 × 11 et d'une semelle haut et bas de 220 × 10 (*fig.* 349).

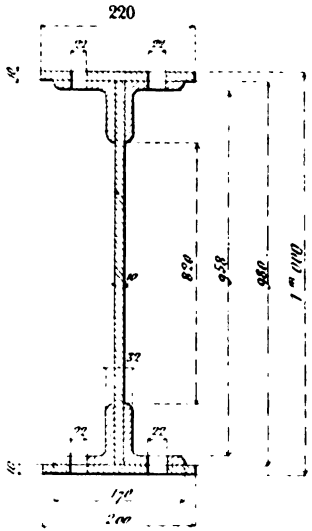


Fig. 349.

La section de la poutre donne, déduction faite des trous de rivet :

$$I_{net}=\frac{1}{12}\left[(0,22-0,044)(\overline{1,000}^3-\overline{0,98}^3)+(0,17-0,044)(\overline{0,98}^3-\overline{0,958}^3)\right.$$
$$\left.+0,032(\overline{0,958}^3-\overline{0,820}^3)+0,010\times\overline{0,820}^3\right]$$
$$I_{net}=0,002852.$$

Le moment de résistance aura pour valeur :

$$\frac{I}{v}=\frac{0,002852}{0,5}=0,005704.$$

Le travail maximum du métal ressortira donc à :

$$R^{mm2}=\frac{M_M}{\frac{I}{v}}=\frac{42108^{mk}}{0,005704}\times\frac{1}{10^6}=7^k,38.$$

Digitized by Google

Coefficient limite admissible $R' = 6^k,5 + 1^k = 7^k,5$.

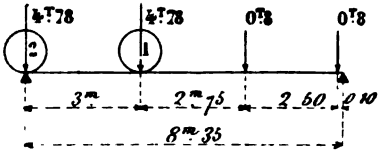


Fig. 350.

Résistance de l'âme au cisaillement vertical. — L'effort tranchant maximum a lieu sur l'appui; il se produira sous la charge d'un véhicule de 16 tonnes, lorsque le premier essieu de ce véhicule se trouvera sur l'un des appuis.

La figure 350 donne pour cette position :

$$T_p = 4^T,585 + \frac{4^T,585 \times 5^m,35 + 0^T,8\,(2^m,6 + 0^m,10)}{8^m,35} = 7^T,781$$

La charge permanente donne.. $T_p = \dfrac{3^T,060 \times 8^m,35}{2} = 12\ ,775$

La surcharge sur les trottoirs... $T_t = \dfrac{0^T,300 \times 8^m,35}{2} = 1\ ,252$

Effort tranchant maximum T_m..... $= 21^T,808$

La section nette de l'âme est :

$$\Omega_{net} = (980 - 2 \times 22)\,10^{mm} = 9.360 \text{ millimètres carrés.}$$

Le travail au cisaillement vertical ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{T_m}{\Omega_{net}} = \frac{21808^k}{9360} = 2^k,33.$$

Travail des rivets d'attache des cornières sur l'âme verticale. — L'effort sur un rivet est donné par la formule :

$$S = \frac{T}{I}\, m'dx.$$

Pour le cas présent :

$$T = 21.808^k \qquad I_{net} = 0,002852$$
$$m' = 0,002065 \qquad dx = 0,12$$

$$S = \frac{21.808}{0,002852} \times 0,002065 \times 0,12 = 1.895 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

Le rivet de 22 millimètres travaille au double cisaillement; la section résistante est :

$$\omega_r = 2 \times 380 = 760 \text{ millimètres carrés.}$$

$$\text{Travail } R^{mm2} = \frac{1.895}{760} = 2^k,49.$$

Flèches. — La section étant constante, on pourra appliquer pour la charge permanente et la surcharge des trottoirs la formule du n° 249.

Pour le véhicule de 16 tonnes, on peut remplacer les charges concentrées par une charge uniformément répartie produisant le même moment fléchissant au milieu.

Le moment fléchissant au milieu développé par le véhicule de 16 tonnes a été déterminé; il est de :

$$M_r = 12^{Tm},83.$$

Si l est la portée et p_r la charge uniforme équivalente, on doit avoir :

$$p_r \times \frac{l^2}{8} = M_r.$$

On tire alors :

$$p_r = \frac{8 \times M_r}{l^2};$$

en remplaçant les lettres par leur valeur, il vient :

$$p_r = \frac{8 \times 12^{Tm},83}{8,35^2} = 1^T,472.$$

En résumé, on pourra appliquer pour les trois charges : *charge permanente*, *surcharge sur les trottoirs* et *surcharge du véhicule de 16 tonnes*, la formule qui donne la flèche pour une poutre posée sur deux appuis libres et soumise à une charge uniformément répartie.

Cette formule est (p. 483) :

$$f_m = -\frac{5pl^4}{384 \cdot EI}.$$

Digitized by Google

Pour la tôlerie de fer :

$$E = 18 \times 10^9.$$

Le moment d'inertie *brut* de la section : $I = 0{,}003292$, et la portée : $l = 8^m{,}35$.

Soit alors :

$$f_m = \frac{5 \times \overline{8{,}35}^4}{384 \times 18 \times 10^9 \times 0{,}003292} \times p = 0{,}00000107p.$$

On en déduira les flèches suivantes :

Charge permanente seule pour $p = 3.060$ kilogrammes :

$$f_m = 0{,}00000107 \times 3060^k = 0^m{,}0033.$$

Charge et surcharges :

$$p = 3.060^k + 300^k + 1.472 = 4.832 \text{ kilogrammes.}$$
$$f_m' = 0{,}00000107 \times 4.832^k = 0^m{,}0052.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XX

PONTS POUR CHEMINS DE FER

---

§ 1. — PONTS AVEC POUTRES A AME PLEINE

258. Viaduc de 3 mètres d'ouverture avec poutres jumelles pour voie normale. — Ce viaduc comporte deux poutres maîtresses espacées, d'axe en axe, de $1^m,51$ et composées, chacune d'elles, de deux poutres jumelles dont l'écartement est de $0^m,50$ d'axe en axe (*fig.* 351 et 352).

Leur hauteur est de $0^m,42$, et elles sont réunies entre elles par une série d'entretoises espacées de $0^m,583$, qui supportent une longrine en chêne de $0,30 \times 0,16$ d'équarrissage.

C'est sur cette longrine que repose le rail au moyen de coussinets en fonte.

Les poutres maîtresses sont réunies entre elles par un entretoisement à treillis espacé de $1^m,166$.

Le platelage du tablier est constitué par une tôle unie de 8 millimètres d'épaisseur.

Ce platelage est supporté entre les rails par les poutres maîtresses elles-mêmes et sur les trottoirs par ces poutres et par deux poutrelles de rive qui ont $0^m,30$ de hauteur.

Ces poutrelles de rive sont reliées aux poutres maîtresses par des entretoises espacées de $1^m,166$.

Un garde-corps règne de chaque côté du tablier, fixé sur les poutres de rive.

Les appuis sont constitués par des platines de 15 millimètres d'épaisseur, sous lesquelles est interposée une lame de plomb de 5 millimètres d'épaisseur.

Les poutres jumelles se composent d'une âme de 420×10 et de quatre cornières de $80 \times 80 \times 10$.

Digitized by Google

Les poutres de rive sont formées d'une âme de 300 × 8 et de quatre cornières de 60 × 60 × 8.

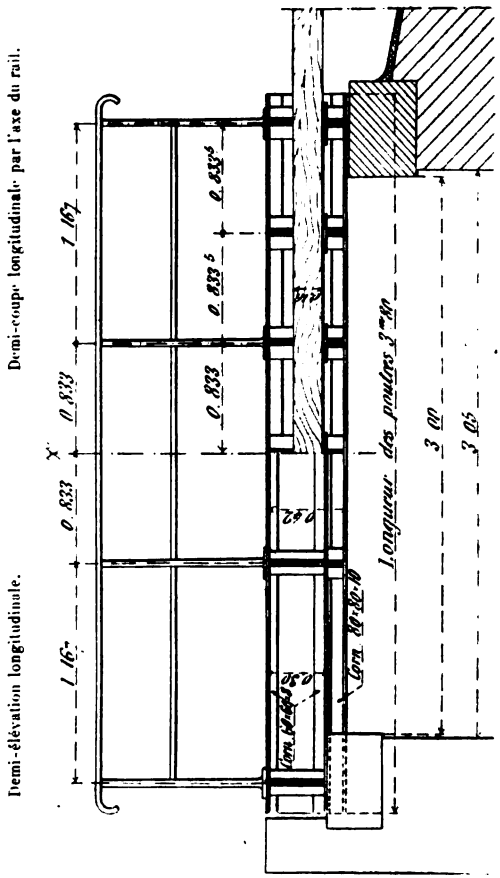


Fig. 351.

Les entretoises de trottoirs comportent une âme de 160 × 10 et deux cornières de 70 × 70 × 10, placées à la partie supérieure.

Digitized by Google

Les entretoises supportant les longrines sont composées d'une âme de 100 × 10 et de deux cornières de 100 × 100 × 15.

Demi-coupe transversale.

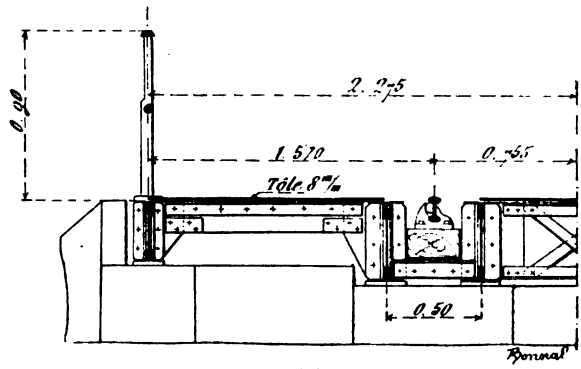


Fig. 352.

Enfin, les entretoisements entre les poutres maîtresses sont à treillis, les cornières membrures ont 70 × 70 × 10 et les croisillons 60 × 10.

Calculs justificatifs. — Les calculs ont été faits conformément aux prescriptions de la circulaire ministérielle du 29 août 1891.

Dans les ponts de chemins de fer, il n'est pas prévu de surcharges pour les trottoirs.

Dans ces conditions, il ne sera pas fait de calcul pour les poutres de rive, les entretoises de rive et les entretoisements entre les poutres maîtresses.

1° Entretoises supportant la longrine. — *Portée.* — La portée des entretoises, comptée entre les cornières des poutres jumelles, est de $l = 0^m,33$.

Charge permanente concentrée au milieu de l'entretoise. — Les entretoises sont écartées de $0^m,583$; en conséquence, si p est le poids par mètre de voie, la charge concentrée sur l'entretoise aura pour valeur :

$$P_p = p \times 0^m,583.$$

Digitized by Google

La charge p par mètre courant de voie se compose de :

Longrine.....	$0,30 \times 0,16 \times 900^k =$	$43^k,2$
Platine de.....	$220 \times 10 =$	$17^k,2$
Rail et coussinets.....	$=$	$39^k,6$
TOTAL.....	$p =$	$100^k,0$

La charge concentrée au milieu de l'entretoise sera donc de :

$$P_p = 100^k \times 0^m,583 = 58^k,3,$$

soit :

60 kilogrammes.

Surcharge. — La circulaire prévoit, outre la circulation du train-type sur le pont, le passage d'un essieu de 20 tonnes, soit par rail une charge de 10 tonnes.

Cette charge placée au droit de l'entretoise produira certainement le moment fléchissant maximum.

En résumé, la charge totale concentrée agissant sur l'entretoise aura pour valeur :

$$P = P_p + 10.000^k = 60^k + 10.000^k = 10.060 \text{ kilogrammes.}$$

Moment fléchissant maximum. — Par suite de la rigidité des attaches de l'entretoise, on supposera celle-ci encastrée sur les appuis.

Dans cette hypothèse, le moment fléchissant maximum se produit au droit des appuis et sa valeur est :

$$M_m = -\frac{Pl}{8},$$

soit alors :

$$M_m = -\frac{10.060^k \times 0^m,33}{8} = -415^{mk} \text{ environ.}$$

Travail du métal. — L'entretoise se compose sur les appuis d'une âme de 100×10 et de deux cornières de $100 \times 100 \times 15$.

La figure 353 donne la section de cette entretoise; cette section étant dissymétrique, il est nécessaire de rechercher l'axe neutre.

Digitized by Google

On obtient comme distance de cet axe à la fibre supérieure :

$$y = \frac{0{,}210 \times 0{,}015 \times 0{,}0075 + 0{,}085 \times 0{,}04 \times 0{,}0575}{0{,}210 \times 0{,}015 + 0{,}085 \times 0{,}04} = 0^{m},034 \text{ env.}$$

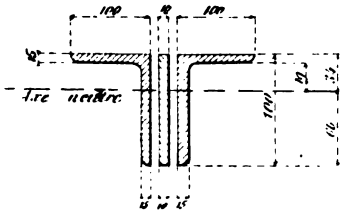


Fig. 353.

Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre a alors pour valeur :

$$I = \frac{1}{3}\left[0{,}210\left(\overline{0{,}034}^3 - \overline{0{,}019}^3\right) + 0{,}040\left(\overline{0{,}019}^3 + \overline{0{,}066}^3\right)\right]$$
$$= 0{,}0000062.$$

Le travail dans la fibre supérieure sera alors :

$$R = -\frac{Mv}{I},$$

$$R^{mm2} = -\frac{-415 \times (+0{,}034)}{0{,}0000062} \times \frac{1}{10^6} = +2^{k},27 \text{ (tension)},$$

et le travail dans la fibre inférieure :

$$R^{mm2} = -\frac{-415 \times (-0{,}066)}{0{,}0000062} \times \frac{1}{10^6} = -4^{k},41 \text{ (compres.)}.$$

La limite admise pour les entretoises sous rails est pour le fer de $5^{k},50$.

2° Poutres jumelles. — *Portée.* — La portée théorique est de :

$$l = 3^{m},25.$$

Digitized by Google

Charge permanente par mètre courant de poutre. — La charge permanente par mètre courant de poutre est de $p = 580$ kilogrammes se décomposant comme suit :

Tablier et plancher.....	480^k
Voie	100^k
TOTAL.....	580^k

Moment fléchissant dû à la charge permanente. — La poutre est posée sur deux appuis libres, les moments fléchissants sont déterminés par une parabole dont la flèche au milieu a pour valeur :

$$M_p = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 580^k \times \overline{3,25}^2 = 766 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Surcharge. — Il y a lieu d'examiner quelle est celle des deux surcharges, train-type ou essieu de 20 tonnes, qui donne le maximum.

1° *Train-type.* — Dans une portée de $3^m,25$, il ne peut entrer que trois roues de locomotive ; ces roues ayant même charge, soit $\frac{14^T}{2} = 7$ tonnes, le moment fléchissant maximum se produira lorsque la deuxième roue se trouvera au milieu.

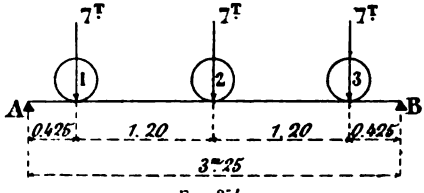


FIG. 354.

La figure 354 donne la position des charges.

La réaction de gauche a pour valeur :

$$R_A = 7^T + \frac{7^T}{2} = 10^T,5,$$

Digitized by Google

et le moment fléchissant au milieu sous la deuxième roue est :

$$M_r = 10^T,5 \times 1^m,625 - 7^T \times 1^m,20 = 8^{Tm},66.$$

2° *Essieu de* 20 *tonnes.* — Le moment fléchissant maximum sera obtenu en plaçant une roue, soit alors 10 tonnes, au milieu; il a pour valeur ;

$$M'_r = \frac{P \times l}{4} = \frac{10^T \times 3^m,25}{4} = 8^{Tm},125.$$

Il résulte de ces chiffres que le train-type donne le moment fléchissant maximum qui a pour valeur $M = 8^{Tm},66$.

Le moment fléchissant maximum total, charge permanente et surcharge, sera alors de :

$$M_m = M_p + M_r = 766^{mk} + 8660^{mk} = 9426 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

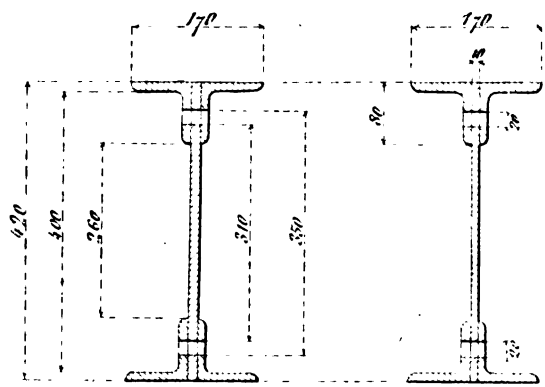


Fig. 355.

Travail du métal. — La poutre maîtresse se compose de deux poutres jumelles, formées chacune de une âme de 420 × 10 et quatre cornières de 80 × 80 × 10 (*fig.* 355).

Le moment d'inertie, déduction faite des trous de rivets de

Digitized by Google

20 millimètres, est le suivant :

$$I_{net} = 2 \times \frac{1}{12}\left[0{,}17\left(0{,}\overline{42}^3 - 0{,}\overline{40}^3\right) + \right.$$
$$\left. + 0{,}03\left(0{,}\overline{4}^3 - 0{,}\overline{35}^3 + 0{,}\overline{31}^3 - 0{,}\overline{26}^3\right) + 0{,}01 \times 0{,}\overline{26}^3\right] = 0{,}000482.$$

Le moment de résistance a pour valeur :

$$\frac{I}{v} = \frac{0{,}000482}{0{,}210} = 0{,}002295.$$

Le travail maximum du métal ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{9426^{mk}}{0{,}002295} \times \frac{1}{10^6} = 4^k{,}10.$$

La limite admise pour les poutres sous rails en fer est de $5^{kg}{,}50$.

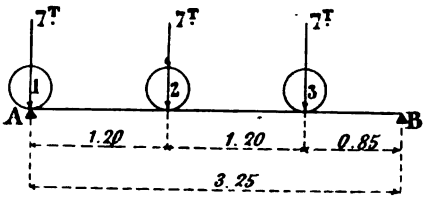


Fig. 356.

Cisaillement vertical de l'âme. — L'effort tranchant maximum a lieu sur les appuis, et c'est le train-type qui le produit, les roues de la locomotive étant placées comme l'indique la figure 356. On a alors :

Charge permanente.... $T'_A = \frac{1}{2}\,pl = \frac{1}{2}\,580^k \times 3^m{,}25 = 913^k$

Train type..... $T'_A = 7000^k + \frac{7000^k\,(2{,}05 + 0{,}85)}{3{,}25} = 13247^k$

Effort tranchant total..... $T_A = \overline{14190^k}$

La section nette des deux âmes est :

$$\Omega_{net} = 2 \times (420 - 2 \times 20) \times 10^{mm} = 7.600^{mm2}.$$

Digitized by Google

Soit un travail par millimètre carré de :

$$R^{mm2} = \frac{14190^k}{7600} = 1^k,87.$$

Limite admise pour le fer : $R' = \frac{4}{5} 5^k,5 = 4^k,40.$

Travail des rivets d'attache des cornières sur les âmes. — L'effort sur deux rivets, un sur chaque poutre, est donné par la formule :

$$S = \frac{T}{I} m'dx ;$$

$$T = 14.190^k ; \qquad I = 0,000482 ;$$

$$m' = 0,001118 ; \qquad dx = 0,12.$$

$$S = \frac{14190 \times 0,001118}{0,000482} \times 0,12 = 3.950 \text{ kilogrammes.}$$

La section résistante se compose de deux rivets de 20 millimètres travaillant à double cisaillement, soit alors :

$$\omega_r = 2 \times 2 \times 314^{mm2} = 1.256 \text{ millimètres carrés.}$$

$$\text{Travail des rivets} = \frac{3.950^k}{1.256} = 3^k,15 ;$$

$$\text{Limite admise pour le fer : } R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

Flèches. — Les poutres sont libres aux appuis et à section constante, et la flèche maxima sous la charge permanente sera donnée par la formule déjà citée, savoir :

$$f_m = -\frac{5pl^4}{384EI}.$$

En ce qui concerne la surcharge, on pourra évaluer la charge uniformément répartie, qui produit le même moment fléchissant et, de ce fait, on pourra également appliquer la formule ci-dessus.

Digitized by Google

Le moment fléchissant dû au train-type se produit au milieu; il a pour valeur :

$$M = 8.660 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

La charge p uniformément répartie qui y correspond est :

$$p = \frac{8 \times M}{l^2} = \frac{8 \times 8.660^{mk}}{\overline{3,25}^2} = 6.560 \text{ kilogrammes.}$$

Pour la tôlerie de fer $E = 18 \times 10^9$

Le moment d'inertie brut $I = 0,000547$.

Les flèches seront donc :

Charge permanente seule :

$$f_m = \frac{5 \times 580^k \times \overline{3,25}^4}{384 \times 18 \times 10^9 \times 0,000547} = 0^m,000087;$$

Charge permanente et surcharge :

$$f_m = \frac{5 \times (580^k + 6560^k) \times \overline{3,25}^4}{384 \times 18 \times 10^9 \times 0,000547} = 0^m,00107.$$

259. Viaduc de 7 mètres d'ouverture avec voie sur longerons et entretoises. — La voie est posée sur longrine de $0,35 \times 0,25$ au moyen de coussinets. Les longrines sont placées directement sur des longerons qui sont supportés par des entretoises reliées aux poutres maîtresses par des attaches rigides (*fig.* 357 et 358).

Le platelage du tablier est constitué par de la tôle unie de 8 millimètres d'épaisseur.

Entre les poutres maîtresses, ce platelage repose sur les entretoises, les longerons, et la réunion avec les poutres se fait au moyen d'une cornière rivée sur l'âme.

Sur les trottoirs, le platelage repose sur la poutre maîtresse et sur une poutre de rive qui est reliée à la précédente par des entretoises.

Un garde-corps règne sur les deux poutres de rive.

Digitized by Google

Les *longerons* sont espacés de $1^m,53$ d'axe en axe, et ils sont composés d'une âme de 320×10 et de quatre cornières de $80 \times 80 \times 10$.

Les *entretoises* sont espacées de $1^m,520$ et sont composées d'une âme de 320×12, de quatre cornières $90 \times 90 \times 10$, et sur toute la longueur d'une semelle haut et bas de 200×10.

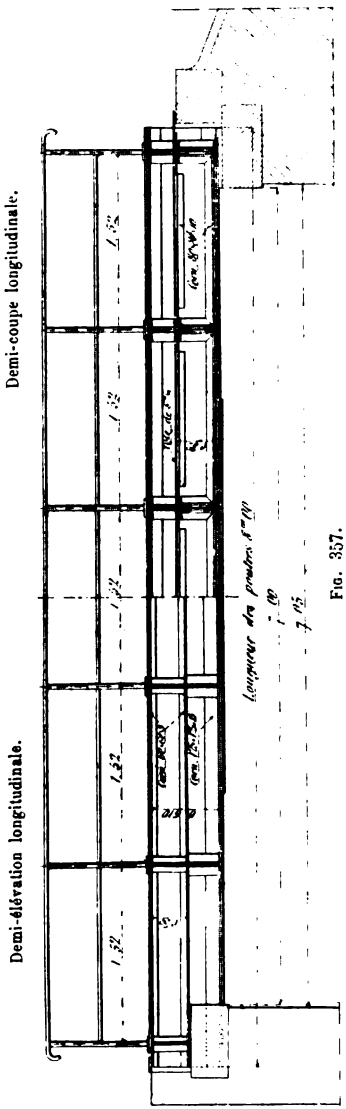


Fig. 357.

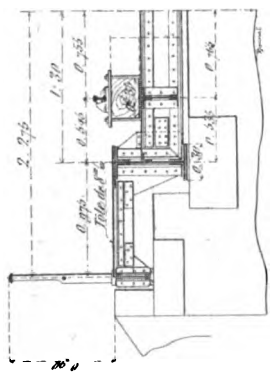


Fig. 358.

Les poutres principales ont une longueur totale de 8 mètres et sont composées d'une âme de 610×12, de quatre cornières de $125 \times 15 \times 125$ et de trois semelles de 300×11, haut et bas. La répartition de ces semelles est faite dans les calculs justificatifs.

Les appuis sont consti-

Digitized by Google

tués par des platines de 0,500 × 0,300 sur 15 millimètres d'épaisseur.

Toutes les pièces sont en fer.

Calculs justificatifs. — Les calculs ont été faits suivant les prescriptions de la circulaire ministérielle du 29 août 1891.

1° **Longeron.** — *Portée.* — Comptée d'axe en axe des entretoises :

$$l = 1^{m},52.$$

Charge permanente par mètre courant. — Elle peut être établie comme suit :

Longrine.....	$0,35 \times 0,25 \times 900^{k} =$	$78^{k},8$
Rail et coussinets.....		39 ,6
Armatures des longrines.....		31 ,6
Tôles de platelage et longeron.....		150 ,0
TOTAL.....	$p =$	$300^{k},0$

Moment fléchissant dû à la charge permanente. — On supposera le longeron placé sur deux appuis libres; dans ces conditions, le moment fléchissant maximum au milieu a pour valeur :

$$M_p = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 300^{k} \times \overline{1,52}^2 = 87 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Surcharge roulante. — Pour une portée de $1^{m},52$, le moment fléchissant maximum est donné par l'essieu de 20 tonnes placé au milieu de la longueur du longeron.

La charge qui agit alors est une roue de 10 tonnes, et le moment fléchissant maximum a pour valeur :

$$M_t = \frac{1}{4} Pl = \frac{1}{4} \times 10.000^{k} \times 1^{m},52 = 3.800 \text{ mètres-kilogr.}$$

Le moment fléchissant total, charge permanente et surcharge, est alors :

$$M = M_p + M_t = 87^{mk} + 3.800^{mk} = 3.887 \text{ mètres-kilogr.}$$

Digitized by Google

Travail du métal. — La section des longerons est constante, et ils se composent d'une âme de 320 × 10 et de quatre cornières de 80 × 80 × 10 (*fig.* 359).

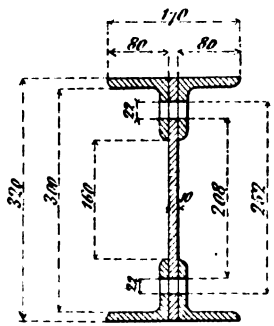


Fig. 359.

Le moment d'inertie, déduction faite des trous de rivets de 22 millimètres, donne :

$$I_{net} = \frac{1}{12}\left[0,17\left(\overline{0,32}^3 - \overline{0,30}^3\right) + \right.$$
$$\left. + 0,03\left(\overline{0,30}^3 - \overline{0,252}^3 + \overline{0,208}^3 - \overline{0,16}^3\right) + 0,01 \times \overline{0,16}^3\right].$$
$$I_{net} = 0,000125.$$

Le moment de résistance a pour valeur :

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000125}{0,16} = 0,000781.$$

Le travail du métal ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{3.887^{mk}}{0,000781} \times \frac{1}{10^6} = 4^k,98.$$

Limite admise pour le fer :

$$R' = 5^k,5.$$

Résistance de l'âme au cisaillement. — L'effort tranchant

Digitized by Google

maximum est donné par l'essieu de 20 tonnes placé aux appuis, soit alors 10 tonnes pour cet effort tranchant.

L'effort tranchant maximum sur les appuis dû à la charge permanente est :

$$T - \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} \times 300^k \times 1^m,52 = 228 \text{ kilogrammes.}$$

Effort tranchant total :

$$T_m = 10.000^k + 228^k = 10.228 \text{ kilogrammes.}$$

La section nette de l'âme du longeron est :

$$\Omega_{net} = (320 - 2 \times 22) \times 10^{mm} = 2.760 \text{ millimetres carrés,}$$

soit un travail au cisaillement de :

$$R^{mm2} = \frac{10.228^k}{2.760} = 3^k,70.$$

Limite admise :

$$R = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

Travail des rivets d'attache des cornières sur l'âme verticale. — L'effort sur un rivet est donné par la formule :

$$S = \frac{T}{I} m'dx,$$

$$T = 10.228 \text{ kilogrammes ;} \qquad I = 0,000125 \text{ ;}$$

$$m' = 0,000359 \text{ ;} \qquad dx = 0,100.$$

$$S = \frac{10.228}{0,000125} \times 0,000359 \times 0,100 = 2.935 \text{ kilogrammes.}$$

La section résistante se compose d'un rivet de 22 millimètres travaillant en double section, soit :

$$\omega_r = 2 \times 380 = 760 \text{ millimètres carrés.}$$

Travail :

$$R^{mm2} = \frac{2.935^k}{760} = 3^k,86.$$

Digitized by Google

Limite admissible :

$$R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

Assemblage du longeron sur l'entretoise. — L'assemblage est constitué par *six* rivets de 25 millimètres travaillant à simple section. L'effort qui agit sur l'attache est l'effort tranchant maximum, soit 10.228 kilogrammes.

Travail des rivets :

$$R^{mm2} = \frac{10.228^k}{6 \times 490^{mm2}} = 3^k,48.$$

Limite admissible :

$$R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

2° **Entretoise.** — *Portée.* — Comptée d'axe en axe des poutres :

$$l = 2^m,60.$$

Charge permanente. — 1° *Concentrée au droit des longerons :* Cette charge est égale à la réaction de deux longerons aboutissant au même point, soit alors par file de longeron :

$$P_p = 2 \times \frac{300^k \times 1^m,52}{2} = 456 \text{ kilogrammes.}$$

2° *Uniformément répartie par mètre courant :* Poids propre de l'entretoise et divers :

$$p_p = 180 \text{ kilogrammes.}$$

Surcharge roulante. — L'essieu de 20 tonnes, placé sur l'entretoise, donne une charge plus grande que n'importe quelle autre position du train-type.

Charge au droit de chaque longeron :

$$P_t = 10.000 \text{ kilogrammes}$$

Digitized by Google

Répartition des charges sur l'entretoise (*fig.* 360). — L'entretoise est soumise à une charge uniforme par mètre courant de $p = 180$ kilogrammes et à deux charges concentrées en C et D, de :

$$P = P_p + P_t = 456^k + 10.000^k = 10.456 \text{ kilogrammes.}$$

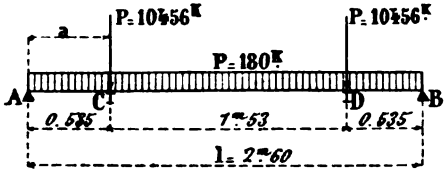


Fig. 360.

Pour une poutre posée sur deux appuis, le moment fléchissant maximum se produit au milieu, et il a pour valeur :

$$\begin{aligned} M_m &= \frac{1}{8}\, pl^2 + P \times a \\ &= \frac{1}{8}\, 180^k \times \overline{2,6}^2 + 10.456^k \times 0^m,535 \\ &= 152^{mk} + 5.594^{mk} = 5.746 \text{ mètres-kilogrammes.} \end{aligned}$$

Travail du métal. — L'entretoise a une section constante, elle est composée d'une âme de 320×12, de quatre cornières de $90 \times 90 \times 10$ et d'une semelle haut et bas de 200×10.

Cette section (*fig.* 361) donne, déduction faite des trous de rivets de 20 millimètres de diamètre :

$$\begin{aligned} I_{net} = \frac{1}{12}\Big[&(0,20 - 2\times 0,02)(\overline{0,34}^3 - \overline{0,32}^3) + (0,192 - 2\times 0,02)(\overline{0,32}^3 - \overline{0,30}^3) \\ &+ 0,032(\overline{0,30}^3 - \overline{0,14}^3) + 0,012 \times \overline{0,14}^3 \Big] \\ &= 0,000228. \end{aligned}$$

Le moment de résistance a pour valeur :

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000228}{0,17} = 0,001341.$$

Digitized by Google

Le travail maximum de l'entretoise ressortira donc à :

$$R^{mm2} = \frac{5.746^{mk}}{0,001341} \times \frac{1}{10^6} = 4^k,29.$$

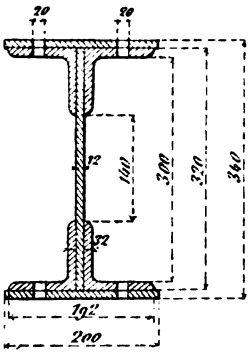


Fig. 361.

Limite admissible pour les entretoises sous rail et pour le fer :

$$R' = 5^k,50.$$

Résistance de l'âme au cisaillement. – L'effort tranchant maximum se produira sur les appuis pour la position des charges de la figure 360.

Cet effort tranchant a pour valeur :

$$T_m = \frac{1}{2}\, 180^k \times 2^m,60 + 10.456^k = 10.690 \text{ kilogrammes.}$$

La section nette de l'âme, déduction faite des trous de rivets sur l'aile verticale qui ont 20 millimètres de diamètre, est :

$$\Omega_{net} = (320 - 2 \times 20)\, 12^{mm} = 3.360^{mm2}.$$

Soit un travail de :

$$R^{mm2} = \frac{10.690^k}{3.360} = 3^k,18.$$

Digitized by Google

Limite admissible :

$$R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

Travail des rivets d'attache des cornières sur l'âme. — L'effort sur un rivet est donné par la formule :

$$S = \frac{T}{I} m'dx.$$

$$T = 10.690^k; \qquad I = 0,000228;$$
$$m' = 0,000401; \qquad dx = 0,10.$$
$$S = \frac{10.690^k}{0,000228} \times 0,000401 \times 0^m,10 = 1.879 \text{ kilogrammes.}$$

Pour un rivet de 20 millimètres travaillant au double cisaillement, le travail est :

$$R^{mm2} = \frac{1.879^k}{2 \times 314} = 3^k,0.$$

Limite admissible pour le fer :

$$R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

Assemblage de l'entretoise sur la poutre principale. — L'effort tranchant maximum à l'attache est celui déterminé précédemment, soit :

$$T = 10690 \text{ kilogrammes.}$$

L'attache est constituée par six rivets de 22 millimètres en double section.

Section résistante :

$$\Omega = 380^{mm2} \times 6 \times 2 = 4.560 \text{ millimètres carrés.}$$

Travail :

$$R^{mm2} = \frac{10690^k}{4560} = 2^k,34.$$

Digitized by Google

Limite admissible :

$$R' = \frac{4}{5} \times 5^k,5 = 4^k,4.$$

3° **Poutres principales.** — *Portée.* — La portée théorique est :

$$l = 7^m,35.$$

Charge permanente par mètre courant. — La charge permanente par mètre courant pour une poutre est de :

$$p = 950^k,$$

se décomposant comme suit:

Longrine.....	$78^k,8$
Rails et coussinets.....	39 ,6
Armatures des longrines.....	31 ,6
Métal supporté par la poutre.....	800 ,0
TOTAL.....	$950^k,0$

Moment fléchissant dû à la charge permanente. — La ligne représentative des moments fléchissants dus à une charge uniformément répartie, transmise par des entretoises, est un polygone inscrit dans la parabole déterminée par la même charge, agissant directement sur la poutre (n° 125).

La parabole en question a sa flèche maxima au milieu de la portée, et sa valeur est :

$$M_p = \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{8} 950^k \times \overline{7,35}^2 = 6.412 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Cette parabole ainsi que le polygone inscrit, dont les sommets se trouvent sur les ordonnées des points d'attache des entretoises, sont représentés sur la figure 362.

Surcharge roulante. — La surcharge roulante qui produit les moments fléchissants maxima au droit des entretoises est le train-type.

Pour les déterminer, on a fait un tracé de Weyrauch

Digitized by Google

et on a obtenu le polygone-enveloppe des moments fléchissants maxima (*fig.* 363).

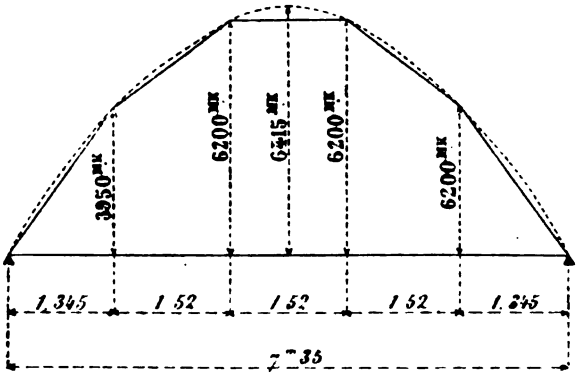


Fig. 362.

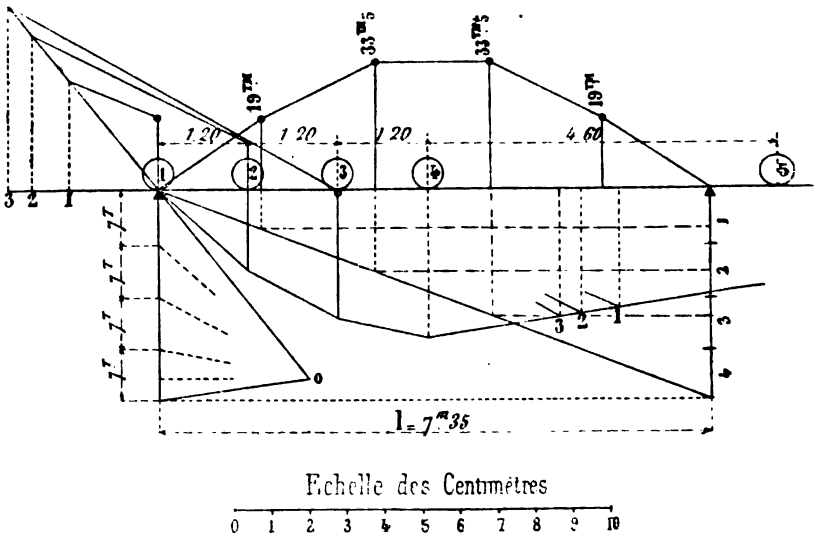
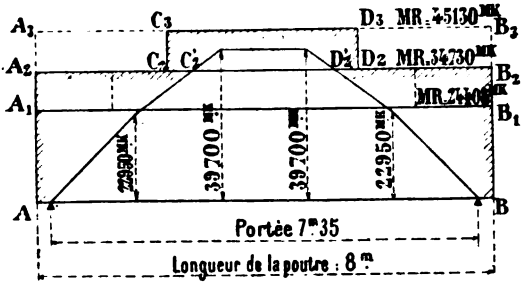


Fig. 363.

Moments fléchissants totaux. — On a porté, à partir d'une horizontale : $l = 7^m,35$;

Digitized by Google



Echelle des Centimètres

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 364.

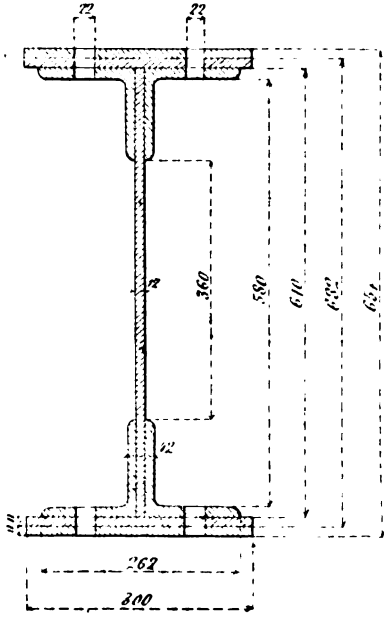


Fig. 365.

Digitized by Google

et, sur des verticales issues des points d'attache des entretoises, la somme des deux moments fléchissants, charge permanente et surcharge, déterminés précédemment, et correspondant au même point.

On a obtenu ainsi une série de points que l'on a joints par des droites.

Ce nouveau polygone est la ligne représentative des moments fléchissants totaux ; elle servira à déterminer la longueur des semelles supplémentaires (*fig.* 364).

Travail maximum du métal. — La section maxima de la poutre est composée d'une âme de 610×12, de quatre cornières de $125 \times 125 \times 15$ et de deux semelles, haut et bas, de 300×11.

Cette section donne, déduction faite des trous de rivets de 22 millimètres (*fig.* 365) :

$$I_{net} = \frac{1}{12}\left[(0,30-0,044)(\overline{0,654}^3-\overline{0,610}^3) + \right.$$
$$+(0,262-0,044)(\overline{0,610}^3-\overline{0,58}^3)+0,042(\overline{0,58}^3-\overline{0,36}^3)+0,012\times\overline{0,36}^3\Big] =$$
$$= 0,002270.$$

Le moment de résistance est :

$$\frac{I}{v} = \frac{0,002270}{0,327} = 0,006943.$$

Le moment fléchissant maximum au milieu étant de :

$$M = 39.700 \text{ mètres-kilogrammes},$$

le travail ressortira à :

$$R^{mm2} = \frac{39.700^{mk}}{0,006943} \times \frac{1}{10^6} = 5^k,72.$$

Répartition des semelles. — Pour déterminer la longueur des semelles, il suffit de rechercher, pour chaque variation de section de la poutre, le moment résistant.

Ce moment résistant est égal (n° 29) au moment de résis-

Digitized by Google

tance de la section multiplié par le travail admissible du métal, soit :

$$M_R = \frac{I}{v} \times R.$$

Dans le cas présent :

$$R = 6^k,5 \text{ par millimètre carré.}$$

Les moments résistants étant déterminés, il suffira de les porter sur la ligne représentative des moments fléchissants, à la même échelle bien entendu, en remarquant que le moment résistant est constant sur toute l'étendue de la même section.

Dans le cas d'une poutre dont la hauteur hors cornières est constante, la ligne représentative du moment résistant d'une même section est une droite parallèle à la fibre moyenne.

Les moments de résistance et les moments résistants pour un travail de $6^k,5$ par millimètre carré, pour les différentes sections, sont les suivants :

Ame et 4 cornières : $I_{net} = 0,001145$

$$\frac{I}{v} = \frac{0,001145}{0,305} = 0,003755$$

$$M_R = 0,003755 \times 6^k,5 \times 10^6 = 24.408 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Ame, quatre cornières et une semelle haut et bas de 300 × 11 :

$$I_{net} = 0,001688 ; \frac{I}{v} = \frac{0,001688}{0,316} \quad 0,005343$$

$$M_R = 0,005343 \times 6^k,5 \times 10^6 = 34.730 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Section maxima :

$$I_{net} = 0,002270 ; \quad \frac{I}{v} = \frac{0,002270}{0,327} = 0,006943$$

$$M_R = 0,006943 \times 6^k,5 \times 10^6 = 45.130 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

On portera, successivement, sur la verticale de la poutre, es moments résistants obtenus, savoir, à l'échelle de $0^m,01$

Digitized by Google

pour 10 tonnes-mètres (*fig.* 364) :

$AA_1 = 24408^{mk}$; $AA_2 = 34730^{mk}$ et $AA_3 = 45130^{mk}$.

Par les points A_1, A_2 et A_3 on mènera des parallèles à AB, on obtiendra ainsi les lignes représentatives de ces moments résistants:

A_1B_1 correspondant à la section (âme et 4 cornières) ;
A_2B_2 correspondant à la section (âme, 4 cornières et une semelle) ;
A_3B_3 correspondant à la section maxima .

Il suffira alors d'arrêter les semelles de manière que la ligne représentative des *moments fléchissants* soit toujours comprise dans le contour des *moments résistants*.

Dans le cas présent, la première semelle règne par nécessité de construction sur toute la longueur de la poutre ; toutefois, sans nuire à la résistance, on pourrait lui donner une longueur de $5^m,30$ jusqu'aux verticales pointillées.

Quant à la deuxième semelle, la longueur qui pourra lui être attribuée sera de $3^m,35$, de C_3 en D_3.

Dans ces conditions, le contour des moments résistants sera $AA_2C_2C_3D_3D_2B_2B$; ce contour est hachuré.

Remarque. — On prend généralement de $0^m,30$ à $0^m,50$ pour l'excès de longueur entre la ligne représentative des *moments fléchissants* et l'extrémité de la semelle.

Dans le cas présent :

$$C_2C_2' = D_2'D_2 = 0^m,45.$$

Résistance de l'âme au cisaillement. — L'effort tranchant maximum se produit sur les appuis. Celui dû à la charge permanente a pour valeur:

$$T_p = \frac{1}{2}\, 950^k \times 7^m,35 = 3.491 \text{ kilogrammes.}$$

L'effort tranchant maximum dû à la surcharge du train-type a lieu dans le premier intervalle d'entretoise, pour la position des charges de la figure 366.

Digitized by Google

Sa valeur est :

$$T_t = \frac{7000^k (2^m,355 + 3^m,555 + 4^m,755 + 5^m,955)}{7^m,35} = 15828^k.$$

Soit un effort tranchant total de :

$$T_m = T_p + T_t = 3491^k + 15828^k = 19319^k.$$

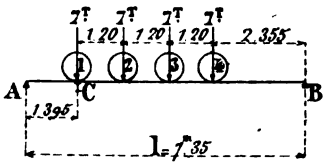


Fig. 366.

La section nette de l'âme est, en déduisant les trous de rivets de 25 millimètres des ailes verticales des cornières.

$$\Omega_{net} = (610 - 2 \times 25)\, 12 = 6720 \text{ millimètres carrés,}$$

soit un travail de :

$$R^{mm2} = \frac{T}{\Omega} = \frac{19319^k}{6720} = 2^k,88.$$

Limite admissible pour le fer :

$$R' = \frac{4}{3} \times 6,5 = 5^k,20.$$

Travail des rivets d'attache des cornières sur l'âme. — L'effort sur un rivet est donné par la formule :

$$S = \frac{T}{I}\, m'dx.$$

Digitized by Google

L'effort tranchant est maximum dans le premier intervalle.

$T = 19.319$ kilogrammes
I avec une seule semelle haut et bas $= 0{,}001688$
m' avec la même section ..... $= 0{,}002569$
$dx = 0{,}12$

$$S = \frac{19.319^k}{0{,}001688} \times 0{,}002569 \times 0^m{,}12 = 3.528 \text{ kilogrammes.}$$

La section résistante se compose d'un rivet de 25 millimètres, travaillant au double cisaillement, soit :

$$\omega_r = 2 \times 490 = 980 \text{ millimètres carrés.}$$

Travail des rivets :

$$R^{mm^2} = \frac{3.528^k}{980} = 3^k{,}60.$$

Limite admissible pour le fer : $R' = \frac{4}{5} \times 6^k{,}5 = 5^k{,}2.$

Flèches. — La section de la poutre étant peu variable, on peut, pour le calcul des flèches, prendre un moment d'inertie constant et égal à la moyenne des moments d'inertie des différentes sections.

Pour le cas présent, le moment d'inertie *brut* moyen sera la moyenne des deux moments d'inertie :

$$I_2 = 0{,}001898 \quad \text{et} \quad I_3 = 0{,}002580;$$

soit alors :

$$I_m = \frac{I_2 + I_3}{2} = \frac{0{,}001898 + 0{,}002580}{2} = 0{,}002239.$$

On peut également rechercher quelle est la charge uniforme qui produirait le même moment fléchissant maximum que la surcharge roulante.

Cette charge est :

$$p = \frac{8M}{l^2} = \frac{8 \times 33500^{mk}}{7{,}35^2} = 4.963 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

Les flèches seront alors données par la formule :

$$f_m = \frac{5 \,.\, pl^4}{384 \,.\, EI}.$$

Pour la charge permanente seule, $p = 950$ kilogrammes :

$$f' = \frac{5 \times 950^k \times \overline{7,35}^4}{384 \times 18 \times 10^9 \times 0,002239} = 0^m,0009.$$

Pour la charge totale, charge permanente et surcharge :

$$p = 950^k + 4.963^k = 5.913 \text{ kilogrammes :}$$

$$f = \frac{5 \times 5.913^k \times \overline{7,35}^4}{384 \times 18 \times 10^9 \times 0,002239} = 0^m,0053.$$

4° **Pression sur les maçonneries.** — *Réaction.* — La réaction sur les appuis est produite lorsque la première roue de la locomotive se trouve sur un de ces appuis ; la position du train-type est celle de la figure 360.

La réaction sur l'appui est alors :

$$\text{Réaction} = 7.000^k + \frac{7000^k}{7,35}(3^m,75 + 4^m,95 + 6^m,15) = 21.142 \text{ kil.}$$

La réaction due à la charge permanente étant de 3.491 kilogrammes, la réaction totale sera :

$$21.142^k + 3.491^k = 24.633 \text{ kilogrammes.}$$

La surface d'appui des poutres est en centimètres carrés de :

$$S = 50 \times 30 = 1.500 \text{ centimètres carrés,}$$

soit une pression de :

$$R^{cm2} = \frac{24.633}{1.500} = 16^k,42.$$

Il sera nécessaire de mettre un sommier en pierre de taille sous les appuis.

Digitized by Google

§ 2. — PONTS AVEC POUTRES A TREILLIS

Les ponts avec poutres à treillis se font pour des portées atteignant au moins 15 mètres, sauf pour certains cas particuliers.

260. Exemple d'un pont de 24 mètres de portée avec poutres à treillis double et à membrures parallèles, destiné à un chemin de fer pour une voie de 1 mètre. — Le pont se compose de deux poutres principales à membrures parallèles à treillis double en forme de croix de Saint-André et avec montants.

Ces poutres sont divisées en huit panneaux de 3 mètres de longueur; leur hauteur est de $3^m,15$ hors cornières et leur écartement de $4^m,50$.

Elles sont reliées au droit des montants par les entretoises porteuses qui reçoivent deux cours de longerons destinés à supporter la voie ainsi que le platelage du tablier, qui est en bois en dehors de la voie et en tôle striée entre les rails.

On ne refera pas le calcul des dimensions à donner aux *longerons* et aux *entretoises*, la méthode à employer est identique à celle qui a été suivie pour les ponts à âme pleine, mais en tenant compte bien entendu des charges particulières qui agissent sur les pièces.

Poutres principales. — *Portée*, comptée d'axe en axe des appuis :

$$l = 24 \text{ mètres.}$$

Charge permanente totale par mètre courant de pont. — On a supposé que cette charge était de 1.600 kilogrammes.

Ce qui donne par mètre courant de poutre :

$$p = \frac{1.600^k}{2} = 800 \text{ kilogrammes.}$$

Surcharge. — La surcharge est celle prévue par la circu-

Digitized by Google

laire ministérielle du 29 août 1891, c'est-à-dire le train-type pour voie étroite, qui se compose de deux locomotives avec leur tender et une série de wagons chargés.

Le poids des essieux de locomotive est de : $10^T/ = 10^T \times 1^m = 10^T$
— — tender est de..... 8^T
— — wagon est de..... 8^T

Membrures. — Les efforts dans les membrures seront déterminés par la méthode de Ritter, qui consiste à diviser le moment fléchissant opposé à une membrure par la distance du nœud considéré à cette membrure.

La détermination des efforts dans une poutre du système actuel a déjà été faite (n° 200) ; on n'entrera donc pas dans tous les détails pour le calcul de ces efforts.

Moments fléchissants, aux nœuds de la poutre, dus à la charge permanente. — La ligne représentative des moments fléchissants pour une charge uniformément répartie directe est une parabole à axe vertical dont la flèche maxima est au milieu de la portée et dont la valeur est :

$$M = \frac{1}{8} pl^2,$$

soit dans le cas présent :

$$M = \frac{1}{8} 800^k \times \overline{24}^2 = 57.600 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

Les ordonnées de cette parabole au droit des nœuds représenteront donc les moments fléchissants en ces points.

L'épure de la figure 367 donne la valeur de ces moments fléchissants.

Moments fléchissants aux nœuds de la poutre dus à la charge roulante. — Il suffira de faire un tracé de Weyrauch pour déterminer les moments fléchissants maxima dans la première moitié de gauche, par exemple, de la poutre.

L'épure de la figure 368 donne ce tracé, ainsi que la valeur des moments fléchissants maxima.

Efforts dans les membrures. — Ainsi qu'il a été dit au numéro 195, pour un système de treillis double, l'effort dans

Digitized by Google

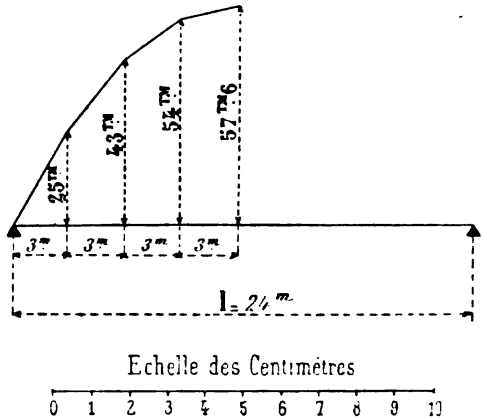


Fig. 367.

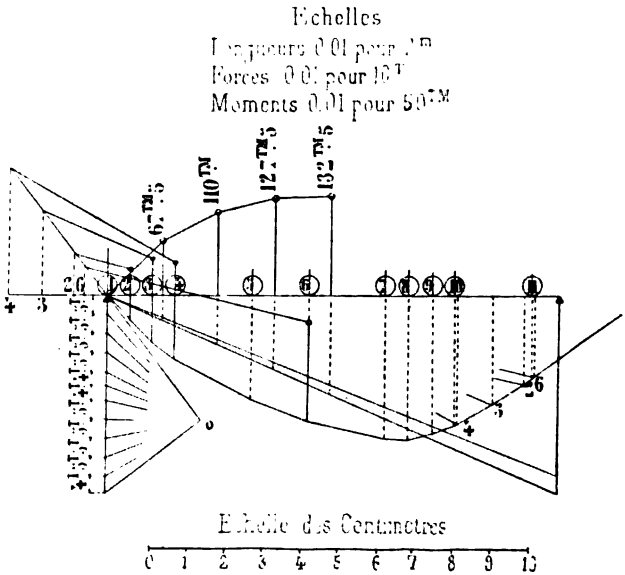


Fig. 368.

Digitized by Google

une membrure supérieure est égal à la moyenne des moments fléchissants agissant aux nœuds où aboutissent les diagonales limitant cette membrure, divisée par la hauteur entre les axes neutres de la membrure considérée et de la membrure opposée.

Dans le cas présent, cette hauteur est sensiblement *constante*, et a pour valeur :

$$h = 3 \text{ mètres.}$$

Les membrures supérieures sont toutes comprimées et celles inférieures tendues.

Le tableau ci-après donne les efforts maxima et minima dans ces pièces, ainsi que la limite de travail admissible, en appliquant la formule de la circulaire pour les pièces soumises à des efforts toujours de même sens, savoir :

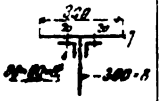
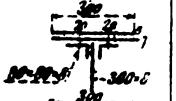
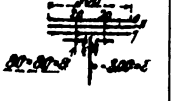
$$R = 6^k + 3\frac{A}{B},$$

dans laquelle A est l'effort minimum et B l'effort maximum.

Ce tableau donne en même temps la composition des membrures, leur section et leur travail.

Digitized by Google

MEMBRURES

DÉSIGNATION des MEMBRURES	EFFORTS dus à la CHARGE PERMANENTE Ep	EFFORTS dus à la CHARGE ROULANTE Er	EFFORTS MAXIMA $Em = Ep + Er$	EFFORTS MINIMA Ep	COEFFICIENT ADMISSIBLE $R' = 6 + 3\frac{A}{B}$	COMPOSITION des MEMBRURES	SECTION NETTE en MILLIMÈTRES CARRÉS Ω	TRAVAIL RÉEL $R = \frac{Em}{\Omega}$
S_1 et S'_1	$\frac{0+25^{T\text{m}}}{2}\times\frac{1}{3} = -4^{T},2$	$\frac{0+67^{T\text{m}},5}{2}\times\frac{1}{3} = -11^{T},3$	$-15^{T},5$	$-4^{T},2$	$6^{k},80$		6332	$2^{k},45$
S_2 et S'_2	$\frac{25^{T\text{m}}+43}{2}\times\frac{1}{3} = -11^{T},3$	$\frac{67^{T\text{m}},5+110}{2}\times\frac{1}{3} = -29^{T},6$	$-40^{T},9$	$-11^{T},3$	$6^{k},82$	— d° —	6332	$6^{k},46$
S_3 et S'_3	$\frac{43^{T\text{m}}+54}{2}\times\frac{1}{3} = -16^{T},2$	$\frac{110^{T\text{m}}+127,5}{2}\times\frac{1}{3} = -39^{T},6$	$-55^{T},8$	$-16^{T},2$	$6^{k},87$		8412	$6^{k},64$
S_4 et S'_4	$\frac{54^{T\text{m}}+57,6}{2}\times\frac{1}{3} = -18^{T},6$	$\frac{127^{T\text{m}},5+132,5}{2}\times\frac{1}{3} = -43^{T},3$	$-61^{T},9$	$-18^{T},6$	$6^{k},90$		9972	$6^{k},20$
I_1 et I'_1	Mêmes efforts que les membrures supérieures $+4^{T},2$	Mêmes efforts que les membrures supérieures $+11^{T},3$	$+15^{T},5$	$+4^{T},2$	$6^{k},80$	Comme S_1	6332	$2^{k},45$
I_2 et I'_2	$+11^{T},3$	$+29^{T},6$	$+40^{T},9$	$+11^{T},3$	$6^{k},82$	— d° — S_2	6332	$6^{k},46$
I_3 et I'_3	$+16,2$	$+39^{T},6$	$+55^{T},8$	$+16^{T},2$	$6^{k},87$	— d° — S_3	8412	$6^{k},64$
I_4 et I'_4	$+18^{T},6$	$+43^{T},3$	$+61^{T},9$	$+18^{T},6$	$6^{k},90$	— d° — S_4	9972	$6^{k},20$

Digitized by Google

Diagonales. — La détermination des efforts dans les diagonales pour une poutre à membrures parallèles se fait d'une manière très simple.

Des exemples ont été déjà donnés au chapitre II, auquel il faut se reporter.

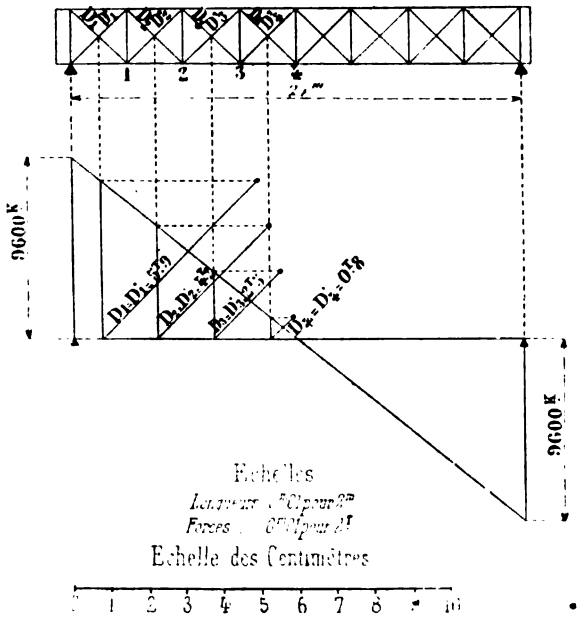


Fig. 369.

Efforts dus à la charge permanente seule. — La ligne représentative des efforts tranchants pour une charge agissant directement sur la poutre et pour les deux systèmes réunis est une droite qui découpe sur les appuis des segments égaux à $\frac{pl}{2}$.

Soit alors :

$$T_m = \pm \frac{pl}{2} = \frac{800^k \times 24^m}{2} = 9.600 \text{ kilogrammes.}$$

Digitized by Google

Cette ligne étant tracée sous le diagramme de la poutre (*fig.* 369), il suffit, pour avoir les efforts dans les diagonales, de décomposer l'*ordonnée milieu* de chaque panneau suivant une parallèle aux membrures et une parallèle aux diagonales considérées.

On obtient ainsi, pour les deux diagonales d'un panneau, le même effort : l'un d'eux est une tension et l'autre une compression.

Toutes les diagonales montant à gauche dans la moitié de gauche de la poutre sont tendues, les autres sont comprimées.

Les efforts dans chaque diagonale sont égaux à la moitié des efforts trouvés sur l'épure, puisqu'on les a tracés avec la charge correspondant aux deux systèmes réunis.

Les résultats sont marqués sur l'épure.

Efforts dus à la surcharge roulante. — La ligne représentative des efforts tranchants pour une charge roulante agissant directement sur la poutre est un polygone que l'on sait déterminer.

Si l'on suppose que le convoi s'avance de la droite vers la gauche, cette ligne représentative est tracée (*fig.* 370).

La première roue de la locomotive étant une des plus fortes charges, les efforts tranchants maxima dans chaque panneau seront donnés en mettant cette roue sur le premier nœud du panneau considéré, le sens étant de droite à gauche.

Ainsi, dans le diagramme de la poutre, les efforts maxima dans les diagonales du panneau I seront donnés en mettant la première roue de la locomotive au nœud 1, et cela jusqu'au milieu de la poutre, c'est-à-dire au nœud 4 ; on obtiendra ainsi les efforts maxima dans les diagonales des panneaux I à IV.

Les diagonales montant à gauche sont tendues et les autres comprimées.

Pour obtenir les efforts de sens contraire dans ces mêmes diagonales, il faudrait que le train s'avançât de A vers B ; mais il n'est pas nécessaire de faire ce nouveau tracé, car les panneaux I' à IV' sont symétriques aux panneaux I à IV, et, dans ces conditions, la ligne représentative déjà tracée servira à déterminer les efforts cherchés.

Digitized by Google

Ainsi, en mettant la première roue au nœud 7, on obtiendra les efforts de sens contraire à ceux obtenus pour le pan-

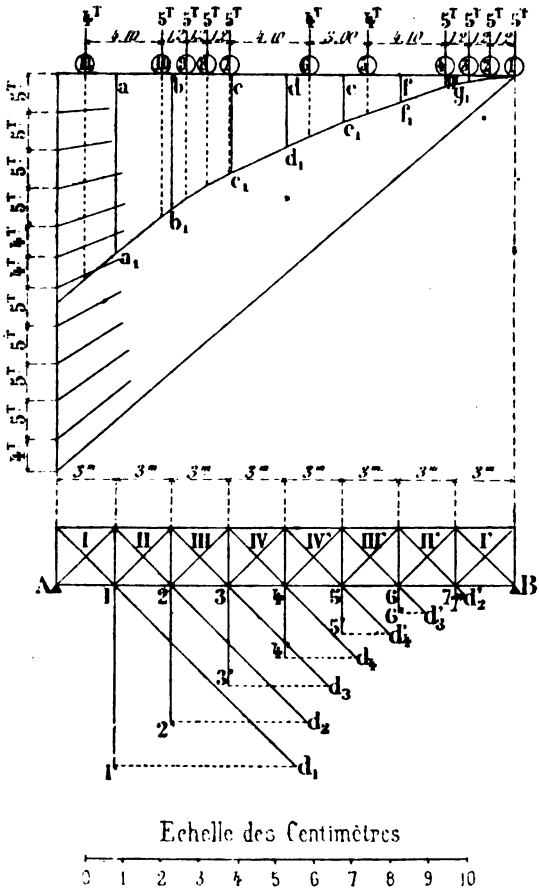


Fig. 370.

neau II, c'est-à-dire que la diagonale montant à gauche sera comprimée et l'autre tendue.

Digitized by Google

Il en sera de même pour les panneaux III et IV, dont les efforts seront donnés en mettant respectivement la première roue aux nœuds 6 et 5.

Sur la ligne représentative des efforts tranchants, on a relevé les ordonnées, correspondantes aux nœuds de la poutre, que l'on a portées sous le diagramme, savoir :

$$1.1' = aa_1, \qquad 2.2' = bb_1 \ldots\ldots 7.7' = gg_1.$$

On a décomposé ces ordonnées suivant une parallèle aux membrures et une parallèle aux diagonales pour obtenir les longueurs $1.d_1$, $2.d_2$,... $7.d'_2$, qui représentent, à l'échelle des forces, les efforts, dans les diagonales d'un même panneau.

Comme pour la charge permanente, il faut prendre la moitié de ces efforts puisqu'on a considéré les deux systèmes à la fois.

Le tableau ci-après donne les efforts obtenus, les variations de ces efforts, ainsi que le travail admissible en appliquant les formules de la circulaire :

$$R' = R + 3\frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad R' = R - 3\frac{C}{B}.$$

NUMÉROS des DIAGONALES	EFFORTS DUS à la charge permanente	EFFORTS DUS A LA SURCHARGE roulante		EFFORTS			COEFFICIENT ADMISSIBLE
		Tension	Compression	Maximum B	Minimum A	Plus grand en sens contraire C	
D_1	+ 5T,9	+ 16T,8	0	+ 22T,7	+ 5T,9	»	6k,78
D'_1	− 5 ,9	+ 16 ,8	0	− 22 ,7	− 5 ,9	»	6 ,78
D_2	+ 4 ,2	+ 12 ,8	− 0T,8	+ 17 ,0	+ 3 ,4	»	6 ,60
D_2	− 4 ,2	+ 0 ,8	− 12 ,8	− 17 ,0	− 3 ,4	»	6 ,60
D_3	+ 2 ,5	+ 9 ,3	− 2 ,5	+ 11 ,8	»	»	6 ,00
D'_3	− 2 ,5	+ 2 ,5	− 9 ,3	− 11 ,8	»	»	6 ,00
D_4	+ 0 ,8	+ 6 ,9	− 4 ,4	+ 7 ,7	»	− 3 ,6	4 ,60
D'_4	− 0 ,8	+ 4 ,4	− 6 ,9	− 7 ,7	»	+ 3 ,6	4 ,60

Détermination des sections à donner aux diagonales. — Le

Digitized by Google

tableau ci-après donne les sections des différentes diagonales, ainsi que leur travail réel.

Pour les barres comprimées, le travail supplémentaire résultant du flambage a été déterminé en employant la formule de Rankine (n° 27).

Le coefficient k qu'il faut affecter au travail dû à une compression simple a pour valeur :

$$k = 1 + 0{,}0001 \frac{l^2 \Omega}{I}.$$

La longueur libre des barres a été comptée de l'axe de l'attache des diagonales sur les membrures jusqu'à l'intersection des deux diagonales.

Cette longueur est constante pour toutes les diagonales et est égale à :

$$l = 2 \text{ mètres environ.}$$

Les diagonales tendues sont en fer plat et les diagonales comprimées en fer cornière ainsi que les diagonales alternativement tendues et comprimées.

Montants. — Les montants dans une poutre à membrures parallèles et à croix de Saint-André ne sont que des pièces accessoires destinées à transmettre les charges des nœuds inférieurs aux nœuds supérieurs.

L'effort qu'ils subissent est donc faible ; toutefois, par suite de l'absence de contreventement supérieur, les montants doivent être capables de transmettre les efforts du vent, qui agissent sur la moitié supérieure de la poutre, au contreventement inférieur.

Le calcul de ces montants sera fait après l'article contreventement.

Contreventement inférieur. — La figure 371 donne le panneau moyen de la poutre.

Les trains à voie de 1 mètre comportant de petits véhicules, on calculera le contreventement inférieur avec un vent de 270 kilogrammes par mètre carré, sans surcharge sur le pont.

Digitized by Google

DIAGONALES

DÉSIGNATION des DIAGONALES	EFFORT MAXIMUM Em	COMPOSITION des DIAGONALES	SECTION NETTE en MILLIMÈTRES CARRÉS Ω net	TRAVAIL $R = \frac{Em}{\Omega \text{ net}}$	VALEUR de I minimum	VALEUR du COEFFICIENT $k = 1 + 0,0001 \frac{l^2 \Omega \text{ brut}}{I}$	TRAVAIL réel $R' = kR$	TRAVAIL ADMISSIBLE
D_1	+ 22T,7	22 22 — 2 plats 220 × 10	3520	6k,45	»	»	»	6k,78
D'_1	— 22T,7	22 — Corn. 110×110×12	4464	5k,08	0,000 005 62	1,32	6k,70	— d° —
D_2	+ 17T,0	22 22 — plat 200 × 17	2652	6k,41	»	»	»	6k,60
D'_2	— 17T,0	22 — Corn. 100×100×11	3674	4k,63	0,000 003 90	1,38	6k,39	— d° —
D_3	+ 11T,8	22 22 — plat 180 × 15	2040	5k,78	»	»	»	6k,00
D'_3	— 11T,8	22 — Corn. 90 × 90 × 10	2960	4k,00	0,000 002 58	1,45	5k,80	— d° —
D_4 / D'_4	∓ 7T,7	— d° —	2960	2k,60	0,000 002 58	1,45	3k,77	4k,60

Digitized by Google

SURFACES OFFERTES PAR LES POUTRES ET PAR MÈTRE COURANT. — *Poutre du côté du vent.*

Membrure supérieure.....		$0^{m2},315$
Diagonales.....	$\frac{(3^m,60 + 2 \times 1,70)\ 0,195}{3^m} =$	$0\ ,455$
Montants.....	$\frac{2^m,55 \times 0,130}{3^m} =$	$0\ ,110$
Membrure inférieure, plancher et voie.....		$0\ ,500$
TOTAL.....		$1^{m2},380$

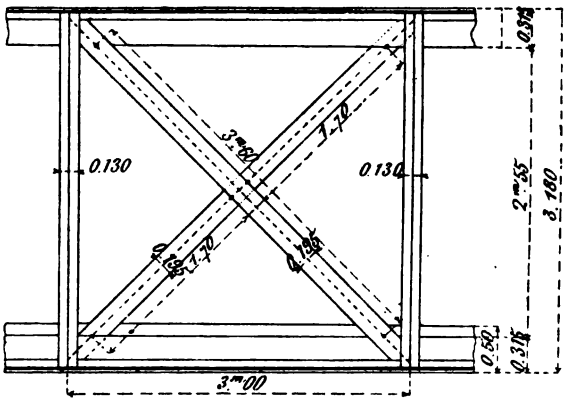


FIG. 371.

Poutre opposée au vent. — Le rapport des vides à la surface nette de la première poutre est de :

$$\rho = \frac{3^{m2},18 - 1^{m2},38}{3^{m2},18} = 0,56.$$

Les surfaces réduites de la seconde poutre seront alors :

Membrure supérieure....	$0,315 \times 0,56 =$	$0^{m2},176$
Diagonales et montants....	$0,565 \times 0,56 =$	$0\ ,316$
La membrure inférieure est cachée.....		
TOTAL.....		$0^{m2},492$

Digitized by Google

Le contreventement inférieur doit supporter tout l'effort du vent; dans ces conditions, la charge par mètre courant qui agit sur la poutre horizontale formant le contreventement aura pour valeur :

$$p_h = (1^{m2},380 + 0^{m2},492) \times 270^k = 505 \text{ kilogrammes.}$$

La figure 372 donne le plan de ce contreventement, qui est composé de deux croisillons par panneau horizontal.

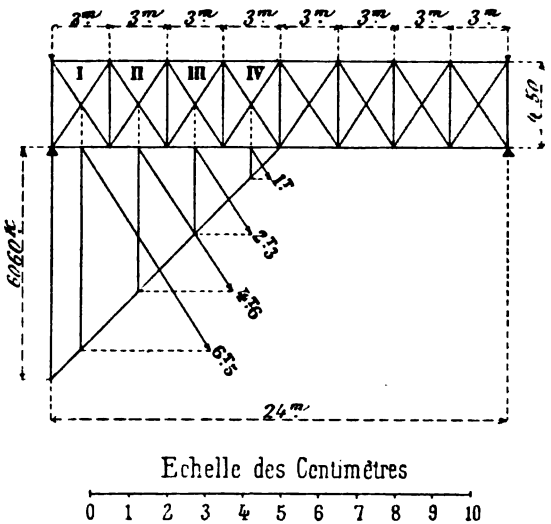


Fig. 372.

Ces croisillons sont fixés aux membrures inférieures et aux entretoises par un gousset rigide.

Le système de la poutre horizontale est donc à treillis double, les barres d'un système étant comprimées et les barres de l'autre système tendues.

Dans les calculs, on ne fera entrer en ligne de compte que les barres tendues, qui supporteront ainsi tout l'effort.

Il est bien entendu que, par suite du changement de direction du vent, les barres des deux systèmes auront la même section.

Digitized by Google

Il s'agit alors de déterminer les efforts dans les diagonales d'une poutre à membrures parallèles soumise à une charge uniforme de 505 kilogrammes par mètre courant.

La ligne représentative des efforts tranchants est une droite qui découpe sur les appuis des segments égaux à :

$$T = \pm \frac{pl}{2} = \frac{505^k \times 24^m}{2} = 6.060 \text{ kilogrammes.}$$

Les efforts dans les barres des contreventements sont obtenus par le tracé de la figure 372.

Le tableau ci-après donne les efforts maxima dans ces barres, leur composition, leur section nette et le travail.

Le coefficient admissible est pour le fer de :

$$6^k,5 + 1^k = 7^k,5.$$

BARRES DE CONTREVENTEMENT

NUMEROS des PANNEAUX	EFFORT MAXIMUM E_m	COMPOSITION des BARRES	SECTION NETTE en MILLIMÈTRES CARRÉS Ω	TRAVAIL $R = \frac{E_m}{\Omega}$	COEFFICIENT ADMISSIBLE
I	6.500^k	⊥18 Corn. de 70×70×8	912	7^k.12	7^k.5
II	4.600^k	⊥16 Corn. de 60×60×7	679	6^k.77	7^k.5
III	2.300^k	⊥14 Corn. de 50×50×6	480	4^k.79	7^k.5
IV	1.000^k	— d° —	480	2^k.10	7^k.5

Montants. — La charge due au vent se répartit sensiblement par moitié entre les deux membrures d'une même poutre, soit alors pour la membrure supérieure une charge par mètre courant de :

$$\frac{505^k}{2} = 253^k \text{ environ.}$$

Digitized by Google

Les montants étant espacés de 3 mètres d'axe en axe, ils recevront à leur partie supérieure un effort

$$P = 253^k \times 3^m = 759 \text{ kilogrammes.}$$

Le montant peut être assimilé à une poutre en porte-à-faux encastrée sur l'entretoise inférieure et soumise à une de ses extrémités à une charge de 759 kilogrammes agissant avec un bras de levier de

$$3^m,18 - 0,50 - \frac{0,45}{2} = 2^m,523.$$

Dans ces conditions, le moment fléchissant maximum a pour valeur :

$$M_m = 759^k \times 2^m,523 = 1.915 \text{ mètres-kilogrammes.}$$

On pourra donc déterminer la section transversale à donner au montant.

Pour des petites hauteurs, jusqu'à $2^m,50$ environ, ces montants sont composés de quatre cornières en forme de croix, appliquées sur les membrures.

Pour des hauteurs plus grandes, il y a intérêt à les composer avec quatre cornières, mais disposées en forme de double T et réunies par une âme pleine ou un treillis, ayant la largeur des semelles.

Dans le cas présent, la largeur des semelles est de $0^m,300$ et, si l'on prend quatre cornières de $60 \times 60 \times 6$ disposées en forme de double T, réunies par un treillis, le moment d'inertie de ces quatre cornières est :

$$I = 0,000049$$

$$\frac{I}{r} = \frac{0,000049}{0,15} = 0,000327.$$

Soit un travail de :

$$R^{mm2} = \frac{1915^{mk}}{0,000327} \times \frac{1}{10^6} = 5^k,85.$$

Limite admissible :

$$R' = 6^k,5 + 1^k = 7^k,50.$$

Digitized by Google

ANNEXES

CONSTRUCTION DES PONTS ET CHARPENTES

CAHIER DES CHARGES-TYPE

QUALITÉ DES FERS ET DES FONTES

Fers de forge et fers spéciaux. — Tous les fers de forge sont des fers d'un usage courant, ronds, demi-ronds, carrés ou rectangulaires, et les fers spéciaux sont des fers en **T, I, U** et cornières.

Au point de vue de la texture, ils sont à grains, à nerfs ou mixtes.

Le grain est uniforme, fin, de couleur gris plombé, et ne présente pas de facettes brillantes et larges.

Le nerf est blanc sans éclat, délié, allongé et doit présenter de petits crochets aux points de séparation ; les fibres ne sont ni courtes, ni noirâtres.

Les fers de forge sont de la troisième catégorie, et les fers spéciaux de la deuxième catégorie du tableau suivant, qui donne la résistance à la rupture et l'allongement pour 100.

DÉSIGNATION	RÉSISTANCE MINIMA pour la rupture en kilogrammes par millimètre carré de la section primitive	ALLONGEMENT MINIMUM EN FONCTION de la longueur de l'éprouvette entre repères	
		pour les fers de forges	pour les fers spéciaux
	kilogrammes		
1re catégorie	35	0,24	0,14
2e —	34	0,22	0,12
3e —	32	0,18	0,07
4e —	30	0,12	»

La surface des fers doit être parfaitement unie et saine. Les barres ne doivent présenter ni fentes, ni criques, ni gerçures ou autres défauts pouvant nuire à leur apparence ou à leur solidité.

Digitized by Google

Elles sont bien calibrées dans toute leur longueur ; toutefois, pour les fers carrés ou rectangulaires, dont la plus petite dimension est supérieure à 80 millimètres, les angles peuvent être légèrement arrondis à la condition que le rayon d'arrondi ne dépasse pas 4 0/0 de la plus petite dimension. Les extrémités sont affranchies carrément et sans bavures.

Tôles et larges plats. — Les tôles et larges plats doivent être à nerf fin et homogène, d'épaisseur uniforme, parfaitement laminés et soudés, sans pailles, criques, gravelures, stries, dédoublures ou manque de matière. Travaillés à la machine à percer, à raboter ou à la cisaille, ils doivent présenter une coupe grasse.

Les tôles et larges plats sont de la troisième catégorie, indiquée au tableau ci-après :

		1re CATÉGORIE	2e CATÉGORIE	3e CATÉGORIE	4e CATÉGORIE
		kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilogr.
Charges en kilogrammes par millimètre carré de la section initiale. — Charge de rupture minima.	en long.	35	35	33	28 à 32
	en travers.	35	32	30	»
Allongement minimum en fonction de la longueur du prisme entre repères.	en long.	0,180	0,160	0,130	0,070 à 0,110
	en travers.	0,180	0,130	0,110	»

Fontes. — Les fontes employées doivent être de deuxième fusion et de première qualité. Elles doivent présenter à leur cassure un grain gris, fin, serré et homogène, être dures, tenaces et se travailler facilement à la lime et au burin.

Elles doivent être exemptes de gouttes froides, soufflures, gravelures, taches ou autres défauts susceptibles d'altérer leur résistance, ou leur forme, et être parfaitement ébarbées au burin et à la lime.

Les trous de boulons ne doivent pas être venus de fonte, mais bien percés à la machine-outil.

ESSAIS DES FERS ET FONTES

Les fers, tôles et fontes sont soumis aux épreuves suivantes :

Fers de forge et fers spéciaux. — 1° Epreuves à froid pour s'assurer de l'élasticité, de la ténacité et de l'homogénéité du métal ;

Digitized by Google

2° Epreuves à chaud pour s'assurer de sa ductilité.

L'agent réceptionnaire peut exiger pour chaque lot le nombre d'épreuves suivant :

Pour une barre unique ou pour un lot de 1 à 10 barres de même nature, une épreuve à froid et une épreuve à chaud de chaque espèce ;

Pour un lot de 11 à 20 barres de même nature, deux épreuves à froid et deux épreuves à chaud de chaque espèce, le nombre d'épreuves croissant de 1 quand celui des barres de même nature croît de 10. Toutefois l'agent réceptionnaire a la faculté de réduire le nombre des épreuves dans le cas où les fers proviennent d'une même fabrication continuée sans interruption, en allure régulière, et telle que l'identité de la qualité paraît assurée.

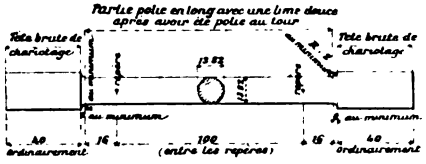


Fig. 373.

Les épreuves sont faites sur des éprouvettes découpées à froid à la machine-outil, en présence de l'agent réceptionnaire, dans des

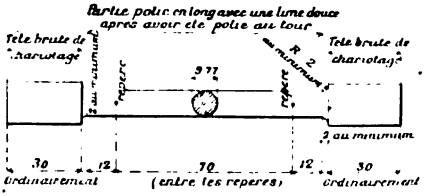


Fig. 374.

fers choisis, par lui, parmi ceux présentés à la réception ; ils sont prélevés dans chacun des lots de même qualité suivant que la plus petite dimension est plus grande ou moindre que 16 millimètres ; lorsqu'elle est plus grande que 16 millimètres, les éprouvettes rondes ont la forme de la figure 373 (section de 150 millimètres) ; quand elle est comprise entre 16 et 13 millimètres, elles ont la forme de la figure 374 (section de 75 millimètres). Les éprouvettes rectangulaires ont la forme de la figure 375. Les faces restent brutes si elles sont parallèles, et, dans le cas contraire, elles sont travaillées pour devenir parallèles ; puis elles sont polies en long à

Digitized by Google

la lime douce, ainsi que les champs entre les arrondis, les champs et les faces des têtes restant dégrossis.

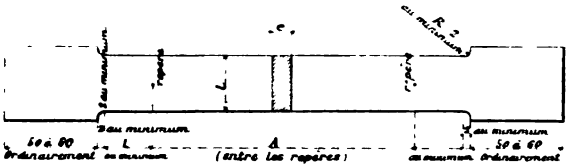


Fig. 375.

La longueur L et la largeur *l* sont les suivantes :

ÉPAISSEUR *e*	LARGEUR *l*	LONGUEUR L
millimètres 5 à 10	millimètres 30	millimètres 100 à 141
11 à 20	25	135 à 183
21 à 30	20	167 à 200

Les épreuves par traction sont effectuées d'une manière continue et progressive, la durée d'une épreuve est de une à trois minutes. Le métal doit donner les chiffres de résistance minima et d'allongement indiqués dans les tableaux précédents. Si l'une des éprouvettes se rompt sous une charge ou avec un allongement moindre que le minimum fixé, le lot correspondant est rebuté.

Dans le cas où les dimensions des fers ne permettent pas d'obtenir les éprouvettes définies précédemment, la longueur A est déduite de la relation :

$$A = \sqrt{66,67s}.$$

On peut aussi les soumettre à des épreuves de fragilité.

Digitized by Google

Pour vérifier la texture du métal correspondant à la qualité demandée, on casse un certain nombre de pièces en les frappant, en porte-à-faux sur une enclume, avec un marteau à devant, après incision au burin ou à la tranche : la cassure doit indiquer un fer parfaitement homogène à grains fins ou à nerfs ou mixte, suivant le cas.

Les fers sont ensuite soumis aux *épreuves à chaud* suivantes :

1° Fers de forge. — Dans l'*épreuve de crochets*, l'extrémité de la barre à essayer est forgée sur 200 millimètres environ en un rondin de 20 millimètres de diamètre, qui est ensuite chauffé au blanc, puis rabattu par l'extrémité sur la quarre de l'enclume de manière à former à 1 décimètre de l'extrémité un crochet à angle droit, lequel est redressé, au même point, mais en sens opposé ; on en forme ensuite un second analogue ; puis, on le redresse, et ainsi de suite jusqu'à ce que le bout tombe. Cette opération est faite en une seule chaude, et le bout de la barre ne doit se détacher que peu à peu et ne montrer de la striction :

Qu'après	10	redressements pour les fers de	1re	catégorie ;
—	8	—	2e	—
—	6	—	3e	—
—	4	—	4e	—

Pour l'*épreuve de perçage*, les fers ronds sont préalablement aplatis à la forge, de telle sorte que leur épaisseur égale le tiers du diamètre primitif : l'extrémité de la barre est alors chauffée au blanc et percée, avec un poinçon conique, de deux trous séparés par une épaisseur de matière de 10 millimètres et dont les diamètres sont égaux aux 3/4 de la largeur de la barre pour les fers de première et de deuxième catégorie, et à la moitié pour ceux de troisième et quatrième catégorie. Le percement de ces trous ne doit produire ni fentes ni gerçures (*fig.* 376).

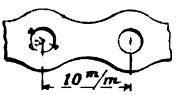


Fig. 376.

Cet essai est fait en une seule ou deux chaudes, suivant que l'épaisseur est plus petite ou plus grande que 60 millimètres.

Dans l'*épreuve de rabattement*, l'extrémité de la barre à essayer est chauffée au blanc et fendue à la tranche au milieu de la largeur, sur une longueur égale à une fois et demie le diamètre ou la largeur du fer, les deux branches étant ensuite renversées au marteau dans la même chaude : pour les deux premières catégories, le renversement devra être prolongé jusqu'à ce que les bords extérieurs viennent s'appliquer sur le corps de la barre ; pour les troisième et quatrième catégories, les bouts fendus sont seulement rabattus à

Digitized by Google

angle droit avec la barre. Dans tous les cas, la fente ne doit pas se prolonger pendant l'opération et produire des gerçures (*fig.* 377).

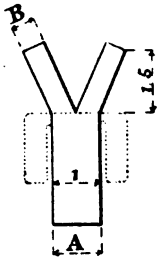


Fig. 377.

L'*essai de soudabilité* s'effectue après avoir tronçonné des barres en leur milieu, en réunissant leur bout par une soudure. Ces barreaux sont forgés en carré et percés à chaud dans le plan de la soudure d'un trou de diamètre égal à la largeur du barreau carré. Ils sont ensuite pliés à froid, soit parallèlement au plan de soudure, soit perpendiculairement. Pendant cet essai, il ne doit se produire ni criques, ni gerçures, ni dessoudures.

2° Fers spéciaux. — *Épreuves des cornières.* — La première épreuve s'exécute avec un bout de cornière coupé dans une barre prise au hasard dans chaque livraison, et avec lequel on fait un manchon tel qu'une des lames de la cornière devienne cylindrique et que l'autre reste dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre formé. Le diamètre intérieur de ce cylindre est de :

2 fois et demie la largeur de la lame pour les fers de		1re	catégorie ;
5 fois	—	2e	—
7 fois et demie	—	3e	—

Dans la deuxième épreuve, un second bout, coupé dans une autre barre, est ouvert jusqu'à ce que l'angle intérieur formé par les deux faces extérieures des lames soit augmenté de :

90°	pour les fers de	1re	catégorie ;
45°	—	2e	—
30°	—	3e	—

Dans la troisième épreuve, un troisième bout, coupé dans une autre barre, est fermé jusqu'à ce que l'angle intérieur formé par les deux faces intérieures des lames soit diminué de :

90°	pour les fers de	1re	catégorie ;
45°	—	2e	—
30°	—	3e	—

Les morceaux ainsi essayés ne doivent présenter ni gerçures, ni déchirures, ni fentes longitudinales indiquant un corroyage imparfait.

Digitized by Google

Épreuves des fers à **T**. — On manchonne à chaud le bout de la barre, c'est-à-dire qu'on l'enroule sur un manchon après avoir engagé son extrémité dans une rainure ou entre deux manchons.

La lame médiane restant dans son plan, on forme ainsi avec l'autre lame un quart de cylindre d'un rayon égal à *une* fois la largeur médiane pour les fers de première catégorie, et à *deux* fois cette largeur pour ceux de la deuxième.

Épreuves des fers en **I** *et en* **U**. — On fend à froid au moyen de la cisaille une des extrémités de la barre, de manière que la fente divise longitudinalement la lame médiane en deux parties égales sur une longueur égale à trois fois la hauteur du fer, et l'on perce un trou à l'extrémité de cette fente pour l'empêcher de s'étendre ; on écarte ensuite, en la manchonnant régulièrement à chaud, l'une des moitiés ainsi séparée de l'autre moitié jusqu'à ce que la distance entre les deux extrémités de la partie fendue soit égale à la hauteur même du fer (*fig.* 378).

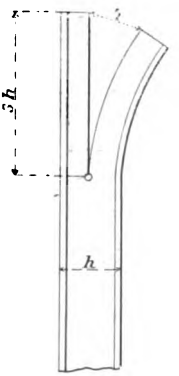


Fig. 378.

Il ne doit se produire dans le cours de ces épreuves ni déchirures, ni gerçures, ni fentes indiquant un corroyage imparfait.

Tôles et fers plats. — L'agent réceptionnaire a le droit d'exiger pour chaque lot et dans les deux sens (sens du laminage et sens perpendiculaire) le nombre d'épreuves indiqué au tableau ci-après :

TÔLES	NOMBRE D'ÉPREUVES	
	Maximum	Minimum
1re catégorie.	Feuille par feuille.	Une feuille sur trois.
2e —	Une feuille sur trois.	Une feuille sur six.
3e —	Une feuille sur cinq.	Une feuille sur dix.
4e —	Une feuille sur dix.	Une feuille sur quinze.

Les épreuves de traction à faire subir aux tôles et fers plats sont identiques à celles indiquées pour les fers de forge et les fers spéciaux ; les éprouvettes ont la forme de la figure 375.

Pour les tôles ayant une épaisseur inférieure à 5 millimètres, on remplace les épreuves de traction par des *épreuves à froid de pliage sans choc*, effectuées conformément au tableau ci-après et sans qu'il se manifeste aucune crique ou gerçure :

Digitized by Google

MARQUE	PLIAGE EFFECTUÉ	SENS DU LAMINAGE
1re catégorie.	R = 0,3e R = e	Long. Travers.
2e catégorie.	R = 2,5e R = 5e	Long. Travers.
3e catégorie.	R = 2,5e 45° R = 5e	Long. Travers.
4e catégorie.	90° R = 2,5e	Long.

Ces épreuves sont faites sur des bandes de 250 millimètres de longueur, 40 millimètres de largeur, ayant l'épaisseur de la tôle à essayer et découpées à froid sans autre préparation que l'enlèvement des bavures à la lime douce.

On fait aussi subir aux tôles *une épreuve de poinçonnage* exécutée de la façon suivante :

Des bandes de longueur suffisante et de 75 millimètres de largeur sont découpées en long et en travers sur les tôles dont l'épaisseur est supérieure à 8 millimètres, et on y perce à froid au poinçon des trous de 16 millimètres de diamètre distants entre eux de 70 millimètres mesurés de centre en centre, puis ils sont agrandis à froid, en commençant par celui du milieu, à l'aide de broches qui aug-

Digitized by Google

mentent le diamètre à :

32 millimètres pour la 1re catégorie ;
28 — 2e —
24 — 3e —

et il ne doit se produire après ces opérations ni criques, ni gerçures, ni dessoudures. On peut aussi effectuer une *épreuve de fragilité par choc*.

Les tôles sont ensuite soumises aux *épreuves à chaud* suivantes :

1° On fait confectionner avec un morceau de tôle, dans une feuille prise au hasard, un cylindre ayant pour hauteur et pour diamètre intérieur 25 fois l'épaisseur de la tôle ;

2° On fait confectionner avec un autre morceau de tôle une calotte sphérique à bord plat conservé dans le plan primitif de la tôle ; la corde de cette calotte mesurée intérieurement est égale à 30 fois l'épaisseur de la tôle, le bord plat, circulaire, à 7 fois cette épaisseur, et il est raccordé à la partie sphérique par un congé ayant pour rayon l'épaisseur de la tôle ; la flèche à donner à la calotte est de 5 fois cette épaisseur. La calotte ainsi formée avec tout le soin nécessaire ne doit présenter ni fente, ni gerçure, ni dédoublure (*fig.* 379).

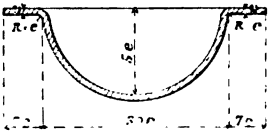


Fig. 379.

Fontes. — La qualité de la fonte est constatée par des épreuves, à froid, de choc, de flexion et de traction.

Il est fait six barreaux pour chaque fusion, dont deux pour chaque espèce d'épreuves, et chaque épreuve est faite sur un seul des barreaux sains. Si l'un d'eux ne remplit pas les conditions imposées, la coulée est refusée.

Les *barreaux d'épreuves* sont coulés, en châssis séparés, en sable très sec ou bien venus de fonte avec les pièces ; ceux coulés en châssis séparés doivent avoir une masselotte de 15 à 20 centimètres de longueur ; les autres n'en ont pas. Dans un cas comme dans l'autre, l'inclinaison des moules est de 20 centimètres par mètre. La prise d'essai a lieu au milieu de la coulée et les barreaux, ainsi que les pièces provenant d'une même coulée, reçoivent le numéro de cette coulée.

Les *épreuves par choc* sont faites sur des barreaux de 40 millimètres d'équarrissage, 200 millimètres de longueur, obtenus avec des barreaux bruts de 45 millimètres, rabotés sur chaque face de 2.mm,5 et adoucis à la lime.

Digitized by Google

Ces barreaux, reposant horizontalement sur deux couteaux espacés de 160 millimètres et fixés à une chabotte pesant 800 kilogrammes au moins, doivent supporter le choc d'un mouton de 12 kilogrammes tombant librement d'une hauteur de 400 millimètres au milieu de l'intervalle des points d'appui, la hauteur de chute initiale étant 25 centimètres avec des hauteurs de chute successivement augmentées de 5 centimètres jusqu'à la rupture.

Les faces convergentes des couteaux forment un angle de 45° avec arête arrondie suivant un rayon de 2 millimètres, la panne du mouton est cylindrique avec un rayon de 50 millimètres, la génératrice étant dirigée perpendiculairement à la direction du barreau sur ses appuis.

Les *épreuves par flexion* sont faites sur des barreaux de 40 millimètres d'équarrissage et 600 millimètres de longueur obtenus avec des barreaux bruts de 45 millimètres rabotés sur chaque face de 2mm,5 et adoucis à la lime.

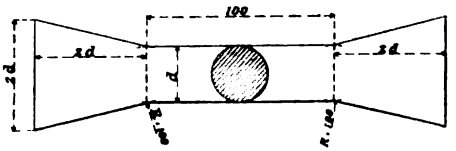


Fig. 380.

Ces barreaux, reposant sur deux couteaux espacés de 500 millimètres, doivent supporter sans se rompre une charge de 1.800 kilogrammes appliquée normalement par un couteau au milieu de l'intervalle des points d'appui (Romaine de Joëssel).

Les faces convergentes des couteaux forment un angle de 45° dont l'arête est arrondie suivant un rayon de 2 millimètres. La durée de l'essai est de une à deux minutes; on doit éviter les chocs et les accroissements brusques d'efforts.

Dans le cas où l'usine ne possède pas un appareil d'essai du genre indiqué ci-dessus, on peut employer l'appareil de Monge avec barreaux d'épreuve de 500 millimètres de longueur.

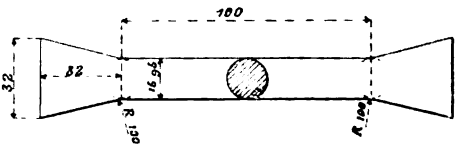


Fig. 381.

Les *épreuves par traction* sont faites avec des éprouvettes à sec-

Digitized by Google

tion cylindrique et têtes coniques dont le principe est exprimé par la figure 380; leur diamètre dans la partie utile est de 27mm,6 (600 millimètres carrés de section) ou de 15mm,95 (200 millimètres carrés de section), suivant l'épaisseur des pièces ; elles sont exécutées d'après le croquis (*fig* 381). Les éprouvettes de 27mm,6 de diamètre sont tournées dans des cylindres bruts de 60 millimètres et celles de 15mm,95 dans des cylindres de 35 millimètres; elles sont polies.

La durée de l'essai est de une à deux minutes; les charges sont progressives et sans chocs, ni accroissements brusques d'effort.

Le métal doit donner une résistance minima de 16 kilogrammes par millimètre carré de section.

Rivets. — Les rivets sont en fer à grain très fin et parfaitement homogène remplissant toutes les conditions et épreuves imposées aux fers de forge de la première catégorie.

Les rivets sont ensuite soumis aux épreuves suivantes :

1° *Essai de pliage* — Si la longueur des rivets est suffisante, on les replie sur eux-mêmes jusqu'à ce que les génératrices des deux parties soient juxtaposées.

Si leur longueur ne permet pas cette épreuve, on les plie seulement à 45° au moyen d'un levier à douille, puis on les redresse dans leur position primitive. Dans l'un et l'autre cas, il ne doit se produire ni fentes, ni criques, ni gerçures.

2° *Essai de rivetage.* — On rive deux feuilles de tôle dont la somme des épaisseurs est, au moins, égale à deux fois le diamètre des rivets ; on enfonce ensuite entre elles une tranche jusqu'à ce que l'un des rivets soit arraché : la texture du fer doit être à cassure très sensiblement semblable à celle de ce même fer avant la fabrication des rivets.

Boulons et écrous. — Le fer employé pour la fabrication des boulons et des écrous est de la deuxième catégorie des fers de forge définis précédemment, il est à nerf pour la fabrication des boulons et à grain pour celle des écrous et doit satisfaire aux épreuves indiquées précédemment pour la réception des fers de forge. Les barres mal soudées, criquées ou pailleuses sont refusées.

Les têtes de boulons sont refoulées dans la masse ; la face d'appui est parfaitement plane et d'équerre avec la tige. Il est fait exception pour les boulons à tête carrée dont les dimensions nécessitent le refoulement d'une longueur de tige supérieure à 4 fois le diamètre.

Le taraudage des boulons et des écrous est fait avec soin, les filets doivent être pleins et obtenus en une seule passe dans une machine à fileter, de telle sorte que les écrous puissent indistinctement s'adapter sur tous les boulons de même type.

Digitized by Google

Les boulons sont graissés pour les préserver de l'oxydation.

Les boulons servant à l'assemblage des métaux entre eux sont tournés sur toute leur étendue ; les têtes et les écrous sont à six pans. Les boulons servant à assembler les charpentes sur les pièces en fer ou en fonte ne sont pas tournés. Les têtes sont carrées et les écrous à six pans.

Les boulons de charpente proprement dits ont la tête et l'écrou carrés et ils sont munis de rondelles.

Les rondelles sont nettement fabriquées, parfaitement unies, planes et sans bavures.

On peut aussi procéder sur les boulons et écrous finis à des essais de pliage et d'écrasement permettant de vérifier la bonne qualité du métal et des pièces.

QUALITÉ DES ACIERS

Aciers laminés et tôles. — Les aciers employés sont à grain fin, régulier et homogène, à surface parfaitement unie et saine ; les barres ne doivent présenter ni gales, ni criques, ni gerçures ou autres défauts pouvant nuire à leur apparence ou à leur solidité : elles doivent être bien dressées et calibrées dans toute leur longueur et les extrémités affranchies carrément et sans bavures.

Les tôles doivent être d'un métal doux, facile à travailler à la lime et au burin, pouvant être percé, cintré, embouti et rivé, suivant les usages ordinaires, sans se fendre ni se gercer ; après leur laminage, elles sont recuites au rouge cerise dans un four, suivi d'un refroidissement lent, et doivent présenter une surface plane bien lisse, sans stries, gerçures, gravelures, manques de matière ou autres défauts pouvant nuire à leur aspect ou à leur emploi.

Acier pour rivets. — L'acier employé est parfaitement homogène, les formes et dimensions des rivets sont exactement conformes aux dessins d'exécution. Leurs têtes sont bien centrées et d'équerre à la tige, celle-ci est droite et d'un diamètre uniforme avec une tolérance d'au plus $0^{m},001$ près de la tête.

ESSAIS DES ACIERS

Aciers laminés. — On vérifie la qualité des aciers laminés par des épreuves de traction qui sont identiques à celles que l'on fait subir aux fers de forge et fers spéciaux, la résistance par millimètre carré de section et l'allongement pour 100 ayant les valeurs données par le tableau ci-après :

Digitized by Google

CATÉGORIES	RÉSISTANCE maxima à la rupture par millimètre carré de section	ALLONGEMENT minimum pour 100	ÉPREUVES DIVERSES
1re	55	18	
2e	50	22	
3e	45	24	Un barreau forgé de 15 millimètres d'épaisseur et 40 millimètres de longueur doit pouvoir, non trempé, se plier à bloc sans criques, à froid et sans choc.
4e	40	26	Doit pouvoir se souder et se cémenter. Un barreau forgé formé de deux bouts soudés de 20 millimètres et 40 millimètres de largeur, et recuit, doit pouvoir se plier à bloc à l'endroit de la soudure sans criques, à froid et sans choc.
5e	38	30	Un barreau formé de deux bouts soudés, de 20 millimètres d'épaisseur sur 40 millimètres de largeur, et trempé, doit pouvoir se plier à bloc, à l'endroit de la soudure et sans criques, à froid et sans choc.

On vérifie la texture du métal en cassant un certain nombre de pièces en les frappant en porte-à-faux sur une enclume avec un marteau à devant après incision au burin ou à la tranche d'une partie de la section : la cassure doit dénoter un acier parfaitement homogène à grains fins et réguliers.

On peut aussi vérifier la *fragilité* du métal de la façon suivante :

On prépare trois barreaux carrés de 20 millimètres de côté et on les dispose dans une machine de telle sorte que la partie excédante ait 100 millimètres, et la partie encastrée 80 millimètres au minimum. Chaque barreau est ensuite entaillé dans la section d'encastrement sur chacune de ses faces au moyen d'un burin dont le taillant a une section triangulaire équilatérale de 1 millimètre de côté ; puis il est placé sur l'enclume de la machine dite de Ruelle, de manière que l'extrémité en porte-à-faux soit à l'aplomb de l'axe du mouton dont le poids est de 18 kilogrammes. Aucun des trois barreaux ne doit casser sous un seul coup de mouton tombant de 3 mètres.

Tôles d'acier. — On vérifie la qualité des tôles d'acier par des épreuves de traction et de pliage à froid et des épreuves d'emboutissage à chaud. Les tôles d'acier sont présentées, à la réception, recuites.

Les épreuves de traction sont identiques à celles que l'on fait subir aux tôles de fer, la résistance par millimètre carré de section et l'allongement pour 100 ayant les valeurs suivantes :

Digitized by Google

1re *catégorie. — Aciers demi-doux.*

kil.

50 de résistance minima par mm² de section et 17 0 0 d'allongement

2e *catégorie. — Aciers doux.*

45 de résistance minima par mm² de section et 22 0 0 d'allongement

3e *catégorie. — Aciers très doux.*

40 de résistance minima par mm² de section et 27 0 0 d'allongement

4e *catégorie. — Aciers extra-doux.*

38 de résistance minima par mm² de section et 31 0/0 d'allongement

Pour les tôles dont l'épaisseur est inférieure à 5 millimètres, les épreuves par traction sont remplacées par des épreuves de pliage à froid; mais on peut en faire aussi pour les tôles d'épaisseur supérieure. Ces épreuves sont effectuées sur des bandes de 250 millimètres de longueur, 40 millimètres de largeur, ayant l'épaisseur des tôles à essayer et dans les conditions suivantes:

	TOLES DE 3 MILLIMÈTRES d'épaisseur et au-dessous	TOLES D'ÉPAISSEUR supérieure à 3 millimètres	SENS du laminage
1re catégorie. Métal demi-doux	Pliage simple sans trempe R = e	Pliage sans trempe R = 4e	Long ou travers.
2e catégorie. Metal doux	Pliage à bloc sans trempe	Pliage sans trempe R = 2e	Id.
3e catégorie. Métal très doux	Pliage en double à bloc après trempe	Pliage simple à bloc après trempe	Id.
4e catégorie. Métal extra-doux	Pliage double à bloc après trempe	Pliage simple à bloc après trempe	Id.

Digitized by Google

Les épreuves à chaud par emboutissage, qui ne sont applicables qu'aux tôles d'acier très doux, sont exécutées à une température voisine de celle du rouge cerise, en plusieurs chaudes s'il est nécessaire.

Elles consistent (voir *fig.* 379, p. 577):

1° Dans l'exécution d'une calotte sphérique avec bord plat conservé ans le plan primitif de la tôle aux dimensions prescrites pour les tôles d'acier; toutefois la flèche de la calotte est portée de 5*e* à 15*e*.

2° Pour les tôles de plus de 5 millimètres d'épaisseur, dans l'exécution d'une cuve à base carrée et à bords relevés d'équerre. Le fond de cette cuve est percé, au milieu, d'un trou circulaire, aux bords relevés (*fig.* 382).

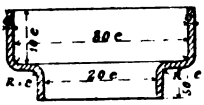


Fig. 382.

Dans ces épreuves exécutées avec soin, les tôles ne doivent présenter ni criques ni gerçures.

On peut aussi *vérifier la fragilité* pour les tôles de plus de 20 millimètres d'épaisseur par le procédé employé pour les aciers laminés [1].

Boulons et écrous d'acier. — L'acier doux employé à la fabrication des boulons et écrous doit être à grain fin.

Les épreuves de réception des boulons et écrous en fer sont applicables aux boulons et écrous en acier. On effectue aussi un essai pour vérifier la texture du métal.

Épreuves applicables aux rivets d'acier. — Les épreuves à froid auxquelles on soumet les rivets d'acier sont les mêmes que

[1] Il n'est pas sans intérêt de reproduire ici les prescriptions relatives à l'essai de fragilité à imposer aux tôles de chaudières à vapeur :

Le barreau d'essai affecte la forme d'un parallélipipède rectangle dont la base a pour dimensions l'épaisseur de la tôle et une longueur minima de 14 centimètres, et dont la hauteur est de 2 centimètres. Ledit barreau repose par sa base sur des appuis distants de 12 centimètres, chacune des extrémités comportant ainsi une portée d'au moins 1 centimètre. Il est pratiqué au milieu de la base inférieure, et normalement à l'épaisseur de la tôle, une entaille de 4 millimètres de largeur terminée par un arrondi (demi-cercle de 4 millimètres de diamètre), de telle sorte que le barreau présente une hauteur de 1 centimètre et demi dans sa partie la plus affaiblie.

Le travail minimum nécessaire pour la rupture du barreau, par choc normal à la base, reposant sur les appuis, doit être de 10 kilogrammètres par centimètre carré de la section de rupture, soit $0^{kgm},67$ par millimètre d'épaisseur de la tôle.

Digitized by Google

celles exécutées sur les barrettes découpées dans les tôles: elles doivent permettre de constater que l'acier des rivets peut supporter, avant de se rompre, un effort de traction de 38 kilogrammes par millimètre carré avec une tolérance de 4 kilogrammes, et qu'au moment de la rupture l'allongement est les 28 centièmes de la longueur observée.

Afin de s'assurer de la malléabilité de l'acier, des morceaux de barre, ayant une longueur double du diamètre et chauffés uniformément jusqu'à la température de l'emploi, sont martelés et réduits au tiers de la longueur. Il ne doit pas, dans ce travail, se produire de fissures.

L'Administration peut, si elle le juge convenable, prescrire un certain nombre d'essais sur des barres choisies parmi celles qui sont destinées à fabriquer des rivets, et qui subissent, au préalable, l'opération de la soudure, afin de s'assurer que le métal de ces rivets présente toutes les qualités de malléabilité désirables et que sa résistance n'est pas sensiblement altérée par la soudure.

Pour constater la résistance de la rivure, on a recours aux mêmes épreuves que pour les rivets en fer.

Pièces en acier moulé. — Les aciers moulés doivent être d'une texture parfaitement homogène, sans scories, exempts de tous défauts, tels que soufflures, gerçures, etc..., susceptibles de nuire à leur solidité ou à leur emploi. L'acceptation faite en usine n'est que provisoire, le rebut pouvant être ultérieurement prononcé pour les défauts mis à nu par le travail d'ajustage. Toutes les pièces sont recuites avant d'être mises en œuvre.

Les barrettes d'essai sont prises dans des masselottes ou dans des appendices venus de fonte avec les pièces; elles sont découpées après que les pièces ont été recuites.

Epreuves. — Les épreuves comprennent une épreuve de traction, dans les conditions indiquées pour l'acier laminé, et une épreuve de choc.

Les barrettes destinées aux essais de traction sont tournées au diamètre de treize millimètres huit dixièmes (0m,0138) sur 100 millimètres de longueur, partie comprise entre les repères tracés.

Elles doivent donner à l'épreuve de traction une résistance moyenne à la rupture de 45 kilogrammes, avec un allongement de 10 0 0. On accepte une tolérance en moins de 3 kilogrammes sur la limite de rupture; l'allongement ne peut être inférieur à 8 0 0.

Au choc, les barreaux éprouvés dans les conditions réglementaires (poids de l'enclume, 350 kilogrammes au minimum; distance des points d'appui, 16 centimètres; dimensions des barreaux, 30/30) ne doivent pas se rompre sous le poids d'un mouton de 18 kilogrammes tombant successivement de hauteurs croissant de 0m,05 en 0m,05, depuis 1 mètre jusqu'à 1m,50. La moitié au moins

Digitized by Google

des barreaux doit satisfaire à ces conditions ; sinon, toute la coulée est rebutée.

Réception des fers. — Indépendamment des épreuves de qualité de la matière mentionnées précédemment, les pièces métalliques sont l'objet d'une première réception dans l'atelier du constructeur, tant sous le rapport de leur confection que pour leur poids. Elles sont provisoirement montées et assemblées à cet effet. Elles y sont également soumises à toutes les épreuves jugées utiles par l'Administration pour vérifier la solidité des assemblages et leur résistance. Les poids constatés des différentes parties de l'ouvrage sont inscrits sur un procès-verbal.

Cette constatation ne fait pas obstacle à ce que les pièces soient de nouveau pesées sur le chantier avant leur mise en œuvre, et l'entrepreneur doit fournir, à ses frais, les bascules et autres engins nécessaires.

Enfin l'entrepreneur reste chargé des épreuves définitives nécessaires pour constater la résistance de l'ouvrage aux surcharges par poids mort et par poids roulant.

Tous les frais de modèles, de moulages, d'assemblages provisoires et d'épreuves sont à la charge de l'entrepreneur.

Main-d'œuvre. — Toutes les façons sont exécutées avec le plus grand soin, suivant les règles de l'art; les assemblages parfaitement ajustés ; les montants et traverses bien alignés.

L'entrepreneur soumet à l'Administration, dans un délai fixé par le devis particulier, des dessins faisant connaître avec précision les détails de fabrication des pièces métalliques, et notamment l'emplacement des entures et la disposition des couvre-joints.

Il a, en outre, à faire pour chaque travail les façons et les mains-d'œuvre suivantes, savoir :

1° Le dressage et le planage des tôles, fers à T, cornières et autres à employer ;

2° Le coupage et le rabotage des tranches, le découpage des âmes ;

3° Le perçage, le montage et la rivure dans l'atelier de toutes les parties qui peuvent y être définitivement rivées et dont les dimensions sont fixées par l'agent réceptionnaire ;

4° Un montage provisoire dans l'atelier, en totalité ou en partie, comme il est spécifié dans chaque cas ;

5° Le chargement à l'usine, le transport à pied d'œuvre et le déchargement au lieu de pose :

6° La vérification des points d'appui en plan et en élévation ;

7° La mise en place du tout, l'assemblage définitif et la rivure sur place des parties séparées ;

8° La peinture des fers, soit avant leur assemblage, soit après achèvement du montage sur place ;

Digitized by Google

9° Tous autres travaux nécessaires à l'achèvement complet du travail, les frais et faux frais quelconques étant à la charge de l'entrepreneur.

Travail à l'atelier et mise en œuvre. — L'ajustage est fait de la manière suivante :

Les tôles sont parfaitement dressées et coupées carrément.

Les tranches des côtés découverts des tôles et couvre-joints sont dressées de manière à présenter des lignes régulières. Ces tranches sont franches sur toute l'épaisseur et ne doivent présenter ni déchirure, ni manque de matière.

Les tranches de toutes les pièces, tôles, fers, cornières, etc.... dans les parties où les jonctions bout à bout doivent avoir lieu. sont dressées avec le plus grand soin, pour assurer, sur toute la surface du joint, un contact parfait.

Des axes mathématiques, déterminés chacun par des coups de pointeau, sont établis au milieu de chaque feuille de tôle et servent à repérer exactement les lignes de rabotage et les alignements des trous.

Tous les fers, aciers, etc., qui doivent être travaillés à la forge, sont chauffés avec les précautions nécessaires pour n'être pas brûlés.

Les patins en fonte et les têtes des colonnes servant de support à d'autres pièces sont rabotés dans toutes les parties en contact avec les poutres et les clavettes de calage.

Un rabotage analogue est exigé pour toutes les parties correspondantes des pièces à supporter.

Garde-corps. — Les fers pour garde-corps sont parfaitement dressés et ont les formes prescrites.

Assemblages. — Les assemblages ne doivent rien laisser à désirer sous le rapport de l'exactitude et de la solidité.

Perçage. — Le perçage de toutes les pièces doit être fait d'une manière régulière.

Les fers percés sont complètement ébarbés des deux côtés, de telle sorte qu'ils puissent s'appliquer parfaitement les uns sur les autres.

Le perçage des tôles, cornières, fers spéciaux, couvre-joints et en général de toutes les pièces répétées plusieurs fois, est fait mécaniquement; à cet effet, le chariot du poinçon est muni de moyens d'arrêt établissant des distances rigoureusement exactes entre les trous.

Les trous faits par le poinçon dans les aciers laminés doivent avoir 0m,003 de moins que le diamètre prescrit; ils sont finis à l'alésoir avec un léger fraisage des bords.

Digitized by Google

Tolérance. — La tolérance pour l'irrégularité du perçage d'un trou à l'autre est au maximum d'un demi-millimètre (0m,0005) et pour la feuille entière de deux millimètres (0m,002) au plus.

Dans le cas où les feuilles sont percées à la main, il n'est accordé qu'une tolérance de 1 millimètre (0m,001) au plus pour les distances extrêmes.

Il n'y a aucune tolérance dans les alignements des trous, déterminés au moyen des axes indiqués précédemment.

A moins d'ordre contraire, ces lignes doivent être exactement parallèles aux tranches rabotées.

Calibres. — Pour vérifier les dimensions des tôles, l'alignement des trous et leur diamètre, il est fait des calibres ayant exactement la forme des tôles à examiner. Ces calibres portent des parties cylindriques qui ont les dimensions des corps de rivet et glissent dans des rainures correspondant parfaitement avec les lignes des trous à percer.

On établit également des calibres sur lesquels sont fixés plusieurs boulons ayant la forme du corps du rivet. Ces calibres peuvent servir à mesurer deux, quatre, six ou huit trous à la fois.

Rivures. — Les rivures, près des joints, doivent être disposées de façon à provoquer le serrage des tôles en contact. Le contact des tranches doit être parfait ; sinon, la rivure peut être refusée.

Les cornières, doublures et couvre-joints doivent être, dans l'intervalle des rivets, parfaitement appliqués sur les tôles et fers qu'ils recouvrent ; même dans les parties où se présentent des changements d'épaisseurs, ils épousent exactement toutes les irrégularités de la superficie. Dans le cas où ce résultat n'est pas obtenu, les rivures peuvent être refusées.

Les trous relatifs à un même rivet, dans les tôles et fers superposés, doivent correspondre exactement d'une pièce à l'autre. Il est néanmoins accordé une tolérance de 1 millimètre (0m,001) au plus d'excentricité, à la condition de faire disparaître cette différence à l'alésoir.

Si l'excentricité était plus considérable et qu'en raison de certaines circonstances, dont l'agent réceptionnaire est seul juge, les pièces présentant ce défaut ne fussent pas refusées, le constructeur ne doit mettre le rivet que lorsque l'agent réceptionnaire lui a prescrit la manière dont le trou doit être modifié.

La rivure doit être précédée du serrage des tôles et des fers superposés ; elle doit, en outre, être opérée de manière qu'aucun déversement ne se produise dans le corps du rivet ou dans la tête de la rivure.

Digitized by Google

Les rivets doivent être préparés avec un diamètre plus petit de un vingtième que celui des trous.

Les rivets doivent être chauffés entièrement et uniformément à une température ne dépassant pas le rouge cerise; ils sont appliqués à cette température et travaillés de manière à serrer fortement les fers et tôles à assembler; ils doivent encore avoir la couleur rouge sombre à la fin du rivetage. Ils sont, autant que possible, formés d'un seul coup et, lorsqu'ils sont faits à l'atelier par rivure mécanique, ils doivent remplir leurs trous sans aucun jeu; leurs têtes doivent faire parfaitement corps avec le reste du rivet, porter sur toute leur étendue, être bien cintrées, bien nourries à la naissance, ébarbées avec soin et ne présenter ni gerçures, ni déchirures.

Les rivets sont chauffés au four. Les fours sont placés près des ouvriers pour éviter le refroidissement pendant le transport des fours à l'ouvrage. Le constructeur est tenu de se munir, pour tous les travaux sur le lieu de pose, de fours portatifs. Le chauffage à la forge n'est jamais admis dans l'atelier du constructeur. On ne peut y recourir que pour les travaux partiels, isolés, sur les points où les rivets des fours ne peuvent arriver suffisamment chauds.

Outillage. — Toutes les rivures sur le chantier se font, autant que possible, à la machine; lorsque c'est impossible, elles peuvent être faites à la bouterolle, avec un marteau à devant. Il n'est autorisé aucune rivure par le petit marteau de chaudronnier, ni aucun écrasement direct des rivets à l'aide du marteau à devant ou avec une chasse plate. Les rivoirs et la forme de la bouterolle doivent être approuvés par l'agent réceptionnaire.

Les marteaux à main pèsent 4 kilogrammes et les marteaux à devant au moins 9 kilogrammes.

Au moment de la rivure, on maintient la tête du rivet avec des tas en fonte et des vis à pression.

On ne tolère les leviers que dans les cas où l'emploi des appareils ci-dessus n'est pas possible.

Dispositions spéciales aux aciers. — Le travail à l'atelier est effectué de façon à éviter le plus possible les coups de marteau. Le dressage et le planage s'exécutent à la machine et aux rouleaux et, si l'on est obligé d'employer le marteau, les masses en cuivre sont substituées aux masses en fer.

Lorsqu'il y a lieu de contrecouder ou travailler des pièces à chaud, on doit avoir soin de les chauffer d'une manière bien uniforme et de n'exécuter aucune de ces façons à une température inférieure au rouge sombre.

Le forgeage a lieu avec des maillets en bois, et toute pièce ayant subi un forgeage est soumise au recuit.

Digitized by Google

Montage à l'atelier du constructeur. — Pour faciliter la pose et le levage des parties dont les dimensions sont trop considérables, on peut les river par section.

Les dimensions et les dispositions de ces sections sont fixées par l'agent réceptionnaire.

Chantiers. — Les poutres ou parties de poutres sont construites à plat sur chantiers solidement établis, élevés de 0m,80 environ au-dessus du niveau du sol, pour permettre le passage des hommes au-dessous de l'ouvrage. Le sol doit être damé et dressé de niveau pour que les carreaux en fonte sur lesquels sont appuyés les enclumes, trucs, et autres engins nécessaires au travail de l'assemblage et de la rivure, puissent être établis d'une manière stable.

Exécution du travail. — La qualité du travail d'assemblage tenant principalement à la précision du contact des fers juxtaposés par la tranche, on exige l'emploi de serre-joints capables d'assurer ce contact; on prend d'ailleurs toutes les précautions nécessaires pour ne pas déranger leur position pendant l'opération de la rivure.

Le travail est conduit, pour les pièces montées, de façon à n'entraîner aucun gondolage, ni aucune déformation dans l'ensemble des parois, les lignes et surfaces d'axe présentent rigoureusement, en fin de compte, la forme et la continuité définies aux dessins des ouvrages.

Exactitude du montage. — Aucune pièce de fer ou de fonte ne doit sortir de l'atelier du constructeur sans avoir été préalablement assemblée avec celles qui précèdent et qui suivent et avec les pièces latérales en contact. Cet assemblage provisoire doit être fait de manière à présenter un ensemble régulier, sans gauchissement, et en tout conforme à l'épure.

Chaque pièce est ensuite numérotée pour qu'on puisse facilement la retrouver à la pose.

Montage au lieu de pose. — L'assemblage définitif des constructions au lieu de pose, qui a lieu sous la surveillance de l'agent de l'Administration, peut se faire de plusieurs manières, suivant que les dimensions de ces constructions, la disposition des lieux ou les servitudes de passage permettent l'emploi de l'un ou l'autre procédé.

Les tronçons construits à l'atelier et transportés à pied d'œuvre, conformément aux indications ci-dessus, peuvent être assemblés définitivement entre eux, soit avant l'opération du levage ou lançage, soit dans le courant de cette opération et au fur et à mesure de son avancement. Des poutres secondaires, disposées

Digitized by Google

entre les poutres principales, peuvent être assemblées et rivées définitivement, soit avant, soit après la mise en place des parties qu'elles relient.

Quand il y a lieu de faire des échafaudages, le fournisseur doit les établir en temps opportun pour que l'opération du levage ou lançage ne puisse pas être retardée de ce chef.

L'assemblage et la rivure, sur le lieu de pose, sont faits par les meilleurs ouvriers qui ont été employés à la fabrication ; ces ouvriers sont en nombre suffisant pour assurer la bonne et prompte exécution des travaux ; ils doivent obéir aux prescriptions que l'agent de l'Administration peut donner dans l'intérêt du travail.

L'ajustage et la pose de toutes les pièces de fer et de fonte doivent d'ailleurs être faits avec la plus grande exactitude. L'entrepreneur est responsable de tous les vices de la pose, de même qu'il est chargé de tous les détails de son exécution. Il fait exécuter à ses frais tous les refouillements nécessaires pour sceller ou loger les pièces, mais après avoir obtenu l'autorisation expresse de l'agent.

Scellements. — Les trous ou encastrements pour scellements sont pratiqués de telle sorte que la pièce à sceller, mise en place, n'ait jamais plus de 5 *millimètres* de jeu ; ils sont toujours plus larges à la base qu'au sommet. Pour les scellements au plomb, on a soin de bien assécher les parois de la pierre et de la chauffer de manière à prévenir un refroidissement subit susceptible de nuire à l'adhérence du plomb avec la pierre. On place la pièce à sceller bien au milieu des trous et encastrements, afin que le plomb l'enveloppe complètement d'une manière uniforme; puis on dispose à la main des cales en fer de manière à laisser entre elles des vides suffisants pour laisser pénétrer le plomb. Le plomb fondu est porté à une température convenable pour être coulé très liquide et sans discontinuité jusqu'à parfait remplissage.

Après le refroidissement, le plomb est fortement refoulé au maillet et au ciseau.

Les scellements au soufre sont formellement interdits.

Peinture des fers. — Les fers et fontes reçoivent deux couches de peinture au minium: la première est appliquée à l'atelier, la deuxième après le montage définitif. Ils reçoivent ensuite deux couches de peinture de la couleur prescrite par le cahier des charges particulier.

Les prix de peinture sont implicitement compris, à moins de prescription contraire, dans ceux des fers et fontes.

Épreuve des charpentes métalliques. — Les fermes et pannes métalliques sont soumises à l'épreuve suivante :

Trois fermes de chaque type, choisies par le chef de service

Digitized by Google

après leur exécution, sont assemblées avec leurs pannes et celles-ci sont chargées de rails, de façon à produire une surcharge de 200 kilogrammes par mètre carré du comble ainsi formé. Ces charges séjournent pendant tout le temps qui est reconnu nécessaire par le chef de service. L'épreuve à laquelle les fermes sont ainsi soumises ne doit pas produire de déformation permanente et tous les assemblages doivent demeurer intacts.

Les avaries occasionnées par l'épreuve sont immédiatement réparées par l'entrepreneur. Si ces avaries proviennent de défauts de la matière, de vices d'exécution, etc., ou, d'une manière générale, si elles sont de nature à inspirer des craintes pour la solidité de la construction, toutes les autres fermes sont soumises aux mêmes épreuves.

Épreuve des poitrails, poutres de contreventement, etc. — Les poitrails, poutres de contreventement, etc., sont soumis aux épreuves prévues par les devis spéciaux; à défaut de stipulation à ce sujet dans le devis, le chef de service peut prescrire des épreuves dans lesquelles les efforts des différentes parties de la pièce, calculés d'après les procédés ordinaires, peuvent atteindre 10 kilogrammes par millimètre carré.

Épreuve des ponts métalliques. — Les ponts métalliques sont soumis aux épreuves fixées par la circulaire du Ministre des Travaux publics en date du 29 août 1891.

Dépenses des épreuves. — Toutes les dépenses relatives aux épreuves des charpentes, pannes, poitrails, etc., etc., et, en général, de tous les ouvrages autres que les ponts, sont à la charge de l'entrepreneur.

Les dépenses d'épreuves des ponts sont, à moins de stipulations contraires dans les devis, à la charge de l'Administration.

Toute épreuve qui n'a pas donné des résultats entièrement satisfaisants est recommencée aux frais de l'entrepreneur; cette prescription est applicable aux ponts métalliques.

Les fers, aciers, fontes et tous métaux sont payés au poids.

Détermination des prix. — Assez généralement, le marché ne comporte que trois prix pour la charpente métallique : un pour le fer, un autre pour l'acier, le troisième pour la fonte. Ces prix comprennent tous déchets, fournitures, transports à pied d'œuvre, mise en place, peinture à quatre couches, percement de trous et entailles dans les maçonneries, échafaudages, ponts de service, épreuves, scellements des plaques d'appui des appareils de dilatation, scellements des montants du garde-corps et de tous autres à effectuer, ainsi que la fourniture du plomb, du mastic et du ciment nécessaires pour les scellements, en un mot toutes fournitures et

Digitized by Google

façons, faux frais et mains-d'œuvre de toute nature nécessaires pour la mise en place complète et parachevée et la mise en état de réception définitive des travaux.

Les plaques d'interposition en plomb sont alors pesées avec les fers, aciers ou fontes qu'elles accompagnent et payées, suivant les cas, aux prix portés pour ces fers, aciers ou fontes à la série des prix.

Toutefois, si le bordereau comporte un prix pour le plomb, lesdites plaques, pesées à part, sont payées au prix spécial du bordereau.

Si quelques ouvrages doivent être payés à la pièce, ils sont désignés spécialement par le devis particulier de l'entreprise.

L'entrepreneur n'est admis à réclamer aucun supplément de prix, ni pour les pièces de forge dont le devis ou les dessins indiquent l'emploi, ni pour toute autre sujétion quelle qu'elle soit, pourvu qu'elle résulte du projet faisant l'objet du devis.

Les pièces de fer, d'acier, de fonte et de plomb, mises en place, sont payées pour leur poids réel, tant que ce poids n'excède pas de plus de 2 0/0 celui résultant des dimensions portées aux dessins. Tout excédent au delà de cette tolérance n'est payé que pour la moitié du poids jusqu'à 4 0/0, et à partir de 4 0/0 il n'est plus rien payé [1].

Les poids manquants sont déduits et, si le manque de poids peut compromettre la solidité de l'ouvrage, les parties trop légères sont refusées et remplacées.

Il n'est accordé aucune tolérance en dessous pour l'épaisseur des tôles.

Pesées. — La détermination du poids des pièces se fait par pesées directes. Ces poids sont vérifiés aux frais de l'entrepreneur sur le chantier, avant l'emploi, contradictoirement, par pesées directes, autant que possible. L'entrepreneur, doit avoir sur les lieux une romaine et tous autres engins suffisants pour effectuer ces pesées.

Calculs des poids. — Pour déterminer la quotité de tolérance fixée ci-dessus, l'entrepreneur fournit les calculs des poids de tous les éléments des pièces. Le résultat de ce calcul est vérifié par l'Administration; dans le cas où il y a lieu de faire des corrections, elles sont soumises à l'entrepreneur qui doit présenter ses

[1] Le cahier des charges spécial aux chemins vicinaux accorde une tolérance de 3 0/0 sur les poids prévus d'après les dessins d'exécution, mais sans que cette tolérance puisse augmenter de 1 fr. 50 0/0 la dépense totale portée au projet pour les parties métalliques.

Digitized by Google

observations par écrit dans le délai de quinze jours. Si aucune observation n'est présentée dans le délai précité, les poids rectifiés sont admis pour servir de base au règlement des tolérances.

Si une erreur est signalée, les calculs sont de nouveau vérifiés, et leurs résultats, rectifiés s'il y a lieu, doivent être acceptés par l'entrepreneur dans le délai de quinze jours.

Dans ces calculs, on admet pour le poids du mètre cube de fer 7.800 kilogrammes, et 7.200 kilogrammes pour le poids du mètre cube de fonte.

Le poids des plombs est toujours déterminé par pesées directes.

Conformité de l'exécution aux dessins. Modifications. — Tous les ouvrages doivent être exécutés conformément aux dessins qui sont remis à l'entrepreneur en cours d'exécution.

Dans le cas où l'entrepreneur juge à propos d'apporter quelques modifications dans les dispositions adoptées, il est tenu de les soumettre à l'approbation de l'Administration, sous peine de voir rejeter les pièces modifiées. Cette approbation n'atténue en rien sa responsabilité.

Vérification des efforts par l'entrepreneur. — L'entrepreneur est tenu de vérifier par le calcul les efforts des différentes pièces et assemblages, et de soumettre à l'Administration les observations auxquelles donnent lieu les dispositions qui lui paraissent contraires à la solidité ou à la bonne exécution des travaux. Il doit s'assurer que, dans les assemblages, le travail des rivets au cisaillement est toujours inférieur d'au moins un sixième au travail à l'extension ou à la compression des pièces de la ferme, du pont, etc., qui subissent les plus grands efforts.

Vérification sur place de la position des appuis des charpentes, poutres, etc. — L'entrepreneur est tenu de vérifier à ses frais, risques et périls, les dimensions et la position des appuis, tels que murs, dés en pierre, pilastres, piles, culées, etc., sur lesquels les charpentes, poutres, consoles, etc., doivent reposer ou être appliquées. Il doit, en conséquence, relever sur place les différences qui peuvent exister entre la position réelle de ces appuis et celle qui résulte des dessins, et proposer au besoin des modifications dans les dimensions des pièces du projet, pour qu'il ne puisse surgir au moment du levage ou du lançage aucune difficulté susceptible de retarder les travaux ou de nuire à leur bonne exécution. Il demeure par suite responsable de toutes les erreurs ou différences dans les cotes qui peuvent résulter de l'inobservation des prescriptions ci-dessus et des conséquences qui en résulteront.

Surveillance à l'usine de la fabrication des matières. — L'entre-

Digitized by Google

preneur doit faire réserver pour un agent de l'Administration le droit de suivre la fabrication des matières aux usines où il les a commandées. Cet agent peut procéder, aux frais de l'entrepreneur, aux épreuves prescrites par le présent cahier des charges et refuser toute pièce qui est défectueuse sous le rapport de la qualité, de la fabrication ou des dimensions.

L'entrepreneur doit, en outre, donner la libre entrée de ses ateliers aux représentants de l'Administration, qui peuvent y pénétrer chaque fois qu'ils le jugent convenable.

Les travaux sur les chantiers de montage sont également surveillés par les agents de l'Administration auxquels l'entrepreneur doit donner toutes les facilités nécessaires à cet effet.

Responsabilité de l'entrepreneur. — La surveillance exercée par les agents de l'Administration dans l'usine de fabrication, à l'atelier et sur les chantiers de montage, les vérifications et épreuves, les réceptions provisoires de matériaux ou d'ouvrages exécutés, n'ont, dans aucun cas, pour effet de diminuer la responsabilité de l'entrepreneur, qui reste pleine et entière jusqu'à l'expiration du délai de garantie.

L'entrepreneur est seul responsable du fait de ses associés, employés ou ouvriers et des conséquences de tout accident résultant des travaux. Il est tenu de garantir l'Administration des suites de toute action dirigée contre elle pour des faits de cette nature. La surveillance des agents de l'Administration ne le décharge en rien de cette responsabilité.

Travaux à la tâche. — Les travaux d'assemblage et d'ajustage sur place peuvent être donnés à la tâche banale, mais le chef de service a le droit de veiller à ce que ce mode d'exécution ne nuise pas à la bonne marche du travail ; il peut l'interdire dans le cas où il le juge convenable sans que l'entrepreneur puisse contester cette appréciation.

Enlèvement des débris de matériaux. — Après l'achèvement de chaque ouvrage, l'emplacement de cet ouvrage et tous les terrains aux abords doivent être débarrassés de tous les échafaudages, engins, débris et matériaux en excès ou rebutés.

Digitized by Google

RÈGLEMENT RELATIF AUX ÉPREUVES DES PONTS MÉTALLIQUES

(29 AOUT 1891)

CHAPITRE I. — PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE FER

I. — VOIES DE LARGEUR NORMALE

ARTICLE PREMIER. — **Conditions à remplir.** — Les ponts à travées métalliques qui portent des voies de fer de largeur normale devront être en état de livrer passage aux trains autorisés à circuler sur le réseau auquel ils appartiennent et, en outre, au train-type défini à l'article 4 ci-dessous.

ART. 2. — **Limites du travail du métal.** — Les dimensions des différentes pièces des ponts seront calculées de telle sorte que, dans la position la plus défavorable des trains désignés à l'article premier, et en tenant compte de la charge permanente ainsi que des efforts accessoires, tels que ceux qui peuvent être produits par les variations de température, le travail[1] du métal par millimètre carré de section nette, c'est-à-dire déduction faite des trous de rivets ou de boulons, ne dépasse pas les limites indiquées ci-dessous.

I. Pour la fonte supportant un effort d'extension directe.. $1^k,50$

Pour la fonte travaillant à l'extension dans des pièces soumises à des efforts tendant à les faire fléchir..... $2^k,50$

Pour la fonte supportant un effort de compression..... $6^k,00$

II. Pour le fer et l'acier travaillant à l'extension, à la compression ou à la flexion, les limites exprimées en kilogrammes par millimètre carré de section seront fixées aux valeurs suivantes :

Pour le fer..... ..... $6^k,50$
Pour l'acier..... $8^k,50$

Toutefois ces limites seront abaissées respectivement :

A $5^k,50$ pour le fer et à $7^k,50$ pour l'acier dans les pièces de pont, longerons et entretoises sous rail ;

A 4 kilogrammes pour le fer et à 6 kilogrammes pour l'acier, pour les barres de treillis et autres pièces exposées à des efforts

[1] Le mot « travail » est entendu ici non dans son sens scientifique, mais dans le sens d'effort imposé au métal par unité de surface, qui lui est donné dans la pratique des constructions.

Digitized by Google

alternatifs d'extension et de compression : ces dernières limites pourront néanmoins être rapprochées des précédentes pour les pièces qui seront soumises à de faibles variations de ces efforts.

Dans l'établissement du projet des ouvrages métalliques d'une ouverture supérieure à 30 mètres, les ingénieurs pourront appliquer au calcul des fermes principales des limites supérieures à celles qui ont été fixées plus haut, sans jamais dépasser :

Pour le fer	$8^k,50$
Pour l'acier	$11^k,50$

Ils devront justifier, dans chaque cas particulier, les diverses limites dont ils auront cru devoir faire usage.

Lorsque des fers laminés dans un seul sens seront soumis à des efforts de traction perpendiculaire au sens du laminage, les coefficients seront réduits d'un tiers dans les calculs relatifs à ces efforts.

Les coefficients concernant l'acier ne subiront pas cette réduction.

On appliquera aux efforts de cisaillement et de glissement longitudinal les mêmes limites qu'aux efforts d'extension et de compression, mais en leur faisant subir une réduction d'un cinquième, étant entendu que les pièces auront les dimensions nécessaires pour résister au voilement; pour le fer laminé dans un seul sens, on fera subir à ces coefficients une réduction d'un tiers, lorsque l'effort tendra à séparer les fibres métalliques.

Le nombre et les dimensions des rivets seront calculés de telle sorte que le travail de cisaillement du métal ne dépasse pas les quatre cinquièmes de la limite qui aura été admise pour la plus faible des pièces à assembler, et que le travail d'arrachement des têtes, s'il s'en produit, ne dépasse pas 3 kilogrammes par millimètre carré en sus de l'effort résultant du serrage.

III. Les calculs justificatifs de la rivure seront toujours fournis à l'appui des projets en même temps que les calculs des dimensions des diverses pièces.

Il en sera de même des calculs des assemblages par boulons dans les ponts en fonte.

Art. 3. — **Qualités du fer et de l'acier auxquelles correspondent les limites de travail du métal fixées par l'article 2.** — Les coefficients de travail du métal fixés ci-dessus pour le fer et l'acier correspondent aux qualités définies par les conditions suivantes :

Digitized by Google

DÉSIGNATION	ALLONGEMENT MINIMUM de rupture par millimètre carré mesuré sur des éprouvettes de 200 millimètres de longueur	RÉSISTANCE MINIMA à la traction par millimètre carré mesurée sur des éprouvettes de 200 millimètres de longueur
Fer laminé. Fer profilé et plat (dans le sens du laminage	8 0/0	32 kilogrammes
Fer laminé. Tôle dans le sens du laminage.	8 0/0	32 —
Fer laminé. Tôle dans le sens perpendiculaire au laminage	3,5 0/0	28 —
Acier laminé	22 0/0	42 —
Rivets en fer	16 0/0	36 —
Rivets en acier	28 0/0	38 —

Les cahiers des charges fixeront pour l'acier le minimum et le maximum entre lesquels devra être compris le rapport de la limite pratique d'élasticité à la résistance à la rupture. Le minimum ne devra pas être inférieur à un demi et le maximum ne devra pas dépasser deux tiers.

Des coefficients de travail plus élevés pourront être autorisés par l'Administration pour des métaux de qualités différentes, si des justifications suffisantes sont produites.

On ne tolérera dans aucun cas l'emploi d'aciers fragiles, et on s'assurera fréquemment, pendant la construction, de la qualité du métal à ce point de vue, au moyen d'essais de trempe et d'expériences faites en pliant des barres percées de trous au poinçon. Les cahiers des charges devront renfermer des prescriptions détaillées à cet égard, sans préjudice des autres conditions relatives aux qualités du métal

Dans tous les cas, lorsqu'on emploiera l'acier, les trous des rivets seront forés ou alésés après le perçage sur une épaisseur d'au moins 1 millimètre, et les bords des pièces coupées à la cisaille seront affranchis sur la même épaisseur.

Art. 4. — **Composition du train-type.** — *Les auteurs des projets de travées métalliques devront justifier, par des calculs suffisamment détaillés, qu'ils ont satisfait aux prescriptions des articles* 1, 2 *et* 3 *qui précèdent.*

En ce qui concerne les fermes longitudinales, ils seront tenus d'examiner l'hypothèse du passage, sur chaque voie, du train-type défini ci-dessous.

Le train-type se composera de deux machines à quatre essieux, de leurs tenders et de wagons chargés. Les poids et dimensions des

Digitized by Google

machines, tenders et wagons chargés sont donnés par le tableau et la figure 383 ci-après.

DÉSIGNATION	MACHINE	TENDER	WAGON CHARGÉ
Nombre d'essieux	4	2	2
Charge par essieu	14 tonnes	12 tonnes	8 tonnes
Distance du tampon d'avant au 1er essieu	2m,60	2m,00	1m,50
Écartement des essieux entre eux	1 ,20	2 ,50	3 ,00
Distance du dernier essieu au tampon d'arrière	2 ,00	2 ,00	1 ,50
Poids total	56 tonnes	24 tonnes	16 tonnes
Longueur totale	8m,80	6m,50	6m,00

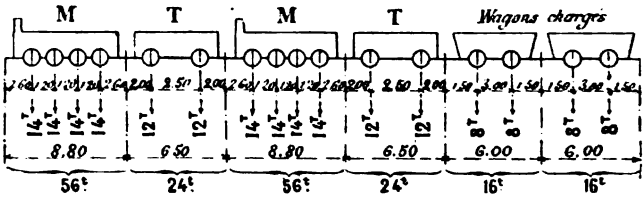


Fig. 383.

Les machines, avec leurs tenders, seront placées toutes deux en tête du train.

L'ensemble du train sera supposé occuper successivement différentes positions le long de la portée, et ces positions seront choisies de manière à réaliser en chaque point les plus grands efforts tranchants et fléchissants que le passage du train-type puisse déterminer.

Les dimensions des pièces qui ne font pas partie des fermes longitudinales, et notamment celles des pièces de pont, seront calculées d'après les plus grands efforts qu'elles pourront avoir à supporter, soit dans l'hypothèse du passage du train-type, soit dans l'hypothèse du passage d'un essieu isolé pesant 20 tonnes, si cette dernière réalise les plus grands efforts.

Art. 5. — **Pression du vent.** — Le travail du métal sous l'influence des plus grands vents ne devra pas dépasser de plus de 1 kilogramme les limites fixées à l'article 2 ci-dessus.

On admettra que la pression du vent par mètre carré de surface verticale peut s'élever à 270 kilogrammes, mais que le passage des trains est interrompu lorsqu'elle atteint 170 kilogrammes. On

Digitized by Google

supposera, en outre, que cette pression s'exerce sur la surface nette, déduction faite des vides, de chacune des maîtresses-poutres, qu'elle agit intégralement sur l'une d'elles et que, sur la suivante, elle est diminuée d'une fraction de sa valeur égale au rapport de la surface nette de la première à la surface totale limitée par son contour; enfin, que l'effet du vent, en arrière de ces deux poutres, est négligeable. Pour les piles métalliques, on supposera que la pression s'exerce intégralement sur la surface nette de toutes les pièces.

Dans l'hypothèse d'un train placé sur le pont, on comptera, pour sa surface verticale nette, un rectangle de 3 mètres de hauteur ayant la même longueur que le pont et dont le côté inférieur sera placé à 50 centimètres au-dessus du rail; on déduira de ce rectangle la surface nette de la partie de la première poutre placée en avant, et on supposera que la pression du vent est nulle sur la partie de la seconde poutre masquée par le train.

Enfin, on s'assurera que les efforts de glissement transversal et de renversement des tabliers et des piles métalliques sous l'action du vent n'atteignent pas des limites dangereuses, en tenant compte des conditions spéciales dans lesquelles pourront être placés les ouvrages et en supposant que le train défini ci-dessus est composé de wagons vides.

Art. 6. — **Pièces travaillant à la compression.** — On s'assurera, autant que possible, que les pièces travaillant à la compression, soit d'une manière continue, soit d'une manière intermittente, ne sont pas exposées à flamber.

Art. 7. — **Calcul des flèches.** — On fournira, à l'appui des projets, le calcul des flèches sous l'action de la charge permanente et sous l'action de la surcharge.

Art. 8. — **Calcul des efforts pendant le lançage.** — Lorsque la mise en place du tablier devra être faite au moyen d'un lançage, on devra justifier que le travail du métal pendant cette opération n'atteindra dans aucune pièce une limite dangereuse.

Art. 9. — Chaque travée métallique sera soumise à deux natures d'épreuves, l'une par poids mort, l'autre par poids roulant.

§ 1. — Composition des trains d'épreuves

Épreuves. — *Ces épreuves seront faites au moyen de trains composés de deux machines attelées en tête et de wagons chargés.*

Poids. — *Les poids des éléments de ces trains se rapprocheront autant que possible de ceux du train-type défini à l'article 4.*

En tous cas ils devront être au moins égaux aux plus forts poids des éléments similaires appelés à circuler sur la voie considérée.

Digitized by Google

Longueurs. — *Les longueurs de ces trains seront fixées comme suit :*

Pour les ponts à travées indépendantes, la longueur mesurée entre les deux essieux extrêmes sera au moins égale à la plus grande portée.

Pour les ponts à travées solidaires, la longueur, mesurée comme ci-dessus, devra être suffisante pour couvrir les deux plus grandes travées consécutives.

§ 2. — Ponts à une seule voie ou à voies indépendantes

Épreuve par poids mort. — *Pour l'épreuve par poids mort : le train d'essai sera placé successivement dans les positions qui produiront les plus grands efforts sur les pièces principales du pont.*

Il suffira, toutefois, en général, d'opérer de la manière suivante :

a) *Pour les ponts à travées indépendantes, le train d'essai sera amené successivement sur chaque travée de manière à la couvrir complètement, puis à en couvrir une moitié seulement, les machines étant placées en tête du train.*

Il séjournera dans chacune de ces positions au moins pendant une demi-heure ;

b) *Pour les ponts à travées solidaires, chaque travée sera d'abord chargée isolément comme il vient d'être dit. A cet effet, le train d'essai sera coupé à la longueur voulue. Ensuite on chargera simultanément les deux travées contiguës à chaque pile à l'exclusion de toutes les autres, au moyen du train d'essai tout entier ;*

c) *Pour les ponts en arcs, on chargera d'abord toute la longueur de la portée, puis chaque moitié seulement et enfin la partie médiane en y plaçant les deux locomotives nez à nez lorsque faire se pourra et réduisant la composition du train à ces deux locomotives.*

Epreuve par poids roulant. — *Les épreuves par poids roulant seront au nombre de deux. Elles seront faites au moyen des mêmes trains qu'on fera circuler sur le pont, d'abord à la vitesse de 20 kilomètres à l'heure, puis à celle de 40 kilomètres à l'heure. Toutefois l'épreuve à la vitesse de 40 kilomètres pourra être ajournée jusqu'à l'époque où la voie aux abords du pont sera suffisamment consolidée.*

§ 3. — Ponts à voies solidaires

Pour les ponts à deux voies solidaires entre elles, l'épreuve par poids mort se fera d'abord sur chaque voie séparément, comme il a été dit au paragraphe précédent, l'autre voie restant libre, puis sur les deux voies simultanément. Il en sera de même pour l'épreuve

Digitized by Google

par poids roulant. L'épreuve simultanée des deux voies se fera dans ce cas au moyen de deux trains marchant dans le même sens, aux vitesses fixées ci-dessus.

§ 4. — Ponts de types exceptionnels

Pour les ponts d'un type exceptionnel, les dispositions des épreuves devront être réglées dans un article spécial du cahier des charges.

A défaut, elles seront arrêtées par l'Administration supérieure, sur la proposition du service chargé du contrôle de la construction, le concessionnaire ou entrepreneur entendu.

§ 5. — Mesure des flèches

Visite. Repères. — *On mesurera, au moment des épreuves, la flèche maxima au milieu de chaque travée, sous l'influence d'abord de la charge immobile, puis de la surcharge en mouvement.*

Lorsque, sur une même ligne, il se trouvera plusieurs ponts, de construction identique, dont l'ouverture ne dépassera pas 10 mètres, la mesure des flèches pourra n'être faite que pour l'un d'entre eux.

Immédiatement après les épreuves de chaque pont, la partie metallique sera visitée dans tous ses détails.

En outre, pour les ponts d'une ouverture supérieure à 10 mètres, les niveaux des points les plus bas des sections des poutres ou des arcs, au milieu de chaque travée et à ses extrémités, seront repérés avant les épreuves à deux points fixes choisis de manière à permettre de constater, après l'enlèvement de la surcharge, et ensuite à une époque quelconque, les déformations qui se seraient produites ; on repérera par rapport aux mêmes points le dessus de chacun des appuis. Le procès-verbal des épreuves contiendra les renseignements nécessaires pour permettre de retrouver ultérieurement ces repères.

Art. 10. — **Dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien.** — On s'attachera à rendre faciles la visite, la peinture et la réparation des parties métalliques, et on fera connaître dans les mémoires à l'appui des projets les mesures prises à cet effet.

Art. 11. — **Distances au rail le plus voisin des pièces les plus rapprochées de la voie.** — Les pièces les plus rapprochées de la voie ne pourront, à partir de 50 centimètres jusqu'à 4^{m},05 de hauteur au-dessus du rail le plus voisin, être placées à moins de 1^{m},50 de

Digitized by Google

l'axe de ce rail. Les pièces placées à une distance moindre ne pourront, à la partie inférieure, *jusqu'à 80 centimètres de l'axe du rail le plus voisin, faire saillie sur le niveau de ce rail, et, à partir de 80 centimètres du même axe, dépasser une ligne brisée (fig. 384) composée : 1° d'une verticale de 25 centimètres de hauteur ; 2° d'une horizontale de 325 millimètres de longueur ; 3° d'une ligne inclinée à 3 de base pour 2 de hauteur ; à la partie supérieure, les mêmes pièces devront rester au-dessus d'une ligne s'abaissant avec une inclinaison de 2 de base pour 1 de hauteur à partir d'un point pris à l'aplomb de l'axe du rail le plus voisin et à 4m,80 au-dessus de ce rail. Aucune pièce placée au-dessus des voies ou entrevoies ne pourra être à moins de 4m,80 de hauteur au-dessus du niveau des rails.*

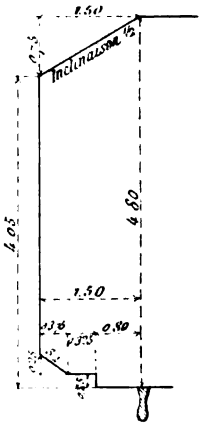


Fig. 384.

Art. 12. — **Limite du poids des machines qui pourront circuler sur les ponts sans autorisation préalable.** — La mise en circulation, sur les ponts, de machines dont le poids moyen par mètre courant dépasserait de plus de un dixième celui de la machine-type déterminée à l'article 4 ci-dessus, ou dont un des essieux aurait à supporter une charge supérieure à 18 tonnes, ne pourra avoir lieu qu'en vertu d'une autorisation spéciale du ministre des travaux publics.

II. — VOIES ÉTROITES

Art. 13. — **Ponts pour les chemins de fer à voie de 1 mètre et au-dessus.** — Les prescriptions relatives aux ponts pour chemins de fer à voie normale sont applicables aux chemins de fer à voie étroite, dont la largeur ne sera pas inférieure à 1 mètre, sauf les modifications indiquées ci-dessous.

Le poids par essieu des machines du train-type (art. 4) sera réduit à $10^t \times l$, l étant la largeur de la voie entre les bords intérieurs des rails. Les dimensions des machines et les poids et dimensions des wagons seront les mêmes que pour la voie normale, et les tenders seront supposés avoir les mêmes poids et les mêmes dimensions que les wagons chargés (*fig.* 385).

Pour le calcul du travail du métal sous l'action d'un essieu isolé, on admettra une charge de $14^t \times l$.

La seconde épreuve par poids roulant (art. 9) sera faite à la vitesse de 35 kilomètres à l'heure.

Digitized by Google

Le contour à l'intérieur duquel aucune pièce de ponts ne devra faire saillie (art. 11) sera déterminé, dans chaque cas, en tenant compte des minima de largeur et de hauteur autorisés, pour les ouvrages d'art, sur la ligne à laquelle appartiendra le pont à construire.

La charge d'essieu maxima, dont le passage ne pourra avoir lieu sur les ponts sans autorisation spéciale (art. 12), sera fixée à $12^t \times l$, l étant la largeur de la voie entre les bords intérieurs des rails.

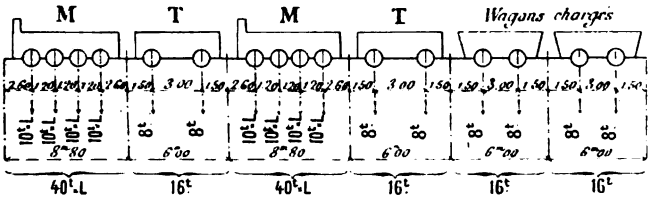


Fig. 285.

Les trains à employer aux épreuves seront composés avec le plus lourd matériel propre à la ligne sur laquelle est placé le pont métallique.

Art. 14. — **Ponts pour chemins de fer à voie de largeur inférieure à 1 mètre.** — Les conditions auxquelles devront satisfaire les ponts supportant des voies de chemins de fer de moins de 1 mètre de largeur seront déterminées, dans chaque cas, sur la proposition du concessionnaire, par le ministre des travaux publics, en tenant compte des poids et des dimensions des machines appelées à circuler sur l'ouvrage.

CHAPITRE II. — PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE TERRE

Art. 15. — **Conditions à remplir.** — Les ponts à travées métalliques qui portent des voies de terre devront être en état de livrer passage à toute voiture dont la circulation est autorisée par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage et des messageries, c'est-à-dire aux voitures attelées au maximum de cinq chevaux si elles sont à deux roues, et de huit chevaux si elles sont à quatre roues.

Art. 16. — **Limites de travail du métal.** — Les dimensions des différentes pièces de ponts seront calculées dans les conditions fixées à l'article 2, sauf la substitution au train-type des surcharges définies à l'article 17 ci-dessous.

Digitized by Google

Art. 17. — **Surcharges à adopter pour le calcul.** — On s'assurera que le travail du métal par millimètre carré dans chaque pièce ne dépasse pas les limites fixées à l'article 2 ci-dessus :

1° Sous l'action d'une surcharge uniformément répartie de 400 kilogrammes par mètre carré sur toute la largeur de l'ouvrage, y compris les trottoirs :

2° Sous le passage de tombereaux à un essieu, traînés par deux chevaux et formant autant de files continues que le comportera la largeur de la chaussée (*fig.* 386). On admettra, pour faire ce calcul, que les trottoirs sont surchargés uniformément à raison de 400 kilogrammes par mètre carré, et que les tombereaux et leurs attelages ont les poids et dimensions suivants :

Tombereaux....	Poids.....	6 tonnes
	Longueur (non compris les brancards).	3m,00
	Largeur de voie.....	1m,70
	Largeur de chaussée occupée.....	2m,25
Chevaux.....	Poids.....	700 kil.
	Longueur (y compris les traits et brancards).....	2m,50

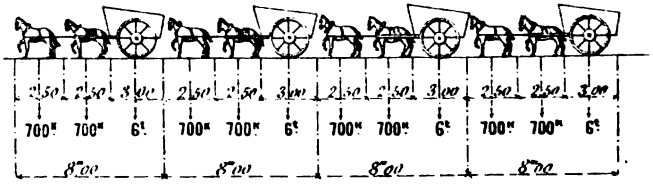


Fig. 386.

On s'assurera que le travail du métal par millimètre carré, dans chaque pièce, ne dépasse pas de plus d'un kilogramme les limites fixées à l'article 2, dans le cas où l'on substituerait à l'un des tombereaux un véhicule pesant 11 tonnes, ayant les mêmes dimensions et traîné par cinq chevaux sur une seule file, et, dans le cas où ces tombereaux seraient remplacés, sur toute la surface du tablier du pont, par des chariots à deux essieux traînés par huit chevaux sur deux files (*fig.* 387), ayant les poids et dimensions suivants :

Digitized by Google

Chariots....	Poids sur chaque essieu.....	8 tonnes
	Longueur.....	6m,00
	Largeur de la voie.....	1m,70
	Écartement des essieux.....	3m,00
	Distance du premier essieu à l'avant du chariot.....	1m,50
	Distance du second essieu à l'arrière du chariot.....	1m,50
	Largeur de chaussée occupée.....	2m,25
Chevaux....	Poids....	700 kil.
	Longueur (y compris les traits et brancards)	2m,50

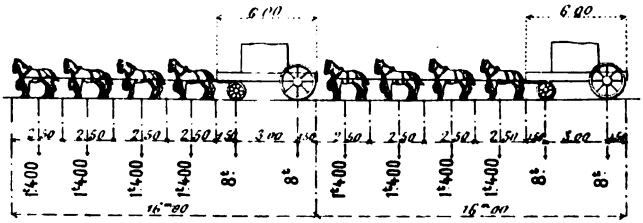


Fig. 387.

Lorsqu'il s'agira d'ouvrages à établir sur des routes à fortes pentes, placées dans des conditions telles que la circulation des charges indiquées ci-dessus ne puisse pas être considérée comme possible dans le présent ni dans l'avenir, l'Administration se réserve d'autoriser l'emploi, dans les calculs, de charges moindres qui seront déterminées d'après les circonstances locales. Dans aucun cas, la charge uniformément répartie ne pourra descendre au-dessous de 300 kilogrammes par mètre carré, et les autres charges indiquées ci-dessus ne pourront être réduites de plus de moitié.

Art. 18. — **Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des flèches, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance. — Epreuves.** — Les prescriptions des articles 5, 6, 7, 8 et 10 ci-dessus sont applicables aux ponts pour voies de terre. Toutefois, pour le calcul des efforts résultant de l'effet du vent (art. 5), il ne sera pas tenu compte de la présence possible de véhicules sur le pont.

Art. 19. — Chaque travée métallique sera soumise à deux natures d'épreuves : l'une par poids mort, l'autre par poids roulant.

Composition des surcharges d'épreuve. — *Pour l'épreuve par poids mort, la surcharge d'épreuve sera de 400 kilogrammes par mètre carré de tablier, trottoirs compris.*

Digitized by Google

Pour l'épreuve par poids roulant, les véhicules seront disposés en files continues et devront se rapprocher, autant que possible, comme poids et écartement des essieux, de ceux désignés pour types dans le troisième alinéa de l'article 17. *En tous cas, ces véhicules devront représenter avec leurs attelages une charge minima de* 400 *kilogrammes par mètre carré, en prenant* 2m,25 *pour largeur de la zone occupée.*

Longueur des files de voitures. — *Les longueurs des files de voitures seront fixées comme suit :*

Pour les ponts à travées indépendantes et pour les ponts en arcs, la longueur sera au moins égale à la plus grande portée.

Pour les ponts à travées solidaires, la longueur devra être suffisante pour couvrir les deux plus grandes travées consécutives.

Nombre des files de voitures. — *Le nombre des files de voitures devra être égal au quotient de la largeur de la chaussée par le nombre* 2m,25. *Toutefois, ce nombre pourra être réduit quand il y aura difficulté à réunir assez de véhicules pour constituer toutes les files, mais il devra être suffisant pour couvrir au moins la moitié de la largeur du tablier; le surplus de cette largeur sera alors occupé par une surcharge à poids mort de* 400 *kilogrammes par mètre carré, répartie de chaque côté des files.*

Epreuve par poids mort. — *Il sera procédé aux épreuves par poids mort de la manière suivante :*

Pour les ponts à travées indépendantes, la surcharge sera étendue successivement d'une extrémité à l'autre, avec interruption d'une demi-heure au moment où la surcharge aura atteint la moitié de la portée. Lorsque la totalité de la travée aura été couverte, la surcharge devra demeurer en place pendant une demi-heure.

Pour les ponts à travées solidaires, chaque travée sera d'abord chargée isolément comme il vient d'être dit ci-dessus, puis on chargera simultanement les travées contiguës à chaque pile, à l'exclusion de toutes les autres.

Pour les ponts en arc, chaque travée sera chargée sur la totalité de sa portée, ensuite sur chaque moitié, et, enfin, dans la partie médiane seulement.

Epreuve par poids roulant. — *On procédera aux épreuves par poids roulant en faisant circuler au pas les files de voitures d'une extrémité à l'autre du pont.*

On fera passer, en outre, sur le pont, un véhicule comprenant au moins un essieu chargé de 11 *tonnes.*

Tempéraments aux surcharges d'épreuve. — *Lorsque, dans le cas prévu par le dernier alinéa de l'article* 17, *les surcharges ayant servi à faire les calculs auront été réduites, les surcharges à employer pour faire les épreuves seront réduites dans la même proportion.*

Les règles fixées par l'article 9 *pour les épreuves des ponts d'un*

Digitized by Google

type exceptionnel, ainsi que pour les constatations à faire pendant et après les épreuves, et enfin pour les mesures à prendre en vue des vérifications ultérieures, sont applicables aux ponts supportant des voies de terre.

Chargements exceptionnels. — *Le passage, sur le tablier du pont, de chargements notablement supérieurs à ceux qui auront été adoptés dans les calculs relatifs à la stabilité de l'ouvrage, ne pourra avoir lieu qu'en vertu d'une autorisation spéciale donnée par le préfet, conformément au rapport de l'ingénieur en chef.*

CHAPITRE III. — PONTS-CANAUX MÉTALLIQUES

Art. 20. — **Conditions à remplir.** — Les ponts-canaux devront être en état de recevoir la charge d'eau correspondant au mouillage normal, augmenté de 30 centimètres.

Art. 21. — **Limites du travail du métal.** — Les dimensions des différentes pièces des ponts-canaux seront calculées de manière à ce que le travail du métal par millimètre carré de section nette, déduction faite des trous de rivets, ne dépasse nulle part $8^{kg},50$ pour le fer et $11^{kg},50$ pour l'acier.

Art. 22. — **Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance.** — Les prescriptions des articles 5, 6, 8 et 10 sont applicables aux ponts-canaux. Pour l'application de l'article 5, on tiendra compte de la présence de la bâche ainsi que de celle des bateaux sur l'ouvrage; le calcul sera fait en admettant une pression de 270 kilogrammes par mètre carré de surface verticale; la surface des bateaux exposée au vent sera comptée pour un rectangle de $1^{m},50$ de hauteur au-dessus de la bâche, ayant la même longueur que le pont.

Art. 23. — **Calcul des flèches.** — On fournira, à l'appui des projets, le calcul des flèches sous l'action du poids propre du pont et sous l'action de la surcharge d'eau prévue à l'article 20.

Art. 24. — **Epreuves.** — L'épreuve des ponts-canaux consistera dans la mesure des flèches avant et après le remplissage au maximum de hauteur fixé par l'article 20.

Immédiatement après les épreuves, l'ouvrage sera visité dans toutes ses parties; en outre, on repérera à deux points fixes, avant l'épreuve, les niveaux des points les plus bas des sections des poutres et des axes au milieu de chaque travée et à ses extrémités, de manière à pouvoir, après la mise en charge et à une époque quelconque, mesurer les déformations qui se seraient produites; on repérera, par rapport aux mêmes points, le dessus de chacun des appuis. Le procès-verbal des épreuves contiendra les

Digitized by Google

renseignements nécessaires pour permettre ultérieurement de retrouver ces repères.

CHAPITRE IV. — DISPOSITIONS DIVERSES

Art. 25. — **Contrôle des épreuves.** — Pour les ouvrages construits ou entretenus par des concessionnaires, les épreuves seront faites en présence d'un ingénieur chargé du contrôle ; les procès-verbaux détaillés, dont elles devront être l'objet, seront dressés dans la forme qui sera prescrite par l'Administration.

Art. 26. — **Dérogation aux prescriptions du règlement.** — L'Administration se réserve d'apprécier les cas exceptionnels qui pourraient motiver des dérogations quelconques aux prescriptions du présent règlement.

Digitized by Google

INSTRUCTIONS POUR L'APPLICATION DU RÈGLEMENT RELATIF AUX ÉPREUVES DES PONTS MÉTALLIQUES

(CIRCULAIRE DU 29 AOUT 1891)

La circulaire ministérielle du 9 juillet 1877 a déterminé les épreuves à faire subir aux ponts métalliques supportant les voies de chemins de fer ainsi qu'à ceux établis pour le passage des voies de terre.

L'art des constructions métalliques ayant subi, depuis lors, des changements importants, une Commission spéciale composée d'inspecteurs généraux et d'ingénieurs des Ponts et Chaussées a été chargée de rechercher les modifications qu'il y avait lieu d'apporter aux prescriptions de la circulaire précitée.

Sur le rapport de cette Commission, et après une discussion approfondie, le Conseil général des Ponts et Chaussées a adopté un projet de règlement déterminant les conditions auxquelles doivent désormais satisfaire les ponts métalliques.

Le règlement dont il s'agit ayant été approuvé, les instructions suivantes sont destinées à en indiquer le but et à en faciliter l'application.

CHAPITRE I. — PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE FER

I. — VOIES DE LARGEUR NORMALE

ARTICLE PREMIER. — L'adoption d'un train-type a pour objet d'uniformiser les conditions d'établissement des ponts métalliques et de mettre leur résistance en rapport avec les plus fortes charges qui soient actuellement appelées à circuler sur les chemins de fer français. C'est ce train qui devra servir de base aux calculs. Toutefois il y aura lieu de substituer aux machines et wagons-types les machines et wagons en service sur le réseau auquel appartiendra l'ouvrage à construire, dans les cas exceptionnels où il résultera de cette substitution une augmentation des efforts supportés par les différentes pièces de l'ouvrage.

ART. 2. — Les coefficients du travail de la fonte sont fixés surtout en vue de la vérification des efforts supportés par les ouvrages existants; pour les constructions neuves, l'emploi de ce métal,

Digitized by Google

lorsqu'il sera exposé à travailler à l'extension, ne devra être admis que dans des cas tout à fait exceptionnels.

Les règles fixées pour le fer et l'acier ont été établies de façon à réduire d'une manière générale les limites du travail du métal en raison des variations du sens et de la grandeur des efforts qu'il est appelé à supporter; mais elles ne tiennent pas compte des différences qui peuvent se produire, à ce point de vue, entre les divers points des plates-bandes d'une même poutre, et qui, eu égard aux règles habituellement suivies pour les constructions métalliques, ne peuvent entraîner des inégalités de résistance inquiétantes.

Il appartiendra d'ailleurs aux ingénieurs, lorsqu'ils le jugeront utile, de déterminer ces différences par une analyse détaillée et de faire varier en conséquence les limites du travail du métal. Pour fixer ces limites, ils pourront faire usage des formules suivantes, dont les résultats sont suffisamment d'accord avec les données de la pratique :

1° Lorsque les efforts correspondants pour la même pièce aux différentes positions des surcharges seront toujours de même sens (extension ou compression) :

Pour le fer..... $6^k + 3^k \frac{A}{B}$

Pour l'acier..... $8^k + 4^k \frac{A}{B}$

(A représentant le plus petit et B le plus grand des efforts auxquels la pièce est exposée).

2° Lorsque le sens des efforts totaux correspondant pour la même pièce aux différentes positions de la surcharge variera selon ses positions (extension et compression alternatives) :

Pour le fer..... $6^k - 3^k \frac{C}{B}$

Pour l'acier..... $8^k - 4^k \frac{C}{B}$

B représentant le plus grand des efforts supportés par la pièce, et C le plus grand des efforts en sens contraire).

Ces formules sont données à titre de simple indication et ne limitent en rien l'initiative des ingénieurs, qui pourront employer telle méthode qu'ils jugeront convenable.

Les coefficients fixés à l'article 2 ne sont applicables aux pièces comprimées directement que lorsque celles-ci seront assez courtes pour qu'il n'y ait pas lieu de les renforcer en vue d'éviter qu'elles puissent fléchir sous l'action de la charge. Dans le cas contraire, on devra tenir compte des prescriptions de l'article 6 et diminuer en conséquence, le travail du métal.

Digitized by Google

Les ingénieurs ne perdront pas de vue les efforts supplémentaires qui pourront résulter de la répartition dissymétrique des charges, notamment dans les ponts biais et dans ceux sur lesquels la voie est en courbe.

L'évaluation des sections nettes et, par suite, le calcul définitif des efforts supportés par les différentes pièces, doivent être faits seulement lorsque la position des joints des tôles aura été arrêtée et après la détermination du nombre, du diamètre et de la position des rivets.

Le soin de déterminer le rapport entre le diamètre des rivets et l'épaisseur des pièces à assembler est laissé aux ingénieurs, qui se guideront d'après les données de la pratique.

Art. 3. — Il n'a pas paru nécessaire de déterminer la qualité de la fonte à laquelle correspondent les coefficients fixés à l'article 2; cette détermination est, au contraire, indispensable pour l'acier, dont les propriétés peuvent varier dans des limites très étendues, et même pour le fer, dont la résistance et surtout la ductilité sont parfois insuffisantes pour inspirer une sécurité complète. Les qualités définies par le règlement sont celles des métaux dont l'emploi peut être considéré comme normal dans la construction des ponts; mais, notamment en ce qui concerne l'acier, le choix qui en a été fait pour fixer les coefficients usuels n'est pas un obstacle à l'emploi d'un métal de qualité différente dans les cas où il sera justifié. Dans l'état actuel de la métallurgie, il est possible d'élever jusqu'à 55 kilogrammes la résistance de l'acier avec un allongement de 19 0/0 sans qu'il cesse de remplir les conditions nécessaires pour la construction des ponts, et l'augmentation de la résistance permet d'élever proportionnellement la limite des efforts normaux par millimètre carré. Mais, à mesure que la dureté de l'acier augmente, des précautions plus minutieuses sont nécessaires dans la fabrication pour que son emploi soit exempt de tout danger, et la rédaction des projets est d'autant plus délicate qu'on adopte des coefficients de travail plus élevés; aussi l'Administration se réserve-t-elle de n'autoriser de dérogations à la règle générale que dans les cas où elles seront justifiées par l'importance de l'ouvrage et lorsque les conditions dans lesquelles celui-ci devra être construit offriront des garanties suffisantes au point de vue de l'exécution.

Les cahiers des charges devront, dans tous les cas, renfermer l'énumération des conditions nécessaires pour assurer l'emploi de matériaux de bonne qualité et l'exécution des travaux selon les règles de l'art. Le but de l'article 3 est de définir les qualités du métal auxquelles correspondent les coefficients indiqués à l'article 2, et d'éviter les dangers que l'emploi de l'acier a quelquefois présentés; ses prescriptions ne sauraient être considérées comme suffisantes pour empêcher les malfaçons aussi bien dans la fabrication du métal que dans sa mise en œuvre.

Digitized by Google

Art. 4. — Les poids, les dimensions et le groupement des machines, tenders et wagons définis à l'article 4 ont été choisis de manière à donner au train-type une composition qui se rapproche, autant que possible, de celle des trains les plus lourds formés avec le matériel actuellement en service sur les principaux réseaux.

Les efforts que les ponts auront à supporter normalement ne dépasseront donc pas, en général, ceux qui correspondront au passage du train-type ; ils pourront leur être supérieurs si les machines et tenders sont groupés différemment, ou s'il existe dans le train des wagons vides; mais l'augmentation de travail du métal qui en résultera n'atteindra jamais 1 kilogramme par millimètre carré, et les coefficients fixés par l'article 2 ont été établis de manière à permettre sans danger, dans cette limite, une augmentation exceptionnelle des efforts. On pourra donc se borner à faire les calculs au moyen du train-type, sous la réserve énoncée ci-dessus à propos de l'article premier.

L'Administration entend laisser aux ingénieurs une entière liberté en ce qui concerne le choix des méthodes employées pour faire les calculs; la seule obligation qu'elle leur impose est de déterminer avec une exactitude suffisante la limite des efforts supportés par chacune des pièces qui composent l'ouvrage dans les conditions définies par l'article 4. Ainsi on pourra, si on le juge utile, faire usage pour le calcul des moments fléchissants, *ainsi que pour celui des efforts tranchants, de surcharges virtuelles uniformément réparties, sauf à justifier que ces surcharges produisent des efforts supérieurs ou au moins égaux à ceux qui seraient déterminés en chaque point par le passage du train-type.*

Quelle que soit la méthode employée, les résultats des calculs devront être groupés dans des épures, de manière à faire ressortir la loi des variations des efforts dans les différentes pièces de l'ouvrage et à faciliter les vérifications.

Art. 5. — Les pressions maxima dues à l'effort du vent, qui sont fixées par l'article 5, sont celles qui sont généralement admises par les constructeurs; elles sont suffisantes pour donner toute sécurité dans les conditions ordinaires. Il appartiendra aux ingénieurs de proposer l'adoption de pressions plus fortes pour les ouvrages qui seront à construire à une grande hauteur ou dans le voisinage de la mer ; ils pourront, au contraire, pour les ponts convenablement abrités, tenir compte de la diminution de l'intensité du vent qui résultera des circonstances locales. Ils auront également à déterminer, d'après le mode de construction des supports et le système d'attache des sommiers et des palées aux maçonneries, quelle est la limite à partir de laquelle les efforts de glissement transversal et de renversement des tabliers et des piles métalliques devront être considérés comme dangereux.

Il y aura lieu de calculer, pour les grands ouvrages, non seule-

Digitized by Google

ment les efforts horizontaux, mais aussi l'augmentation des efforts verticaux qui peut résulter, pour certaines pièces, de l'inégale répartition des charges entre les deux files de rails sous l'action du vent.

Art. 6. — Les vérifications relatives au flambage devront être faites pour la fonte comme pour le fer et l'acier.

Lorsqu'on aura recours à des formules de la forme $R' = KR$, dans lesquelles R' représente le coefficient de travail à adopter pour la pièce considérée, et R le coefficient de travail correspondant à une longueur très petite, on prendra uniformément pour R, dans les pièces soumises à des efforts de sens variables, 6 kilogrammes pour le fer et 8 kilogrammes pour l'acier; on substituera la valeur ainsi trouvée pour R' au coefficient calculé au moyen des règles fixées à l'article 2, s'il en résulte une augmentation de la section de la pièce considérée, à moins que l'on ne modifie la forme des pièces ou leur disposition, de manière à accroître la résistance au flambage.

Art. 7. — Dans le calcul des flèches, on *pourra* faire entrer les poids et les dimensions des machines et wagons *du train d'épreuve, au lieu des éléments similaires du train-type, mais seulement dans le cas où la composition du train d'épreuve pourrait être établie à l'avance avec une entière certitude.*

Art. 8. — La limite des efforts que les tabliers métalliques peuvent subir sans danger pendant le lançage est laissée à l'appréciation des ingénieurs; cette limite peut, en effet, varier selon la constitution des ouvrages et selon les conditions dans lesquelles ils seront mis en place. La présence de montants verticaux, dans les poutres à treillis ou à croix de Saint-André, les moyens employés pour consolider les parties faibles, la durée du lançage, etc., sont autant d'éléments dont il y a lieu de tenir compte et que les ingénieurs auront à examiner avant d'arrêter leurs propositions.

Art. 9. — Les longueurs de trains d'épreuve *et leurs positions* ne sont fixées que pour les ponts à poutres droites et les ponts en arcs. Pour les *ponts de types exceptionnels*, les ingénieurs auront à déterminer, dans chaque cas, la longueur de train la plus convenable pour produire sur les principales pièces des efforts aussi rapprochés que possible de ceux qui auront été donnés par le calcul.

Les positions à donner aux trains d'épreuves seront déterminées d'après la portée et la constitution des poutres; elles seront, dans tous les cas, choisies de manière à produire les plus grands efforts, non seulement sur les plates-bandes [1], mais sur les treillis.

L'épreuve par poids roulant à la vitesse de 40 kilomètres devra

[1] Les plates-bandes sont aussi désignées sous les noms de bandes, semelles, tables, membrures, cordes ou brides.

Digitized by Google

être supprimée lorsque les circonstances locales (voisinage de plaques tournantes dans une gare, insuffisance du rayon des courbes, etc.) l'exigeront.

On devra prendre les dispositions nécessaires pour que les flèches puissent être mesurées et vérifiées à toute époque, dans des conditions satisfaisantes de précision ; on établira, au besoin, des plates-formes spéciales pour faciliter les opérations de nivellement ; on placera des repères fixes non seulement sur les piles et culées lorsqu'elles seront exposées à des tassements, mais en dehors de l'ouvrage ; enfin, lorsqu'il y aura lieu, on devra faire subir aux flèches observées les corrections nécessaires pour tenir compte de l'influence variable de la température sur les arcs, et on s'efforcera d'éliminer, dans les poutres droites, les erreurs résultant de la différence de dilatation entre les bandes supérieure et inférieure. On évitera, à cet effet, de prolonger chacune des épreuves au delà du temps nécessaire pour que les déformations normales puissent se produire, et on choisira de préférence les premières heures du jour ou un temps couvert pour faire les nivellements destinés à la mesure des flèches permanentes.

Les niveaux des points les plus bas, au milieu et aux extrémités de chaque pont, pourront être relevés directement, pourvu qu'ils soient rattachés, par une mesure facile à effectuer sans erreur, à ceux des points qu'on aura choisis comme intermédiaires.

On mesurera séparément la flèche de chaque poutre, et pour les grandes portées, notamment lorsque les semelles ne seront pas parallèles, on mesurera les abaissements de points intermédiaires entre le milieu de la travée et chaque appui.

Le rapport à l'appui du procès-verbal des épreuves fournira la comparaison des flèches observées avec celles *données par le calcul.*

A cet effet, le calcul des flèches sous l'action du train d'épreuve devra toujours être annexé au procès-verbal d'épreuve. Ce procès-verbal sera classé dans un dossier destiné à recevoir aussi les résultats des constatations ultérieures.

Les épreuves réglementaires ne doivent pas dispenser d'une surveillance attentive des ponts pendant les premiers mois qui suivent leur mise en service, notamment en ce qui concerne le jeu des appareils de dilatation et, pour les poutres à travées solidaires, l'invariabilité du niveau des appuis.

Art. 10. — Les prescriptions de l'article 10 s'appliquent à la fois à la disposition des fers et aux installations spéciales destinées à donner un accès aux différentes parties de la construction; on devra chercher à rendre les principales pièces accessibles sans échafaudages spéciaux et sans qu'il soit nécessaire de circuler le long des poutres dans des conditions dangereuses.

Art. 11. — Le contour fixé par l'article 11 a été déterminé en vue de réserver aux goussets, consoles, etc., un espace aussi grand

Digitized by Google

que possible, sans que les ponts métalliques présentent au passage des trains des obstacles plus rapprochés de la voie que les autres ouvrages d'art; on devra, en outre, tenir compte, dans l'étude des projets, de la nécessité de ménager aux agents circulant à pied sur la voie les moyens de se garer d'une manière facile et sûre.

Art. 12. — La réserve formulée dans l'article 12 n'a pas pour but de limiter les poids des machines; mais elle empêchera que les ouvrages soient exposés à recevoir des surcharges en vue desquelles ils n'auront pas été calculés, sans qu'on ait déterminé, au préalable, le maximum des efforts qu'elles imposeraient au métal.

II. — VOIES ÉTROITES

Art. 13. — Sauf en ce qui concerne les poids et les dimensions des machines et des wagons, les épreuves par poids roulant et le contour intérieur limite, les conditions imposées pour la construction des ponts métalliques sont les mêmes pour les lignes à voies étroites que pour les lignes à voie normale, tant que la largeur de la voie ne descend pas au-dessous de 1 mètre.

Art. 14. — Pour les ouvrages destinés à supporter des voies de largeur inférieure à 1 mètre, les conditions seront déterminées dans chaque cas particulier; on ne perdra pas de vue, dans les propositions à faire à ce sujet, que la diminution de largeur de la voie ne saurait être un motif pour restreindre les garanties de sécurité et que, si les règles posées précédemment à ce sujet peuvent être atténuées, c'est seulement dans le cas où il s'agira de lignes industrielles destinées exclusivement au transport des marchandises.

CHAPITRE II. — PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE TERRE

Art. 15. — Les prescriptions de l'article 15 sont applicables à tous les ponts métalliques pour voie de terre destinés à supporter le passage des voitures.

Art. 16. — Les conditions fixées pour les efforts à faire supporter aux différentes pièces sont les mêmes que celles qui sont relatives aux ponts supportant des voies de fer.

Art. 17. — Les bases fixées pour les calculs par l'article 17 ont été établies seulement en vue de la circulation normale sur les routes. Lorsqu'un pont pourra être appelé à recevoir des chargements exceptionnels, tels que ceux qui sont nécessités par certains transports industriels ou militaires, il y aura lieu d'en tenir

Digitized by Google

compte dans les calculs. De même, dans le cas où une voie de fer comportant l'emploi de locomotives ou de machines d'un poids équivalent devra être établie sur la route, on appliquera les prescriptions des articles 13 et 14.

Lorsque les ingénieurs seront amenés à proposer l'adoption de surcharges inférieures aux surcharges réglementaires, ils devront tenir compte de la possibilité de la rectification des routes dans la région, de l'amélioration progressive des moyens de transport, de l'extension croissante de l'emploi des rouleaux compresseurs à vapeur, etc.

Art. 18. — Les observations faites précédemment au sujet des articles 5, 6, 7, 8 et 10 sont applicables aux ponts métalliques pour voies de terre.

Art. 19. — *Les épreuves par poids mort sont définies d'une manière précise dans l'article 19 du règlement pour tous les ponts d'un type courant.*

Pour les ponts d'un type exceptionnel, les ingénieurs auront à se rendre compte, lors de la rédaction des projets, de la longueur des surcharges d'épreuve et des emplacements qu'elles doivent successivement occuper en vue de développer les efforts maxima dans les différents organes de la construction. Ils indiqueront dans un article du cahier des charges les dispositions qui leur paraîtront devoir être prescrites, tant pour les épreuves par poids mort que pour les épreuves par poids roulant.

La faculté qui est donnée de remplacer par un poids mort de 400 kilogrammes par mètre carré, sur la moitié de la largeur de la chaussée, une ou plusieurs files de voitures dans l'épreuve par poids roulant, ne fait pas obstacle à ce que ladite épreuve soit faite exclusivement par poids roulant, si on n'éprouve pas de difficulté sérieuse à réunir le nombre de véhicules convenable pour couvrir toute la largeur de la chaussée sur la longueur voulue.

CHAPITRE III. — PONTS-CANAUX

Art. 20. — La hauteur de 0m,30 d'eau au-dessus du mouillage normal devra être augmentée, pour le calcul des ponts, dans les cas exceptionnels où, pour une raison quelconque, il y aurait lieu de prévoir des variations plus étendues du niveau de l'eau dans le bief.

Art. 21. — Dans le cas où certaines pièces seraient, par leur position, exposées particulièrement à être oxydées, leur épaisseur devrait être augmentée en conséquence.

Art. 22. — Les observations relatives aux articles 5, 6, 8 et 10 sont applicables aux ponts-canaux métalliques.

Digitized by Google

Art. 23. — On devra tenir compte, en ce qui concerne le calcul des flèches, de la réserve faite plus haut relative aux cas exceptionnels dans lesquels il y aurait lieu de prévoir une surélévation de l'eau supérieure à 0m,30.

Art. 24. — Les observations relatives à l'article 9 concernant la mesure des flèches permanentes, la pose des repères, etc..., sont applicables aux ponts-canaux.

Digitized by Google

INSTRUCTIONS POUR LA SURVEILLANCE ET L'ENTRETIEN DES PONTS MÉTALLIQUES

(CIRCULAIRE DU 29 AOUT 1891)

1° PRESCRIPTIONS GÉNÉRALES

I. *Entretien et visite périodique.* — La surveillance et l'entretien des ponts métalliques doivent être l'objet de soins incessants toute avarie susceptible de s'aggraver ou de compromettre la sécurité doit être réparée sans délai. On doit refaire aussi fréquemment qu'il est nécessaire, pour les préserver de la rouille, la peinture des parties vues et autant que possible des parties cachées.

Indépendamment d'une visite annuelle portant principalement sur l'état de la rivure, les ponts métalliques seront soumis au moins une fois tous les cinq ans, et, dans tous les cas, chaque fois qu'on refera la peinture, à une inspection détaillée et à une vérification des flèches permanentes[1]. Dans chacune de ces inspections, on vérifiera l'état des pièces, le serrage des boulons et des rivets, le jeu des appareils de dilatation et l'état des maçonneries qui les supportent, enfin, pour les ponts à travées solidaires, le nivellement des appuis.

La vérification des flèches permanentes pourra être supprimée pour les ponts dont l'ouverture ne dépassera pas 10 mètres; mais la visite annuelle et l'inspection périodique devront être faites pour tous les ouvrages métalliques sans exception.

Pour les ponts dont l'entretien est confié à des compagnies de chemins de fer ou autres concessionnaires, les inspections périodiques et la vérification des flèches seront faites en présence de l'ingénieur du contrôle ou d'un agent délégué par lui.

La première visite périodique et la première vérification des flèches devront être faites avant le 1er janvier 1893 pour tous les ouvrages existants.

II. *Dossiers des ponts métalliques.* — Il sera formé pour chaque

[1] La circulaire du 16 novembre 1901, après avoir constaté que la vérification quinquennale exigée par la circulaire du 29 août 1891 entraîne, pour les agents qui en sont chargés, dans l'année où elle a lieu, un travail considérable et surtout un surcroît de frais de déplacements auxquels il est difficile de faire face au moyen des crédits annuels, prescrit qu'il soit procédé, chaque année, à une vérification portant sur le cinquième du nombre total des ouvrages métalliques établis pour le passage des voies de fer ou de terre.

Digitized by Google

pont métallique *qui sera construit dans l'avenir, et autant que possible pour ceux existants*, un dossier dans lequel seront groupés tous les renseignements relatifs à cet ouvrage.

L'ensemble de ces dossiers formera une liasse spéciale dans chaque bureau d'ingénieur ordinaire.

Chaque dossier comprendra :

1° L'historique de l'ouvrage (nature et provenance du métal, nom du constructeur, procédé de montage, mode de construction des appuis, résultats des épreuves, réparation des piles, des culées, des supports et du tablier, modifications en cours d'entretien, accidents, etc.) ;

2° Les bases et les résultats des calculs qui ont servi à l'exécution ;

3° Les diagrammes des poutres et des pièces de pont, des longerons, des contreventements, etc., avec des croquis à l'appui, ou mieux, lorsque cela sera possible, les dessins de l'ouvrage ;

4° Les procès-verbaux des visites détaillées, des épreuves et des vérifications de flèches.

Les dossiers des ponts métalliques seront tenus constamment à jour ; pour les ponts dont l'entretien est confié à des compagnies de chemins de fer ou autres concessionnaires, les pièces nécessaires seront fournies aux ingénieurs du contrôle par la compagnie ou le concessionnaire.

2° PRESCRIPTIONS SPÉCIALES AUX PONTS POUR CHEMINS DE FER

III. *Vérification de la résistance des ponts pour chemins de fer.* — Dans le délai de cinq ans, le calcul de la résistance de tous les ponts métalliques sera refait par les soins de la compagnie en vue d'apprécier si les efforts supportés par le métal, sous l'influence des surcharges prévues par le règlement du 29 août 1891, n'atteignent nulle part une limite dangereuse. En cas contraire, la compagnie et, au besoin, les ingénieurs du contrôle, en rendront compte à l'Administration en lui adressant les propositions qu'ils jugeront utile. Il en sera de même dans le cas où l'ouvrage aurait éprouvé des détériorations de nature à compromettre la sécurité.

3° PRESCRIPTIONS SPÉCIALES AUX PONTS POUR VOIES DE TERRE ET PONTS-CANAUX

IV. *Vérification de la résistance des ponts pour voies de terre ou des ponts-canaux.* — La vérification de la résistance des ponts

Digitized by Google

pour voies de terre ou des ponts-canaux sera faite dans les cas suivants :

1° Si les bases des calculs qui ont servi à l'établissement des ponts n'ont pu être retrouvées, si ces bases ne sont plus en rapport avec les charges qui peuvent circuler sur l'ouvrage, enfin s'il y a des raisons de croire que ces calculs primitifs renferment des inexactitudes;

2° Si l'ouvrage a éprouvé, par suite de remaniements ou de réparations, des modifications susceptibles d'apporter un changement notable dans sa résistance ou dans la charge morte due à son poids et à celui de la chaussée qu'il supporte.

Dans les deux cas qui précèdent, les calculs seront refaits sur les bases fixées par le règlement du 29 août 1891, et, si les efforts trouvés excèdent de plus d'un tiers les coefficients résultant de l'article 2 du règlement, les ingénieurs en rendront compte à l'Administration en lui adressant les propositions qu'ils jugeront convenables.

Digitized by Google

CIRCULAIRE DU 21 MAI 1892 DU MINISTÈRE DE L'INTÉRIEUR

RELATIVE A LA CONSTRUCTION DES PONTS A TRAVÉES MÉTALLIQUES DÉPENDANT DES CHEMINS VICINAUX

I. *Conditions à remplir.* — Les ponts à travées métalliques dépendant des chemins vicinaux doivent être en état de livrer passage aux voitures les plus lourdement chargées en usage dans la contrée, sans dépasser les limites résultant des lois et règlements sur la police du roulage.

II. *Limites du travail du métal.* — Les dimensions des différentes pièces seront calculées de telle sorte que, dans la position la plus défavorable des surcharges que l'ouvrage peut avoir à supporter, et en tenant compte de la charge permanente ainsi que des efforts accessoires tels que ceux qui peuvent être produits par les variations de température, le travail du métal par millimètre carré ne dépasse pas les limites indiquées ci-dessous :

1° Pour la fonte supportant un effort d'extension directe	1k,50
Pour la fonte travaillant à l'extension, dans les pièces soumises à des efforts tendant à les faire fléchir	2 ,50
Pour la fonte supportant un effort de compression	6 »
2° Pour le fer et l'acier travaillant à l'extension, à la compression ou à la flexion :	
Fer	6 »
Acier	8 »

Toutefois, pour les fermes principales des ouvrages d'une ouverture supérieure à 30 mètres, ces limites pourront être élevées jusqu'à 7 kilogrammes pour le fer et 9 kilogrammes pour l'acier.

Le nombre et le diamètre des rivets seront déterminés de telle sorte que le travail de cisaillement du métal ne dépasse pas les 4/5 de la limite qui aura été admise pour la plus faible des pièces à assembler, et que le travail d'arrachement des têtes, s'il s'en produit, ne dépasse pas 3 kilogrammes par millimètre carré en sus de l'effort résultant du serrage.

III. *Dimensions minima.* — L'épaisseur des semelles des poutres et des barres de treillis ne sera pas inférieure à 8 millimètres; celle des autres pièces de l'ossature, à 7 millimètres. On ne pourra

Digitized by Google

descendre au-dessous de cette dernière limite que pour certaines pièces accessoires entièrement apparentes au-dessus de la chaussée, telles que garde-corps et contreventements supérieurs.

IV. *Qualités du fer et de l'acier auxquelles correspondent les limites du travail du métal fixées par l'article* 2. — Les coefficients de travail du métal fixés ci-dessus pour le fer et l'acier correspondent aux qualités définies par les conditions suivantes :

DÉSIGNATION	ALLONGEMENT MINIMUM DE RUPTURE par millimètre carré mesuré dans des éprouvettes de 200 millimètres de longueur	RÉSISTANCE MINIMA A LA TRACTION par millimètre carré mesurée dans des éprouvettes de 200 millimètres de longueur
	p. 0/0	kilogr.
Fer profilé et plat (dans le sens du laminage)	8	32
Tôle.. Dans le sens du laminage.	8	32
Tôle.. Dans le sens perpendiculaire au laminage	3,5	28
Acier laminé	22	42
Rivets en fer	16	36
Rivets en acier	28	38

Les devis détermineront pour l'acier le minimum et le maximum entre lesquels devra être compris le rapport de la limite pratique d'élasticité à la résistance à la rupture. Le minimum ne devra pas être inférieur à 1/2 et le maximum ne devra pas dépasser 2/3.

Des coefficients de travail plus élevés pourront être autorisés par l'Administration pour des métaux de qualités différentes, si des justifications suffisantes sont produites.

On ne tolérera dans aucun cas l'emploi d'aciers fragiles, et on s'assurera fréquemment, pendant la construction, de la qualité du métal à ce point de vue, au moyen d'essais de trempe et d'expériences faites en pliant des barres percées de trous au poinçon.

Les devis doivent renfermer des prescriptions détaillées à cet égard sans préjudice des autres conditions relatives aux qualités du métal.

Dans tous les cas, lorsqu'on emploiera l'acier, les trous de rivets seront forés ou alésés après le perçage sur une épaisseur d'au moins 1 millimètre et les bords des pièces coupées à la cisaille seront affranchis sur la même épaisseur.

V. *Surcharges à adopter pour le calcul.* — On s'assurera que le travail du métal par millimètre carré dans chaque pièce ne dépasse pas les limites fixées à l'article 2 ci-dessus :

Digitized by Google

1° Sous l'action d'une surcharge uniformément répartie de 300 kilogrammes par mètre carré sur toute la largeur de l'ouvrage, y compris les trottoirs;

2° Sous le passage des véhicules les plus lourds en usage dans le pays, en prenant toutefois 6 tonnes comme minimum du poids de ces véhicules.

On admettra autant de ces voitures attelées que le tablier pourra en contenir sur le nombre de files que comporte la largeur de la voie, concurremment avec la surcharge de 300 kilogrammes sur les trottoirs.

VI. *Pression du vent.* — Le travail du métal sous l'influence des plus grands vents ne devra pas dépasser de plus de 1 kilogramme les limites fixées à l'article 2 ci-dessus.

On admettra que la pression du vent par mètre carré de surface verticale peut s'élever à 270 kilogrammes.

VII. *Pièces travaillant à la compression.* — On s'assurera que les pièces travaillant à la compression, soit d'une manière continue, soit d'une manière intermittente, ne sont pas exposées à flamber.

VIII. *Travail pendant le lançage.* — Lorsque la mise en place d'un tablier sera faite au moyen d'un lançage, le travail du métal pendant cette opération ne devra atteindre dans aucune pièce une limite dangereuse.

IX. *Calculs de résistance.* — Les calculs justificatifs des dimensions des diverses pièces seront joints aux projets.

Ceux relatifs à la rivure et aux flèches pourront n'être fournis que pour les travées d'une ouverture supérieure à 20 mètres.

X. *Épreuves.* — Chaque travée sera soumise à deux natures d'épreuves, l'une par poids mort et l'autre par poids roulant.

La première épreuve aura lieu au moyen d'une surcharge uniformément répartie de 300 kilogrammes par mètre carré de tablier, trottoirs compris.

Sur les ponts à travées indépendantes, la surcharge sera étendue successivement d'une extrémité à l'autre, avec interruption d'une demi-heure au moment où la surcharge aura atteint la moitié de la portée. Lorsque la totalité de la travée aura été couverte, la surcharge devra demeurer en place pendant une demi-heure.

Pour les ponts à travées solidaires, chaque travée sera d'abord chargée isolément, comme il vient d'être dit ci-dessus, puis on chargera simultanément les travées contiguës à chaque pile, à l'exclusion de toutes les autres.

Pour les ponts en arcs, chaque travée sera chargée sur la totalité de sa portée, ensuite sur chaque moitié et, enfin, sur la partie médiane seulement.

On procédera à l'épreuve par poids roulant avec les véhicules les plus lourds en usage dans la contrée, les trottoirs étant chargés à raison de 300 kilogrammes par mètre carré.

Digitized by Google

Les longueurs des files des voitures seront fixées ainsi qu'il suit :

Ponts à travées indépendantes et ponts en arcs, la longueur sera au moins égale à la plus grande portée ;

Ponts à travées solidaires, la longueur devra être suffisante pour couvrir les deux plus grandes travées consécutives.

On fera circuler au pas les files de voitures d'une extrémité à l'autre du pont.

On mesurera la flèche maxima au milieu de chaque travée, sous l'influence d'abord de la charge par poids mort, puis de la charge par poids roulant.

En outre, les niveaux des points les plus bas des poutres ou des arcs, au milieu de chaque travée et à ses extrémités, seront repérés avant les épreuves à deux points fixes choisis en dehors de l'ouvrage, de manière à permettre de constater, après l'enlèvement de la surcharge, et ensuite à une époque quelconque, les déformations qui se seraient produites; on repérera, par rapport aux mêmes points, le dessus de chacun des appuis. Le procès-verbal des épreuves contiendra les renseignements nécessaires pour permettre de retrouver ultérieurement ces repères.

Les dispositions des épreuves concernant les ponts d'un type exceptionnel seront réglées par un article spécial du devis.

XI. *Entretien et visites périodiques.* — La surveillance et l'entretien des ponts métalliques doivent être l'objet de soins incessants.

Indépendamment d'une visite annuelle portant principalement sur l'état de la rivure, ces ouvrages seront soumis, au moins une fois tous les cinq ans, et, dans tous les cas, chaque fois qu'on renouvellera la peinture, à un examen détaillé et à une vérification des flèches permanentes. Dans chacune de ces opérations, on s'assurera de l'état des pièces, du serrage des boulons et des rivets, du jeu des appareils de dilatation et de l'état des maçonneries qui les supportent ; enfin, pour les ponts à travées solidaires, on vérifiera le nivellement des appuis.

La première visite et la première vérification des flèches auront lieu avant le 1er janvier 1893.

Les résultats de cette première visite et des vérifications quinquennales seront consignés dans des tableaux[1] dont copie sera adressée à l'Administration supérieure.

[1] Voir ci-après la formule adoptée pour lesdits tableaux.

Digitized by Google

MINISTÈRE
DE L'INTÉRIEUR

ARTICLE 11
de l'Inst. minist.
du 21 mai 1892.

DÉPARTEMENT
d .....

CIRCONSCRIPTION
d .....

COMMUNE
d .....

SERVICE VICINAL

Chemin ..... **N°** .....

d ..... *à* .....

PROCÈS-VERBAL DE VISITE

du pont métallique d .....

sur l .....

GENRE DE CONSTRUCTION DE L'OUVRAGE

.....

.....

Époque de la construction : .....

Date de la visite : .....

1° Nombre de travées.....

2° Ouverture libre de l'ouvrage. { Travée N° 1 ..... / Travée N° 2 ..... / Travée N° 3 ..... / Travée N° 4 ..... } .....

3° Longueur totale, entre les culées.....

4° Largeur du pont. { Voie charretière ..... / 2 trottoirs ..... } .....

5° Hauteur des poutres { de rive (ou des treillis) ..... / Intermédiaires ..... }

6° Entretoises. { Nombre ..... / Espacement ..... / Hauteur ..... }

Digitized by Google

Désignation des parties du pont	Etat de chaque partie
I. Fondations et Enrochements.	
Culées.....	
Piles.....	
II. Maçonneries.	
Culées.....	
Piles.....	
Supports des appareils de dilatation :	
Sur les culées.....	
Sur les piles.....	
Maçonneries du tablier :	
Voûtelettes.....	
Chapes.....	
Trottoirs.....	
Parapets, murs en retour.....	
Perrés, etc.....	
III. Partie métallique.	
Plaques de friction.....	
Rouleaux de dilatation.....	
Etat général de la rivure.....	
Serrage des :	
Rivets.....	
Boulons.....	
Pièces principales :	
Poutres.....	
Treillis.....	
Entretoises.....	
Garde-corps.....	
Peinture.....	

IV. Nivellement des appuis, et vérification des flèches permanentes, par rapport au repère fixe pris.....
.....**à la cote (** ..... **).**

§ 1er. NIVELLEMENT DES APPUIS

(**Nota** : Le nivellement doit être fait dans le sens de la direction du chemin)

	Côté amont	Côté aval
Cotes sur l'appui de la culée de rive.....		
— pile N° 1.....		
— pile N° 2.....		
— pile N° 3.....		
— pile N° 4.....		
— culée de rive.....		

Digitized by Google

§ 2. VÉRIFICATION DES FLÈCHES PERMANENTES

Désignation des travées (dans le sens de la direction du chemin)	Cotes rapportées au repère ci-dessus		Flèche
	A l'axe de la travée	aux points d'appuis vers la rive	
Travée N° 1 (ouverture.....) :			
Amont.....			
Aval.....			
Travée N° 2 (ouverture.....) :			
Amont.....			
Aval.....			
Travée N° 3 (ouverture.....) :			
Amont.....			
Aval.....			
Travée N° 4 (ouverture.....) :			
Amont.....			
Aval.....			

Dressé par l'Agent voyer cantonal soussigné.

A ....., *le* 190

OBSERVATIONS ET RENSEIGNEMENTS

N'AYANT PU PRENDRE PLACE DANS LE TABLEAU QUI PRÉCÈDE

AVIS ET PROPOSITIONS DE L'AGENT VOYER EN CHEF

A ....., le..... 190

Digitized by Google

HALLES A VOYAGEURS ET A MARCHANDISES
DES CHEMINS DE FER

RÈGLEMENT DU 25 JANVIER 1902 RELATIF A LA VÉRIFICATION DES CALCULS ET AUX ÉPREUVES DE RÉSISTANCE DES CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES DES CHEMINS DE FER

ARTICLE PREMIER. — *Limite de fatigue des matériaux.* — Les différentes pièces des fermes (qu'elles soient destinées à couvrir des surfaces accessibles au public, ou seulement au personnel des compagnies) sont calculées de telle sorte que, dans les conditions les plus défavorables, en tenant compte de la charge permanente, ainsi que de la surcharge de neige et de la pression du vent, la fatigue primaire du métal ou du bois, calculée d'après la section nette, c'est-à-dire déduction faite des trous de rivets ou de boulons, ne dépasse pas les limites indiquées ci-dessous :

I. — *Pour le bois, sapin ou chêne*

Extension ou compression parallèle aux fibres, par centimètre carré.....	60 kilogr.
Cisaillement parallèle aux fibres, par centimètre carré.....	10 —

II. — *Pour la fonte*

Extension directe, par millimètre carré.....	2 kil. 500
Extension dans les pièces fléchies, par millimètre carré.....	3 — 500
Compression, par millimètre carré.....	7 —

III. — *Pour le fer.*

Extension ou compression, par millimètre carré.	8 kilogr.

IV. — *Pour l'acier*

Extension ou compression, par millimètre carré.	10 kilogr.

Toutefois ces limites sont abaissées dans les cas suivants :

Lorsque les fers laminés dans un seul sens sont soumis à des efforts de traction perpendiculaires au sens du laminage, les coefficients sont réduits d'un tiers dans les calculs relatifs à ces efforts.

La fatigue par glissement ou par cisaillement est limitée aux quatre cinquièmes de la fatigue par extension ou par compression. Pour le fer laminé dans un seul sens, on tient compte de la réduction dans la résistance de traction perpendiculairement au sens du laminage.

Le nombre et les dimensions des rivets sont calculés de telle sorte que la fatigue de cisaillement du métal ne dépasse pas les quatre cinquièmes de la limite la plus faible qui a été admise pour

Digitized by Google

les pièces assemblées et que la fatigue d'arrachement des têtes, s'il s'en produit, ne dépasse pas 3 kilogrammes par millimètre carré, en sus de l'effort du serrage.

Les calculs justificatifs de la rivure sont toujours fournis à l'appui des projets, en même temps que les calculs des dimensions des diverses pièces.

Il en est de même des calculs des assemblages par boulons.

Art. 2. — *Qualités du fer et de l'acier auxquelles correspondent les limites de fatigue fixées à l'article premier.* — Les coefficients de fatigue du métal fixés ci-dessus pour le fer et l'acier correspondent aux qualités définies par les conditions suivantes :

DÉSIGNATION	ALLONGEMENT minimum de rupture mesuré sur des éprouvettes de 200 mill. de longueur	RÉSISTANCE minima en kg. par mm.² à la traction mesurée sur des éprouvettes de 200 mill. de long.
	Pour 100	Kilogrammes
Fer laminé. — Fer profilé et plat (dans le sens du laminage).	8 »	32 »
Fer laminé. — Tôle. — dans le sens du laminage	8 »	32 »
Fer laminé. — Tôle. — dans le sens perpendiculaire au laminage.	3, 5	28 »
Acier laminé.....	22 »	42 »
Rivets en fer.....	16 »	36 »
— en acier.....	28 »	38 »

Les cahiers des charges fixent pour l'acier le minimum et le maximum entre lesquels doit être compris le rapport de la limite pratique d'élasticité à la résistance de rupture. Le minimum ne doit pas être inférieur à un demi et le maximum ne doit pas dépasser deux tiers.

Des coefficients de travail plus élevés peuvent être autorisés par l'Administration pour des métaux de qualité différente, si des justifications suffisantes sont produites.

On ne tolère, dans aucun cas, l'emploi d'aciers fragiles, et on s'assure fréquemment, pendant la construction, de la qualité du métal à ce point de vue. Les cahiers des charges doivent renfermer des prescriptions détaillées à cet égard, sans préjudice des autres qualités relatives aux conditions du métal.

Dans tous les cas, lorsqu'on emploie l'acier, les trous des rivets sont forés ou alésés après le perçage sur une épaisseur d'au moins

Digitized by Google

1 millimètre, et les bords des pièces coupées à la cisaille sont affranchis sur la même épaisseur.

Art. 3. — *Surcharges.* — On admet que la surcharge de neige peut atteindre 60 kilogrammes par mètre carré de surface horizontale, et la pression du vent soufflant d'un seul côté 150 kilogrammes par mètre carré de surface normale à sa direction. Cette dernière est supposée dirigée vers la terre, suivant un angle de 10° avec l'horizontale.

Si α est, en degrés, l'angle d'inclinaison de la toiture, on peut remplacer l'action du vent par une surcharge verticale égale à $150 \sin^2 (\alpha + 10)$ kilogrammes par mètre carré de surface couverte et une poussée horizontale ayant même expression $150 \sin^2(\alpha + 10)$ kilogrammes par mètre carré de surface en élévation.

On admet que le vent maximum peut se produire même après une chute de neige.

Art. 4. — *Pièces comprimées.* — On s'assure, dans tous les cas, que les pièces comprimées ne sont pas exposées à flamber; que la compression s'exerce sur la totalité de la pièce chargée par bout, soit sur une partie seulement de cette pièce, semelle supérieure des poutres; qu'elle soit associée à d'autres efforts, comme dans le cisaillement (voilement de l'âme des poutres); qu'elle agisse soit d'une manière continue, soit d'une manière intermittente.

Art. 5. — *Épreuves.* — Après achèvement, les fermes sont soumises, autant que possible, à des épreuves ayant pour but de vérifier leur résistance aux efforts qu'elles sont appelées à supporter et la concordance des indications du calcul avec les déformations locales et d'ensemble, causées par les efforts.

Art. 6. — *Fermes anciennes.* — On fait de même, autant que possible, une épreuve sur chaque type de ferme existante. On en compare les résultats avec ceux du calcul et on les discute dans un rapport. Si les fatigues réelles ne dépassent, en aucun point, de plus de 80 0/0 les limites fixées à l'article 1er, et la fatigue primaire d'aucune section de plus de 30 0/0 les mêmes limites, si, en outre, l'ouvrage ne manifeste aucun signe de détérioration ou d'usure, on peut le conserver sans renforcement.

Art. 7. — *Contrôle des épreuves.* — Pour les ouvrages construits ou entretenus par les concessionnaires, les épreuves sont faites en présence de l'ingénieur chargé du contrôle ou d'un agent délégué par lui. Elles font l'objet de procès-verbaux détaillés, qui sont adressés à l'Administration supérieure.

Art. 8. — *Dérogations aux prescriptions du règlement.* — L'Administration se réserve d'apprécier les cas exceptionnels qui pourraient motiver des dérogations quelconques aux prescriptions du présent règlement.

Digitized by Google

CIRCULAIRE DU MINISTRE DES TRAVAUX PUBLICS

(25 JANVIER 1902)

VÉRIFICATION DES CALCULS ET ÉPREUVES DE RÉSISTANCE DES CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES DES CHEMINS DE FER.

A la suite de l'effondrement de la halle aux marchandises de la gare de Valence, le 1er février dernier, il a semblé indispensable de soumettre les constructions métalliques anciennes, établies à une époque où l'on ne connaissait pas encore les procédés perfectionnés de la fabrication actuelle, à une revision complète, et de poser les règles pour les constructions nouvelles.

Il a été institué, à cet effet, une commission spéciale ; sur le vu du rapport qu'elle a présenté, après une étude approfondie de la question, et conformément à l'avis du Conseil général des Ponts et Chaussées, il a été arrêté le règlement ci-après, au sujet duquel il est utile d'entrer dans quelques explications de nature à préciser le sens et la portée des instructions qu'il renferme.

La surveillance et l'entretien des ouvrages métalliques doivent être l'objet de soins incessants ; toute avarie susceptible de s'aggraver ou de compromettre la sécurité doit être réparée sans délai : on doit refaire, aussi fréquemment qu'il est nécessaire pour les préserver de la rouille, la peinture des parties vues et, autant que possible, des parties cachées.

Indépendamment d'une visite annuelle, les ouvrages doivent être soumis, une fois tous les cinq ans, et, dans tous les cas, chaque fois qu'on refait la peinture, à une inspection détaillée.

Ainsi qu'il est prescrit par la circulaire du 12 novembre 1901, relative aux tabliers métalliques, un cinquième de l'effectif total des ouvrages de chaque réseau doit être examiné en détail chaque année.

On établit, pour chaque type de halle métallique, un dossier dans lequel sont groupés tous les renseignements relatifs à ces ouvrages. L'ensemble de ces dossiers forme une liasse spéciale dans chaque bureau d'ingénieur du contrôle de la voie et des bâtiments.

Chaque dossier comprend :

1° L'histoire des ouvrages (nature, provenance du métal, nom du constructeur, mode de construction, résultat des épreuves, réparations de l'ouvrage et de ses appuis, modification en cours d'entretien, accidents, etc...) ;

Digitized by Google

2° Les bases et les résultats des calculs qui ont servi à l'exécution ;

3° Les diagrammes des pièces avec croquis à l'appui, ou mieux, lorsque cela est possible, les dessins des ouvrages ;

4° Les procès-verbaux de visite détaillées, des épreuves et la discussion de leurs résultats.

Les dossiers sont tenus constamment à jour. Les pièces nécessaires sont fournies aux ingénieurs du contrôle par la compagnie ou le concessionnaire.

Dans le délai de cinq ans, le calcul de résistance de toutes les halles doit être refait par les soins de la compagnie, contrôlé par des essais, dont les résultats sont discutés en vue d'apprécier si les efforts supportés par les matériaux, sous l'influence des surcharges prévues par le règlement ci-joint, n'atteignent nulle part une limite dangereuse. En cas contraire, la compagnie et, au besoin, les ingénieurs du contrôle, en rendent compte à l'Administration en lui adressant les propositions qu'ils jugent utiles. Il en est de même dans le cas où l'ouvrage éprouve des détériorations de nature à compromettre sa sécurité.

Article premier. — Les chiffres donnés à l'article 1er du règlement sont fixés en vue du calcul des constructions nouvelles. Ils supposent les halles calculées suivant les méthodes usuelles, c'est-à-dire comme constituées par un certain nombre de pièces rigides, articulées en leur point de jonction, toutes les fois que la rigidité n'est pas indispensable à l'équilibre. Bien que cette articulation n'existe pas ou n'existe que très imparfaitement dans les types usuels, l'expérience et la théorie sont d'accord pour montrer que, dans les conditions ordinaires, le calcul fait en la supposant donne une valeur de la composante de l'effort total suivant l'axe de la pièce peu différente de la réalité. Cet effort total, divisé par la section, est ce qu'on est convenu d'appeler la *fatigue primaire*, qu'il y a lieu de comparer aux limites définies dans l'article 1er, toutes les fois que la pièce est rectiligne et ne sert pas d'appui à d'autres pièces transversales entre ses attaches. Dans les cas contraires, l'effort total à y comparer doit comprendre la fatigue de flexion.

La rigidité des assemblages introduit des efforts qu'on ne calcule pas en général. Ce sont principalement des moments de flexion qui peuvent, dans les ponts du moins, produire des *fatigues secondaires*, parfois égales ou supérieures aux fatigues primaires.

La fatigue réelle pouvant ainsi atteindre le double de la fatigue primaire calculée, on a pris des limites courantes au plus égales à la moitié de la limite élastique ordinaire de la matière considérée.

Lorsque les compagnies ou les concessionnaires présentent des projets comportant soit des assemblages à articulations efficaces, soit des assemblages rigides, en justifiant dans leur mémoire

Digitized by Google

avoir tenu un compte suffisant des efforts secondaires, ils peuvent être autorisés à relever les limites de fatigue.

Si l'on admet :

1° Que le danger de déformation ou de rupture est proportionnel à la plus grande dilatation ;

2° Ce qui est généralement peu éloigné de la réalité, que, dans un morceau de métal soumis à un allongement élastique uniforme, la contraction transversale de l'unité de longueur est environ le quart de l'allongement de cette même unité dans la direction de la traction.

On est amené à considérer les efforts de cisaillement comme équivalents à des efforts longitudinaux supérieurs d'un quart. Cette formule simple a été prise, faute de mieux, comme base de calcul de la résistance au cisaillement.

Les poutres en bois étant généralement rectangulaires, il n'y a pas lieu de se préoccuper, dans leur calcul, des efforts de cisaillement, qui sont très faibles. La limite donnée est surtout destinée au cas où une tige métallique sollicitée perpendiculairement à sa direction traverse une pièce de bois près de l'extrémité de celle-ci.

Les limites de fatigue admises ici pour les métaux sont supérieures d'une unité et demie à celles qui figurent au règlement de 1891 pour les ponts métalliques. On a admis, en effet, qu'un seul calcul comprenant l'effort du vent suffirait ; le règlement de 1891 admet un relèvement de 1 kilogramme des limites pour les vérifications relatives au vent. D'autre part, les effets dynamiques des charges roulantes, que subissent les ponts, n'existent pas ici et ceux du vent paraissent devoir être en général bien atténués. Il a donc paru que, pour le fer et l'acier, on pouvait tenir compte de l'atténuation des effets dynamiques, en relevant les limites d'un demi-kilogramme.

Les limites données pour les tensions de la fonte sont fixées surtout en vue de la vérification des ouvrages existants ; pour les constructions neuves, l'emploi de ce métal, lorsqu'il est exposé à subir des extensions, ne doit être admis que dans des cas tout à fait exceptionnels.

Les coefficients fixés à l'article 1er ne sont applicables aux pièces comprimées que lorsque celles-ci sont assez courtes pour qu'il n'y ait pas lieu de les renforcer en vue d'éviter qu'elles puissent fléchir sous l'action de la charge. Dans le cas contraire, on doit tenir compte des prescriptions de l'article 4 et réduire la pression.

Art. 2. — Les qualités des métaux (art. 2) sont définies sous les mêmes réserves qu'à l'article 3 du règlement de 1891 sur les ponts métalliques.

Art. 3. — La surcharge de neige indiquée à l'article 3 correspond à une couche d'environ 0m,50 d'épaisseur. Il appartient aux ingénieurs de proposer l'adoption de surcharges plus fortes pour les

Digitized by Google

ouvrages à construire dans les régions où la neige est particulièrement à redouter ; ils peuvent, au contraire, en proposer la réduction dans quelques points exceptionnels où elle n'atteint jamais ces épaisseurs. Toutefois, les réductions ne sont admises que sur la production de documents bien contrôlés et portant sur une période suffisamment longue.

La pression du vent et son inclinaison rentrent dans les limites généralement admises par les constructeurs. Les ingénieurs doivent proposer des pressions plus fortes pour les halles à construire au bord de la mer, ou dans les vallées où règnent des vents particulièrement violents ; ils peuvent, au contraire, tenir compte de la diminution d'intensité qui résulte des circonstances locales.

Art. 4. — Les vérifications relatives au flambage (art. 4) doivent être faites pour la fonte comme pour le fer et l'acier.

Art. 5. — Les épreuves indiquées aux articles 5 et 6 doivent être faites soit au moyen de surcharges disposées sur la toiture, soit au moyen de tractions exercées en un certain nombre de points d'attache par des câbles munis de dynamomètres, ou chargés directement. Les déformations d'ensemble et locales sont mesurées au moyen d'appareils appropriés.

Le rapport à l'appui du procès-verbal des épreuves (art. 7) fournit la comparaison des déformations observées avec celles qui ont été prévues par le calcul et discute les discordances.

FIN

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX

§ 1. — Principes de la résistance des matériaux

Pages.

1. Définitions..... 1
2. Conditions d'application..... 2
3. Termes employés..... 2

§ 2. — Action des forces extérieures quelconques sur une pièce prismatique

4. Recherche des efforts développés..... 3
5. Effort normal. — Effort tranchant..... 3
6. Moment fléchissant..... 4
7. Moment de torsion..... 4
8. Remarque I..... 4
9. Remarque II..... 4
10. Interprétation des efforts dans le cas de la flexion plane. 4

§ 3. — Moments d'inertie. — Rayon de gyration. — Ellipse d'inertie

11. Moments d'inertie..... 5
12. Déplacement des axes parallèlement à eux-mêmes..... 6
13. Axes principaux..... 6
14. Moment d'inertie polaire..... 7

Digitized by Google

Pages.
15. Rayon de giration..... 7
16. Ellipse d'inertie..... 7

§ 4. — **Recherche de quelques moments d'inertie**

17. Rectangle plein..... 8
18. Rectangle évidé..... 9
19. Pièce en forme de double T..... 9
20. Rectangle par rapport à l'une des bases..... 10
21. Rectangle par rapport à une droite quelconque parallèle à l'une des bases..... 10
22. Triangle par rapport à l'une de ses bases..... 11
23. Section composée possédant deux axes de symétrie..... 11
24. Section ne possédant qu'un axe de symétrie..... 12

§ 5. — **Détermination des sections à donner aux pièces prismatiques soumises à l'action des forces extérieures**

25. Pièces tendues..... 13
26. Pièces comprimées de faible longueur..... 14
27. Pièces comprimées de grande longueur..... 14
28. Flexion..... 17
29. Moments de résistance..... 19
30. Détermination de la section d'une pièce fléchie..... 22
31. Exemples relatifs aux pièces fléchies..... 23
32. Déformation des pièces fléchies..... 25
33. Effort tranchant..... 26
34. Cas d'un rectangle plein..... 28
35. Cas d'une pièce en forme de double T..... 28
36. Remarque..... 30
37. Glissement longitudinal ou cisaillement longitudinal..... 31
38. Torsion..... 32
39. Composition des différents efforts..... 33
40. Valeur des constantes pour les matériaux usuels par millimètre carré de section..... 34

CHAPITRE II

CALCULS GRAPHIQUES

§ 1. — Généralités

41. Généralités..... 35

Digitized by Google

§ 2. — Opérations sur les lignes

Pages.
42. Addition 35
43. Soustraction 36
44. Multiplication de deux lignes 36
45. Premier exemple 36
46. Deuxième exemple 37
47. Multiplication de plusieurs lignes 37
48. Division de deux lignes 38
49. Exemple 38
50. Elévation aux puissances 39
51. Extraction de la racine carrée 40
52. Exemple 40
53. Extraction d'une racine quelconque 40

§ 3. — Opérations sur les surfaces

54. Triangle 41
55. Remarque 42
56. Parallélogramme 42
57. Quadrilatère quelconque 42
58. Polygone quelconque 43

CHAPITRE III

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES

§ 1. — Rappel de quelques principes

59. Règle du parallélogramme des forces 44
60. Equilibre de deux forces 44
61. Action égale et contraire à la réaction 45

§ 2. — Composition et décomposition des forces appliquées en un même point dans un plan

62. Composition des forces 45
63. Décomposition des forces 46
64. Equilibre des forces appliquées en un même point dans un plan 47

§ 3. — Composition et décomposition des forces parallèles

65. Composition de deux forces parallèles dirigées dans le même sens. — Résultante 48

Digitized by Google

Pages.

66. Composition de deux forces parallèles dirigées en sens contraire..... 49
67. Composition de plusieurs forces parallèles..... 50
68. Décomposition d'une force en deux autres parallèles à cette force..... 50
69. Equilibre des forces parallèles..... 51

§ 4. — **Composition des forces quelconques**

70. Composition et équilibre des forces situées d'une manière quelconque dans un plan..... 52

DEUXIÈME PARTIE

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE

CHAPITRE IV

LE POLYGONE FUNICULAIRE ET SES APPLICATIONS

---

§ 1. — **Définitions**

71. Cas général d'un groupe de forces placées d'une manière quelconque dans un plan..... 53
72. Cas de forces parallèles..... 56
73. Propriétés des côtés du polygone funiculaire..... 58

§ 2. — **Recherche de la résultante d'un système de forces**

74. Résultante d'un groupe de forces placées d'une manière quelconque dans un plan..... 59
75. Résultante d'un groupe de forces parallèles de même sens..... 61
76. Résultante d'un groupe de forces parallèles de sens différents..... 61

§ 3. — **Conditions graphiques d'équilibre des forces**

77. Forces appliquées en un même point..... 63

Digitized by Google

Pages.

78. Forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan..... 63
79. Couples..... 64
80. Conditions graphiques pour que des forces situées dans un plan se réduisent à un couple..... 64

§ 4. — **Problèmes usuels sur la composition, la décomposition et l'équilibre des forces**

81. Décomposer une force en deux autres de même direction qu'elle et dont les lignes d'action sont données..... 65
82. Même problème, mais les lignes d'action données étant situées d'un même côté par rapport à la force R..... 67
83. Etant données des forces quelconques, les réduire à deux forces parallèles à leur résultante et passant par des points donnés..... 67
84. Même problème avec des forces parallèles..... 69
85. Décomposer une force en deux autres de même direction qu'elle, et dont l'une est donnée en grandeur, direction et sens..... 69
86. Remarque..... 70

§ 5. — **Propriétés géométriques des polygones funiculaires**

87. Les côtés correspondants de deux polygones funiculaires d'un même système de forces se coupent sur une droite parallèle à la ligne qui joint les pôles..... 70
88. Tous les pôles des polygones funiculaires assujettis à passer par deux points fixes se trouvent sur une droite parallèle à celle qui joint les points donnés..... 70
89. Problème. — Faire passer un polygone funiculaire par deux points, la distance polaire étant donnée..... 71
90. Problème. — Faire passer un polygone funiculaire par trois points donnés..... 73
91. Remarque..... 74

CHAPITRE V

MOMENTS STATIQUES DES FORCES

§ 1. — **Généralités**

92. Définition..... 75
93. Calcul..... 75

Digitized by Google

§ 2. — Détermination graphique

Pages.
94. Construction graphique du moment d'une force par rapport à un point..... 76
95. Choix des échelles dans l'évaluation du moment... ... 76
96. Tracé graphique du moment, par rapport à un point, d'un groupe de forces quelconques situées dans un plan.. 77
97. Moment par rapport à un point d'un système de forces parallèles..... 79

§ 3. — Moments des couples

98. Définition..... 79
99. Transport parallèle..... 80
100. Translation..... 80

CHAPITRE VI

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ

101. Rappel des principes..... 82
102. Méthode générale pour déterminer le centre de gravité d'un contour polygonal ou d'une surface quelconque ne possédant pas d'axe de symétrie..... 82
103. Application à un contour polygonal ABCD..... 82
104. Application à la surface formée par un quadrilatère.... 84
105. Application à un fer à T..... 84
106. Emploi du calcul dans la recherche des centres de gravité..... 85

TROISIÈME PARTIE

POUTRES DROITES A AME PLEINE SUR DEUX APPUIS LIBRES OU ENCASTRÉS

CHAPITRE VII

GÉNÉRALITÉS

107. Définitions..... 87
108. Conventions sur les signes..... 87
109. Rappel des principes fondamentaux..... 88

Digitized by Google

CHAPITRE VIII

POUTRES DROITES POSÉES LIBREMENT SUR DEUX APPUIS

§ 1. — Charges fixes et directes

A. — *Charges uniformément réparties*

Pages.

110. Charges uniformes complètes. — Poutre posée librement sur deux appuis et chargée sur toute sa longueur d'une charge uniformément répartie verticale de p kilogrammes par mètre courant..... 90
Réactions des appuis..... 90
Moments fléchissants..... 91
Construction de la parabole..... 92
Efforts tranchants..... 93
Flèches..... 94
111. Application à une poutre de 5 mètres de portée et soumise à l'action d'une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant..... 94
112. Charges uniformes partielles..... 96
113. Charge symétrique..... 99
114. Charges partielles de longueurs α et β, d'intensités différentes p et q au mètre courant, placées à chaque extrémité de la poutre..... 100
115. Charges de même valeur..... 103
116. Charge unique..... 104

B. — *Charges concentrées*

117. Charge unique en un point quelconque de la poutre.... 106
118. Cas où la charge unique se trouve au milieu de la portée. 107
119. Application à une poutre de 10 mètres de portée qui est soumise à l'action d'une charge concentrée de 5 tonnes agissant à 3 mètres de l'appui de gauche..... 109
120. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges concentrées P_1, P_2, P_3..... 111
121. Recherche du moment fléchissant maximum développé dans une poutre de 10 mètres de portée et soumise à l'action de trois charges..... 113
122. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme complète de p par mètre courant et d'une charge concentrée P_1 en un point quelconque..... 114
123. Détermination du moment fléchissant maximum dans une poutre de 6 mètres de portée soumise à l'action

Digitized by Google

Pages.

d'une charge uniformément répartie de 2 tonnes par mètre courant et d'une charge concentrée de 6 tonnes appliquée à 2 mètres de l'appui de gauche..... 117

124. Même exemple que ci-dessus, mais la charge concentrée est située à 5 mètres de l'appui de gauche..... 118

§ 2. — **Charges fixes et indirectes**

A. — *Charges uniformément réparties*

125. La poutre AB reçoit les efforts d'une charge uniformément répartie *p* par mètre, par l'intermédiaire de poutrelles attachées aux points C, D, E..... 119

126. Application. — Deux poutres de 8 mètres de portée, distantes de 3 mètres d'axe en axe, reçoivent, par l'intermédiaire de solives, une charge uniformément répartie de 1.000 kilogrammes par mètre carré. Les solives sont écartées de 2 mètres..... 121

B. — *Charges concentrées*

127. Charge unique agissant sur une poutre par l'intermédiaire de poutrelles..... 123

Remarque..... 124

128. Plusieurs charges concentrées agissant sur la poutre par l'intermédiaire de poutrelles..... 124

Charge concentrée et charge uniforme..... 125

§ 3. — **Charges variables directes**

A. — *Charges uniformes*

129. Moments fléchissants..... 126

130. Efforts tranchants..... 127

Remarque..... 129

131. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme fixe de *p* par mètre et d'une charge uniforme variable de *q* par mètre..... 129

B. — *Charges concentrées*

132. Charge unique..... 131

133. Cas de deux charges égales, qui se meuvent sur la poutre, leur distance restant constante..... 133

134. Cas d'une charge uniformément répartie fixe et de deux charges concentrées liées invariablement entre elles, qui se meuvent sur la poutre..... 137

Digitized by Google

Pages.

134 *a*. Application à une poutre de 12 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniformément répartie fixe de 2 tonnes par mètre courant, et de deux charges mobiles de 5 tonnes chacune, écartées de 4 mètres..... 137

Construction de la courbe-enveloppe..... 139

135. Poutre soumise à l'action de charges concentrées mobiles formant convoi, c'est-à-dire liées invariablement entre elles..... 143

A. — Recherche du moment fléchissant maximum produit dans une section donnée pendant le passage d'un convoi..... 143

Principes 1 *et* 2..... 143

135 *a*. Application à une poutre de 8 mètres de portée, qui donne passage à quatre charges de 4, 5, 6 et 3 tonnes disposées comme l'indique la figure, et pour laquelle il s'agit de déterminer le moment fléchissant maximum dans une section située à 3 mètres de l'appui de gauche..... 146

B. — Moment fléchissant maximum maximorum..... 149

Principe 3..... 149

135 *b*. Exemple. — Déterminer le moment fléchissant maximum maximorum dans une poutre de 5 mètres de portée qui donne passage à un convoi..... 151

C. — Efforts tranchants maxima positif et négatif dans une section donnée..... 152

135 *c*. Effort tranchant maximum négatif..... 155

D. — Effort tranchant maximum maximorum dans la poutre..... 156

136. Application. — Une poutre de 10 mètres de portée étant donnée, rechercher les efforts tranchants maxima positif et négatif dans une section située à 3 mètres de l'appui de gauche, ainsi que les efforts tranchants sur les appuis, lors du passage sur la poutre de 4 galets d'un pont roulant répondant au diagramme..... 158

§ 4. — Charges variables et indirectes

137. Moments fléchissants..... 165

138. Efforts tranchants..... 165

A. — Charge uniforme..... 165

138 *a*. Ligne représentative des efforts tranchants maxima.. 171

138 *b*. Formule générale pour déterminer analytiquement la valeur des efforts tranchants maxima positif et négatif..... 171

Digitized by Google

Pages.
B. — Charge unique..... 173
C. — Cas de plusieurs charges formant convoi..... 174
139. Exemples d'application. — Premier exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans une poutre de 12 mètres de portée qui donne passage à une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant, transmise à la poutre par des entretoises distantes de 3 mètres..... 178
1° Efforts tranchants maxima positifs..... 179
2° Efforts tranchants maxima négatifs..... 179
140. Deuxième exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans la même poutre que celle du premier exemple, mais en supposant que la charge uniforme soit remplacée par une charge unique de 10 tonnes..... 180
141. Troisième exemple. — Déterminer les efforts tranchants maxima positifs et négatifs dans la poutre des deux exemples précédents, mais en supposant qu'elle donne passage à un convoi non retournable de trois charges défini par le diagramme..... 182
1° Efforts tranchants maxima positifs..... 183
2° Efforts tranchants maxima négatifs..... 185

CHAPITRE IX

POUTRES ENCASTRÉES AUX DEUX APPUIS

§ 1. — Charges uniformes

142. Charges uniformes complètes..... 186
Réactions..... 186
142 *a*. Application à une poutre de 8 mètres de portée supportant une charge uniformément répartie de 2 tonnes par mètre courant..... 188
143. Charge uniforme incomplète sur une longueur α..... 191
143 *a*. Application à une poutre de 6 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniforme de 2 tonnes par mètre courant et sur une longueur de 2 mètres à partir de l'appui de gauche..... 194

§ 2. — Charges concentrées

144. Charge unique placée en un point quelconque de la poutre..... 197

Digitized by Google

Pages.
145. Charge unique au milieu de la poutre..... 199
146. Cas particulier de deux charges égales et situées à égale distance des appuis..... 201
147. Application à une poutre de 5 mètres de portée chargée d'un poids unique de 10 tonnes situé à 2 mètres de l'appui de droite..... 203
148. Cas de plusieurs charges concentrées..... 205
149. Poutre soumise à l'action d'une charge uniforme complète de p par mètre et d'une charge isolée P en un point quelconque..... 209

§ 3. — **Charges variables**

150. Charge uniforme de p kilogrammes par mètre..... 211
151. Application à une poutre de 8 mètres de portée soumise à l'action d'une charge uniforme variable de 2 tonnes par mètre courant..... 214
152. Charge unique mobile..... 216
153. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges mobiles, mais liées invariablement entre elles..... 221
Remarque..... 227
154. Application à une poutre de 24 mètres de portée soumise à l'action de trois charges roulantes de 5, 8 et 4 tonnes espacées de 2 et 3 mètres..... 227

CHAPITRE X

POUTRES ENCASTRÉES SUR UN APPUI ET LIBRES SUR L'AUTRE

§ 1. — **Charges fixes**

A. — *Charges uniformes*

155. Charge uniforme de p par mètre..... 237

B. — *Charges concentrées*

156. Charge unique..... 239
157. Charge médiane..... 241
158. Cas de plusieurs charges concentrées..... 242
159. Remarque..... 244

§ 2. — **Charges variables**

A. — *Charges uniformes*

160. Charge uniforme mobile..... 244

Digitized by Google

B. — *Charges concentrées*

Pages.
161. Charge unique mobile..... 248
162. Poutre soumise à l'action de plusieurs charges mobiles, mais liées invariablement entre elles..... 251
163. Application. — Une poutre de 5 mètres de portée, encastrée sur un appui et libre à l'autre, est soumise à l'action d'une charge uniforme fixe de 2 tonnes par mètre et d'une charge isolée fixe de 5 tonnes, située à 2 mètres de l'appui encastré..... 252

CHAPITRE XI

POUTRES ENCASTRÉES SUR UN APPUI ET EN PORTE-A-FAUX

§ 1. — Charges fixes

164. Charge uniforme..... 257
165. Charge concentrée unique..... 258
166. Application. — Une poutre en porte-à-faux de 5 mètres de longueur est soumise à son extrémité à l'action d'une charge de 5 tonnes, et, sur une longueur de 3 mètres à partir de l'appui, à l'action d'une charge de 2 tonnes par mètre courant..... 259
167. Cas de plusieurs charges concentrées..... 261

§ 2. — Charges variables

168. Charge uniforme..... 263
169. Charge unique mobile..... 265
170. Plusieurs charges mobiles liées invariablement..... 266

CHAPITRE XII

POUTRES REPOSANT SUR DEUX APPUIS ET SE CONTINUANT EN PORTE-A-FAUX APRÈS LES APPUIS

§ 1. — Charges fixes

171. Charge uniforme..... 268
172. Charges concentrées..... 273

Digitized by Google

Pages.

173. Application. — Poutre de 5 mètres de portée entre appuis continuée par deux porte-à-faux, l'un de 2 mètres, l'autre de 1 mètre, et soumise à l'action d'une charge uniforme de 1 tonne par mètre courant..... 276

§ 2. — **Charges mobiles**

174. Principes généraux..... 279
175. I. — Tableau récapitulatif des poutres posées sur deux appuis libres..... 282
175. II. — Tableau récapitulatif des poutres encastrées aux deux appuis..... 284
175. III. — Tableau récapitulatif des poutres sur deux appuis, encastrées à un bout et libres à l'autre. 286
175. IV. — Tableau récapitulatif des poutres en porte-à-faux..... 288

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE DANS L'ÉTUDE DES POUTRES POSÉES SUR DEUX APPUIS LIBRES.

CHAPITRE XIII

EMPLOI DU POLYGONE FUNICULAIRE DANS LA RECHERCHE DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET EFFORTS TRANCHANTS

§ 1. — **Charges fixes**

176. Cas général..... 291
177. Application à une poutre de 5 mètres de portée soumise à l'action de deux charges concentrées de 10 et 15 tonnes..... 294
178. Cas d'une charge unique..... 297
179. Recherche du moment fléchissant maximum déterminé dans une poutre soumise à l'action d'un certain nombre de charges concentrées fixes..... 297

Digitized by Google

§ 2. — Charges mobiles

Pages.
180. Cas de plusieurs charges mobiles..... 298
181. Application à une poutre de 10 mètres de portée sur laquelle doit passer le train-type, pour voie normale, de la circulaire ministérielle des travaux publics.... 303

CHAPITRE XIV

POUTRES A TREILLIS POSÉES SUR DEUX APPUIS LIBRES

§ 1. — Généralités

182. Definition..... 308
183. Hypothèses prévues dans les poutres à treillis pour que les barres qui les composent ne subissent que des efforts de tension et de compression..... 310

§ 2. — Mode de répartition des charges

184. Charges reportées aux nœuds par des pièces secondaires..... 314
Remarque I..... 316
Remarque II..... 317
Remarque III..... 317
185. Charges agissant directement sur la poutre et en un point quelconque 320
186. Remarque sur les poutres demi-encastrées..... 322

§ 3. — Méthodes générales pour déterminer les efforts dans les poutres quelconques à treillis simple

187. Généralités..... 323
188. Méthode de Culmann..... 324
189. Méthode de Ritter..... 325
Remarque I..... 326
Remarque II..... 327
190. Méthode de Crémona..... 327
191. Comparaison des trois méthodes..... 331

§ 4. — Position des charges variables qui donnent les efforts maxima

192. Efforts dans les membrures..... 332
193. Efforts dans les diagonales et les montants..... 335

Digitized by Google

§ 5. — Méthodes pour les poutres droites à treillis

Pages.
194. Détermination des efforts..... 337
195. Répartition des moments fléchissants aux nœuds des poutres droites à treillis..... 338

§ 6. — Résumé des opérations à effectuer pour déterminer les efforts maxima dans les poutres à treillis, et applications

A. — *Charges fixes*

196. Tracé de Crémona..... 339
Remarque..... 340
196. *a*. Application à une poutre de 12 mètres de portée, définie par la figure et soumise à une charge uniformément répartie de 2 tonnes par mètre courant à la partie inférieure..... 340
Charge en chaque nœud..... 341
197. Méthode de Ritter pour une poutre droite du système de treillis en V..... 343
198. Treillis simple en N..... 347
199. Treillis double..... 347
200. Application à une poutre droite à treillis double de 12 mètres de portée divisée en panneaux de 2 mètres et soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de 5 tonnes par mètre courant..... 349

B. — *Charges variables*

201. Efforts dans les membrures..... 352
202. Efforts maxima dans les diagonales..... 352
203. Poutre de 12 mètres de portée à treillis simple en V, disposée comme l'indique la figure et soumise à l'action d'une charge variable de 4 tonnes par mètre courant..... 353
204. Poutre de 10 mètres de portée, du système en N, semi-parabolique, qui donne passage, à sa partie inférieure, au train-type de la voie normale..... 358
Premier système..... 359
Deuxième système..... 362
205. Poutre droite de 9 mètres de portée du système simple en V, qui donne passage, à sa partie supérieure, à une file de tombereaux de 6 tonnes de la circulaire ministérielle..... 366

Digitized by Google

§ 7. — Efforts maxima et minima dans les poutres à treillis soumises à des charges permanentes et variables

Pages.

206. Poutre de 12 mètres de portée à treillis simple en V soumise à la partie inférieure, par l'intermédiaire d'entretoises, à une charge permanente de 2 tonnes par mètre courant et à une surcharge variable uniformément répartie de 4 tonnes par mètre courant..... 371
207. Poutre de 10 mètres de portée du système en N semi-parabolique, soumise à sa partie inférieure, par l'intermédiaire d'entretoises, à une charge permanente de 1 tonne par mètre courant et qui donne passage au train-type de la voie normale..... 373

§ 8. — Poutres à treillis à contre-diagonales

208. Généralités..... 375
209. Recherche des panneaux à munir de contre-diagonales. 377
210. Effort de compression maximum :
1° Surcharge uniformément répartie de p kilogrammes par mètre courant..... 377
2° Convoi de charges distinctes..... 379
211. Hypothèses relatives au calcul des efforts dans les membrures, les diagonales et les montants d'une poutre à contre-diagonales..... 381
212. *Premier exemple.* — Poutre de 12 mètres de portée à membrures parallèles divisée en 6 panneaux de 2 mètres, soumise à l'action d'une charge permanente de $p = 1$ tonne par mètre courant et qui donne passage à une surcharge uniforme de $p = 2$ tonnes par mètre courant agissant à la partie inférieure par l'intermédiaire d'entretoises..... 383
Remarque..... 388
Montants..... 388
Remarque..... 390
213. *Deuxième exemple.* — Poutre de 12 mètres de portée, semi-parabolique, divisée en six panneaux de 2 mètres, soumise à l'action d'une charge permanente de $p = 1$ tonne par mètre courant et qui donne passage au train-type pour voie de 1 mètre agissant à la partie inférieure..... 390
Diagonales et montants..... 392
Recherche des panneaux à munir de contre-diagonales. 392
Remarque..... 397

Digitized by Google

§ 9. — **Poutres à membrures parallèles avec treillis à mailles serrées**

Pages.

214. Généralités..... 397
215. Membrures..... 398
216. Diagonales..... 398

CHAPITRE XV

CONTREVENTEMENTS DES PONTS

§ 1. — **Généralités** 401

§ 2. — **Pont avec un seul plan de contreventement à la partie inférieure** 402

217. Pont avec maîtresses poutres à âme pleine..... 403

A. *Pont pour voie de terre*..... 403

B. *Pont pour voie de chemin de fer*..... 404

218. Pont avec poutre à treillis..... 405

A. *Pont pour voie de terre*..... 405

219. Application..... 407

B. *Pont pour voie de chemin de fer*..... 409

220. Exemple..... 411

§ 3. — **Pont à voie inférieure avec deux plans de contreventement**

221. Généralités..... 413
Remarque importante..... 415
222. Exemple d'un pont à voie inférieure ayant deux plans de contreventement avec cadres sur les appuis permettant d'intéresser les deux contreventements..... 415
1° Vent de 270 kilogrammes par mètre carré sans surcharge..... 415
2° Vent de 170 kilogrammes avec surcharge sur le pont. 417
Recherche des charges dans les contreventements..... 418
Cadre sur les appuis..... 419

Digitized by Google

§ 4. — Tablier à voie supérieure avec deux plans de contreventement et avec entretoisement vertical sur toute la longueur

Pages.
223. Généralités..... 421
224. Exemple d'application à un pont avec poutres à treillis dont le panneau moyen et la coupe transversale sont donnés par figure. — Vent de 270 kilogrammes sans surcharge..... 424

CHAPITRE XVI

CHARPENTES

§ 1. — Généralités

225. Généralités..... 429

§ 2. — Charge permanente et surcharges

A. — *Charge permanente*

226. Poids des couvertures usuelles..... 431
I. Poids au mètre carré des couvertures pour une pente nulle..... 432
227. Poids de la charpente métallique..... 432
II. Poids au mètre carré de projection horizontale des charpentes métalliques..... 432

B. — *Surcharges*

228. Surcharges ordinaires..... 433
229. Surcharges prévues par la circulaire. — Neige. — Vent. 434

§ 3. — Tracé des efforts dans les fermes

230. Ferme de 8 mètres de portée qui supporte, par l'intermédiaire de pannes, chevrons et lattis, une couverture en tuiles. — Les fermes sont espacées de 5 mètres. — Cas de surcharge ordinaire de 50 kilogrammes par mètre carré sur toute la toiture..... 435
231. Ferme américaine de 16 mètres de portée qui supporte, par l'intermédiaire de pannes en fer, une couverture en zinc. L'inclinaison du toit est 0m,45 par mètre et

Digitized by Google

Pages.

l'espacement des fermes est de 6 mètres. — Cas des surcharges de la circulaire 439
1° Charge permanente par mètre carré de projection horizontale 439
2° Surcharges. — Neige. — Vent 440
Charges en chaque nœud de la ferme 440
Détermination des efforts dans les barres 441
Demi-surcharge 442
232. Ferme Polonceau 444
1° Type à une seule contre-fiche 445
2° Type à trois contre-fiches 445
233. Ferme Polonceau à une seule contre-fiche 445
234. Ferme Polonceau à trois contre-fiches 448
235. Exemple. — Ferme Polonceau à une contre-fiche de 12 mètres de portée qui supporte, par l'intermédiaire de pannes, une couverture en tôle ondulée de 1 millimètre d'épaisseur. Pente du toit, 0m,45. Ecartement des fermes, 4 mètres 451
Moments de flexion des arbalétriers 455
236. Fermes anglaises et belges 456
237. Exemple. — Ferme de 16 mètres de portée du système anglais, recevant les charges par des pannes espacées horizontalement tous les 2 mètres. La charge verticale en chaque nœud transmise par la panne est de 1.000 kilogrammes 456
238. Ferme à entrait brisé 458
239. Ferme de 18 mètres de portée avec entrait brisé qui supporte, par l'intermédiaire de pannes placées aux nœuds supérieurs de la ferme, une charge verticale de 2.000 kilogrammes 458
240. Ferme à treillis double 460
241. Ferme à treillis double de 20 mètres de portée chargée en chaque nœud de 2.000 kilogrammes 460
242. Ferme quelconque dissymétrique 464
243. Fermes portant des charges sur les arbalétriers et en même temps sur l'entrait 466
244. Exemple d'une ferme américaine de 12 mètres de portée qui supporte aux nœuds supérieurs une charge de 2.000 kilogrammes, et aux nœuds inférieurs une charge de 1.500 kilogrammes 466
Remarque 469
245. Ferme de 12 mètres de portée qui doit recevoir en un point quelconque de l'entrait une charge unique de 6.000 kilogrammes 470
Efforts de tension dans les entraits pour la position de la charge qui donne les moments de flexion maxima. 474

Digitized by Google

Pages.
246. Ferme en forme de marquise..... 475
247. Application à une console à treillis de 3 mètres de porte-à-faux qui porte à la partie supérieure trois charges. 478

CHAPITRE XVII

DÉFORMATIONS DES POUTRES

Flèches..... 482

§ 1. — Poutres à âme pleine

A. — *Poutres à section constante*

248. Formules types..... 482
1° Poutre sur deux appuis libres. — *a*) Charge uniformément répartie de *p* par mètre courant..... 482
b) Charge unique placée au milieu de la poutre..... 483
2° Poutre encastrée aux deux appuis. — *a*) Charge uniformément répartie de *p* par mètre courant..... 483
b) Charge unique placée au milieu de la poutre..... 483
3° Poutre encastrée sur un appui et libre à l'autre..... 483
a) Charge uniformément répartie par mètre courant.. 484
b) Charge unique placée au milieu..... 484
4° Poutre encastrée sur un appui et en porte-à-faux... 484
a) Charge uniformément répartie..... 484
b) Charge unique sur la poutre placée à une distance *l* de l'encastrement..... 484
5° Tracé de la ligne élastique déformée..... 485
249. Application à une poutre en fer de 6 mètres de portée posée sur deux appuis libres et chargée d'une charge uniformément répartie de 500 kilogrammes par mètre courant. — La section de la poutre est en forme de double T; elle est constante et se compose d'une âme de 300 × 8 et de quatre cornières de 60 × 60 × 8... 485
Remarque..... 487
250. Application à une poutre en acier de 6 mètres de portée encastrée à un bout et librement posée à l'autre, soumise à l'action d'une charge uniformément répartie de 1.000 kilogrammes et d'un poids de 5.000 kilogrammes placé au milieu. — La section de la poutre est constante, elle est en forme de double T et est composée d'une âme de 400 × 8 et de quatre cornières de 70 × 70 × 8..... 487
Remarques I et II..... 490

Digitized by Google

B. — *Poutre à section variable*

Pages.
251. Généralités..... 490
252. Echelle des déformations..... 492
253. Remarques importantes. — Remarque I..... 494
Remarques II, III, IV et V..... 495
254. Application à une poutre en fer de 12 mètres de portée qui donne passage à trois charges roulantes de 5 tonnes chacune, écartées de 2 mètres..... 495

§ 2. — **Poutres à treillis** 499

CINQUIÈME PARTIE

CALCULS COMPLETS DE PASSERELLES, DE PONTS POUR VOIES DE TERRE ET DE FER

CHAPITRE XVIII

PASSERELLES

255. Passerelle de 6 mètres de portée composée de poutres écartées de 1m,50 qui supportent un platelage en bois placé transversalement. — La passerelle est destinée au passage des piétons seulement..... 501
256. Passerelle pour piétons de 11m,40 d'ouverture et de 2 mètres de longueur avec platelage en bois. Les poutres sont à treillis et servent de garde-corps..... 504
Calculs justificatifs..... 506
1° Madriers de platelage..... 506
2° Entretoises..... 507
3° Poutres principales..... 507
4° Contreventement..... 511
5° Montants..... 511
6° Pression sur les maçonneries..... 511
7° Flèche maxima prise par les poutres..... 512

Digitized by Google

CHAPITRE XIX

PONTS POUR VOIES DE TERRE

Pages.

257. Pont pour voie de terre de 4 mètres de largeur et de 8 mètres d'ouverture de nu à nu des culées 513
Calculs justificatifs..... 513
Comparaison des divers cas de surcharges, y compris la charge permanente..... 517

CHAPITRE XX

PONTS POUR CHEMINS DE FER

§ 1. — Ponts avec poutres à âme pleine

258. Viaduc de 3 mètres d'ouverture avec poutres jumelles pour voie normale..... 527
Calculs justificatifs..... 529
1° Entretoises supportant la longrine..... 529
2° Poutres jumelles..... 531
259. Viaduc de 7 mètres d'ouverture avec voie sur longerons et entretoises..... 536
Calculs justificatifs..... 538
1° Longeron..... 538
2° Entretoise..... 541
3° Poutres principales 545
4° Pression sur les maçonneries..... 553

§ 2. — Ponts avec poutres à treillis

260. Exemple d'un pont de 24 mètres de portée avec poutres à treillis double et à membrures parallèles, destiné à un chemin de fer pour une voie de 1 mètre..... 554
Poutres principales..... 554
Membrures..... 555
Diagonales..... 559
Contreventement inférieur..... 563
Surfaces offertes par les poutres et par mètre courant. 565
Barres de contreventement..... 567

Digitized by Google

ANNEXES

CONSTRUCTION DES PONTS ET CHARPENTES

Cahier des charges-type

Qualité des fers et des fontes

Pages.
Fers de forge et fers spéciaux..... 569
Tôles et larges plats. — Fontes..... 570

Essais des fers et fontes

Fers de forge et fers spéciaux..... 570
Tôles et fers plats..... 573
Fontes..... 577
Rivets. — Boulons et écrous..... 579

Qualité des aciers

Aciers laminés et tôles..... 580
Acier pour rivets..... 580

Essais des aciers

Aciers laminés..... 580
Tôles d'acier..... 581
Boulons et écrous d'acier. — Epreuves applicables aux rivets d'acier..... 583
Pièces en acier moulé..... 584
Réception des fers. — Main-d'œuvre..... 585
Travail à l'atelier et mise en œuvre. — Garde-corps. — Assemblages. — Perçage..... 586
Tolérance. — Calibres. — Rivures..... 587
Outillage. — Dispositions spéciales aux aciers..... 588
Montage à l'atelier du constructeur. — Chantiers. — Exécution du travail. — Exactitude du montage. — Montage au lieu de pose..... 589
Scellements. — Peintures des fers. — Epreuve des charpentes métalliques..... 590
Epreuve des poitrails, poutres de contreventement, etc. — Epreuve des ponts métalliques. — Dépenses des épreuves. — Détermination des prix..... 591
Pesées. — Calculs des poids..... 592

Digitized by Google

Pages.

Conformité de l'exécution aux dessins. — Modifications. — Vérification des efforts par l'entrepreneur. — Vérification sur place de la position des appuis des charpentes, poutres, etc. — Surveillance à l'usine de la fabrication des matières 593
Responsabilité de l'entrepreneur. — Travaux à la tâche. — Enlèvement des débris de matériaux 594

RÈGLEMENT DU 29 AOUT 1891
RELATIF AUX ÉPREUVES DES PONTS MÉTALLIQUES

CHAPITRE I

PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE FER

---

§ 1. — Voies de largeur normale

Article premier. — Conditions à remplir 595
Art. 2. — Limites du travail du métal 595
Art. 3. — Qualités du fer et de l'acier auxquelles correspondent les limites de travail du métal fixées par l'article 2. 596
Art. 4. — Composition du train-type 597
Art. 5. — Pression du vent 598
Art. 6. — Pièces travaillant à la compression 599
Art. 7. — Calcul des flèches 599
Art. 8. — Calcul des efforts pendant le lançage 599
Art. 9. — Epreuves 599
1. Composition des trains d'épreuves 599
Epreuves — Poids 599
Longueurs 600
2. Ponts à une seule voie ou à voies indépendantes 600
Epreuve par poids mort. — Epreuve par poids roulant 600
3. Ponts à voies solidaires 600
4. Ponts de types exceptionnels 601
5. Mesure des flèches 601
Visite. — Repères 601

Digitized by Google

Pages.

Art. 10. — Dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien..... 601
Art. 11. — Distances au rail le plus voisin des pièces les plus rapprochées de la voie..... 601
Art. 12. — Limite du poids des machines qui pourront circuler sur les ponts sans autorisation préalable..... 602

§ 2. — **Voies étroites**

Art. 13. — Ponts pour les chemins de fer à voie de 1 mètre et au dessus..... 602
Art. 14. — Ponts pour chemins de fer à voie de largeur inférieure à 1 mètre..... 603

CHAPITRE II

PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE TERRE

Art. 15. — Conditions à remplir..... 603
Art. 16. — Limites de travail du métal..... 603
Art. 17. — Surcharges à adopter pour le calcul..... 604
Art. 18. — Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des flèches, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance. — Epreuves..... 605
Art. 19. — Epreuves..... 605
Composition des surcharges d'épreuves..... 605
Longueur des files de voitures. — Nombre des files de voitures. — Epreuve par poids mort. — Epreuve par poids roulant. — Tempéraments aux surcharges d'épreuve. 606
Chargements exceptionnels..... 607

CHAPITRE III

PONTS-CANAUX MÉTALLIQUES

Art. 20. — Conditions à remplir..... 607
Art. 21. — Limites du travail du métal..... 607
Art. 22. — Pression du vent, pièces travaillant à la compression, calcul des efforts pendant le lançage, dispositions à prendre pour faciliter la visite et l'entretien, surveillance..... 607
Art. 23. — Calcul des flèches..... 607
Art. 24. — Epreuves..... 607

Digitized by Google

CHAPITRE IV

DISPOSITIONS DIVERSES

Pages.
Art. 25. — Contrôle des épreuves..... 608
Art. 26. — Dérogation aux prescriptions du règlement.... 608

INSTRUCTIONS POUR L'APPLICATION DU RÈGLEMENT RELATIF AUX ÉPREUVES DES PONTS MÉTALLIQUES

(*Circulaire du* 29 *août* 1891)

CHAPITRE I. — **PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE FER** 609

§ 1. — **Voies de largeur normale** 609

§ 2. — **Voies étroites** 615

CHAPITRE II. — **PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE TERRE** 615

CHAPITRE III. — **PONTS-CANAUX** 616

INSTRUCTIONS POUR LA SURVEILLANCE ET L'ENTRETIEN DES PONTS MÉTALLIQUES

(*Circulaire du* 29 *août* 1891)

1° Prescriptions générales

I. Entretien et visite périodique..... 618
II. Dossiers des ponts métalliques..... 618

Digitized by Google

2° Prescriptions spéciales aux ponts pour chemins de fer

Pages.

III. Vérification de la résistance des ponts pour chemins de fer 619

3° Prescriptions spéciales aux ponts pour voies de terre et ponts-canaux

IV. Vérification de la résistance des ponts pour voies de terre ou des ponts-canaux 619

CONSTRUCTION DES PONTS A TRAVÉES MÉTALLIQUES DÉPENDANT DES CHEMINS VICINAUX

(*Circulaire du 21 mai 1892 du ministère de l'Intérieur*)

I. Conditions à remplir 621
II. Limites du travail du métal 621
III. Dimensions minima 621
IV. Qualités du fer et de l'acier auxquelles correspondent les limites du travail du métal fixées par l'article 2. 622
V. Surcharges à adopter pour le calcul 622
VI. Pression du vent 623
VII. Pièces travaillant à la compression 623
VIII. Travail pendant le lançage 623
IX. Calculs de résistance 623
X. Epreuves 623
XI. Entretien et visites périodiques 624
Procès-verbal de visite d'un pont métallique 625

HALLES A VOYAGEURS ET A MARCHANDISES DES CHEMINS DE FER RÈGLEMENT DU 25 JANVIER 1902 RELATIF A LA VÉRIFICATION DES CALCULS ET AUX ÉPREUVES DE RÉSISTANCE DES CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES DES CHEMINS DE FER

Article premier. — Limite de fatigue des matériaux 628
Art. 2. — Qualités du fer et de l'acier aux quelles correspondent les limites de fatigue fixées à l'art. 1. 629

Digitized by Google

Pages.
Art. 3. — Surcharges 630
Art. 4. — Pièces comprimées 630
Art. 5. — Epreuves 630
Art. 6. — Fermes anciennes 630
Art. 7. — Contrôle des épreuves 630
Art. 8. — Dérogations aux prescriptions du règlement 630

CIRCULAIRE EXPLICATIVE DU 25 JANVIER 1902

Vérification des calculs et épreuves de résistance des constructions métalliques des chemins de fer 631

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBRARY
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HARVARD UNIVERSITY

Please sign your name and address on this card, and deposit in box provided.

This book may be kept

ONE WEEK

Digitized by Google

HARVARD ENGINEERING SCHOOL